

Информатика и её применения

Том 19 Выпуск 2 Год 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Оценивание параметров смеси нормальных многомерных распределений с ограничениями на ковариационные матрицы М. П. Кривенко	2
Несмещенная оценка риска при решении обратных статистических задач с помощью пороговой обработки с двумя пороговыми значениями О. В. Шестаков	9
Модифицированный вариант расширенного фильтра Калмана по методу линейных псевдонаблюдений А. В. Босов, И. В. Урюпин	17
Методы условно-оптимальной фильтрации по сложному статистическому критерию для наблюдаемых неявных стохастических систем И. Н. Синицын	27
Математическое обеспечение мониторинга состояний и характеристик сетевого соединения по комплексной статистической информации А. В. Борисов, Ю. Н. Куринов, Р. Л. Смелянский	35
Об одном алгоритме геометрического моделирования конструкций по результатам лазерного сканирования Ю. И. Битюков, П. Ю. Битюков	45
Метризация дискретных топологических пространств в контексте теории решеток. Часть 2. Практический анализ следствий теоремы о регулярности и нормальности И. Ю. Торшин	55
Машинное обучение и доверие к результатам классификации А. А. Грушо, Н. А. Грушо, М. И. Забежайло, В. О. Писковский, Е. Е. Тимонина	63
Концептуальная модель идентификации структуры проблемы в гибридных интеллектуальных многоагентных системах С. В. Листопад, И. А. Кириков	69
Об авторах	76
Правила подготовки рукописей	78
Requirements for manuscripts	81

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СМЕСИ НОРМАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ

М. П. Кривенко¹

Аннотация: Рассматриваются постановка и метод решения задачи нахождения оценки максимального правдоподобия параметров смеси нормальных многомерных распределений, позволяющих исключить возникновение «бесконечно» больших значений функции правдоподобия. Предлагается обусловить множество возможных ковариационных матриц так, чтобы они не становились сингулярными. Для этого вводится ограничение λ_0 для собственных чисел оцениваемых ковариационных матриц элементов смеси. Коррекция малых собственных чисел, меньших λ_0 , ковариационных матриц элементов смеси позволяет нейтрализовать возникающие вычислительные проблемы с неограниченностью правдоподобия, правда, ценой достаточно трудоемкой процедуры замены в случае необходимости собственных чисел ковариационных матриц на каждом шаге итерационного ЕМ-алгоритма. Обоснование правомочности предлагаемых решений позволяет не только получить детальное описание соответствующих действий, но и предложить варианты выбора нового дополнительного параметра элементов смеси λ_0 . Оценивание параметров смеси при ограничениях решает в первую очередь вычислительные проблемы, но может влиять на эффективность использования оценки смеси. Это иллюстрируется на примере задачи классификации данных.

Ключевые слова: смесь нормальных многомерных распределений; оценка максимального правдоподобия; ЕМ-алгоритм

DOI: 10.14357/19922264250201

EDN: YJOPVN

1 Введение

Модель смеси нормальных распределений может эффективно использоваться как средство аппроксимации реальных данных, методологически обеспечивать решение задач их классификации и при этом быть доступной с точки зрения теоретического анализа [1–3]. Для оценивания параметров модели могут применяться различные подходы, среди которых метод максимального правдоподобия и его воплощение в виде ЕМ-алгоритма (ЕМ — Expectation-Maximization) занимают главенствующее место, потому что позволяют не привлекать дополнительной априорной информации к уже не простой постановке задачи описания данных с помощью параметрической модели, автоматически и достаточно эффективно решать задачу оценивания параметров в широком диапазоне значений числа элементов смеси [4].

Рассмотрим задачу оценивания по методу максимального правдоподобия параметров смеси нормальных n -мерных распределений:

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^k p_j g(\mathbf{u}, \mathbf{a}_j, \mathbf{C}_j),$$

$$p_j > 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad \sum_{j=1}^k p_j = 1;$$

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{a}_j, \mathbf{C}_j) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{C}_j|^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{a}_j)^T \mathbf{C}_j^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{a}_j)}{2} \right], \quad j = \overline{1, k}.$$

Для реализации этапа максимизации итерационного ЕМ-алгоритма [5, разд. 2.1] необходимо найти решение задачи

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N q_{ij} \ln g(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{C}_j) \rightarrow \max_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_k}, \quad (1)$$

где q_{ij} — заданные апостериорные вероятности принадлежности наблюдения $\mathbf{x}_i$ к j -му элементу смеси, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k}$. При известных для $j = \overline{1, k}$ параметрах смеси p_j^* , $\mathbf{a}_j^*$ и $\mathbf{C}_j^*$ апостериорные вероятности принимают вид:

$$q_{ij} = \frac{p_j^* g(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_j^*, \mathbf{C}_j^*)}{\sum_{l=1}^k p_l^* g(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_l^*, \mathbf{C}_l^*)}.$$

Для решения (1) необходимо и достаточно для каждого допустимого значения j найти решение задачи

$$\sum_{i=1}^N g_{ij} \ln g(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{C}_j) \rightarrow \max_{\mathbf{a}_j, \mathbf{C}_j},$$

¹ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mkcrivenko@frccsc.ru

которая эквивалентна задаче минимизации функции

$$\phi^*(\mathbf{a}_j, \mathbf{C}_j^{-1}) = - \left(\sum_{i=1}^N q_{ij} \right) \ln |\mathbf{C}_j^{-1}| + \sum_{i=1}^N q_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_j)^T \mathbf{C}_j^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_j). \quad (2)$$

При минимизации этой функции в ходе нахождения оценок максимального правдоподобия возможна ситуация, когда функция правдоподобия примет «бесконечно» большие значения. Наиболее ярко это проявляется при малых объемах выборки и связано с тем, что для некоторого элемента смеси соответствующие выборочные значения начинают сосредотачиваться в пространстве меньшей размерности (например, из-за дискретности наблюдаемых значений хотя бы по одной из координат или из-за возникающих линейных зависимостей между координатами), как следствие, среди собственных чисел соответствующей ковариационной матрицы появляются практически равные нулю значения. Для решения этой проблемы достаточно каким-то образом обусловить множество возможных ковариационных матриц так, чтобы они не становились сингулярными. Для этого в [6] предлагалось вводить ограничения для собственных чисел ковариационных матриц элементов смеси, а также давался набросок обоснования вида соответствующей оценки максимального правдоподобия. В данной статье, в отличие от ранее существовавшей аргументации, приводится полное доказательство результата по оценке, позволяющее также решать и задачу подбора вводимых ограничений.

2 Оценивание при ограничениях на собственные числа

Пусть все собственные числа $\lambda_i(\mathbf{C}_j)$ ковариационных матриц $\mathbf{C}_j$ элементов смеси ограничены снизу некоторой положительной константой λ_0 , т.е. $\lambda_i(\mathbf{C}_j) \geq \lambda_0 > 0$, $i = \overline{1, n}$. Заметим, что в этом случае $\mathbf{C}_j$ — положительно определенная матрица, поэтому $\mathbf{C}_j^{-1}$ также положительно определена. Учитывая ограничения на собственные числа матрицы $\mathbf{C}_j$, получаем, что собственные числа $\lambda_i(\mathbf{C}_j^{-1})$ матрицы $\mathbf{C}_j^{-1}$ должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$0 < \lambda_i(\mathbf{C}_j^{-1}) \leq \lambda_0^{-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим через $\lambda_{(i)}$ i -й по порядку элемент в упорядоченной по возрастанию последовательности значений λ_i , $i = \overline{1, n}$.

Лемма 1. Если $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ — некоторая симметричная матрица с собственными числами λ_i , то $\lambda_{(1)} \leq a_{ii} \leq \lambda_{(n)}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. $\mathbf{A}$ — симметричная матрица, значит, существуют ортогональная матрица $\mathbf{O}$ и диагональная матрица $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ такие, что $\mathbf{A} = \mathbf{O}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{O}$. Отсюда сразу же следуют требуемые неравенства, например:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \lambda_1 o_{i1}^2 + \dots + \lambda_n o_{in}^2 \leq \\ &\leq \lambda_{(n)} o_{i1}^2 + \dots + \lambda_{(n)} o_{in}^2 = \lambda_{(n)}. \quad \square \end{aligned}$$

Для упрощения записи при фиксированном значении j введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= (b_1, \dots, b_n)^T = \mathbf{a}_j; \quad \mathbf{G} = \mathbf{C}_j^{-1}; \quad \phi^* = \phi^*(\mathbf{a}_j, \mathbf{C}_j^{-1}); \\ e_i &= q_{ij}, \quad i = \overline{1, N}; \quad w = \sum_{i=1}^N e_i = \sum_{i=1}^N q_{ij}. \end{aligned}$$

Тогда (2) примет вид:

$$\phi^* = -w \ln |\mathbf{G}| + \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b})^T \mathbf{G} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}).$$

Для произвольного набора наблюдаемых значений $\mathbf{x}_i$ и заданных величин q_{ij} , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, k}$, согласно ЕМ-алгоритму определены следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^* &= \frac{\sum_{i=1}^N e_i \mathbf{x}_i}{w}; \\ \mathbf{D}^* &= \frac{\sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*)(\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*)^T}{w}. \end{aligned}$$

Матрица $\mathbf{D}^*$ есть сумма неотрицательно определенных симметричных матриц с положительными коэффициентами, поэтому она также неотрицательно определенная симметричная матрица. Отсюда получаем, что существует такая ортогональная матрица $\mathbf{U}^*$, что $\mathbf{U}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{\Lambda}^*$, где $\mathbf{\Lambda}^* = \text{diag}(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ — матрица с собственными числами матрицы $\mathbf{D}^*$ на диагонали.

Теорема 1. Минимум функции

$$\phi^* = -w \ln |\mathbf{G}| + \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b})^T \mathbf{G} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b})$$

при произвольных значениях $\mathbf{b}$ и положительно определенных симметричных матрицах $\mathbf{G}$, собственные числа которых удовлетворяют неравенствам $0 < \lambda_i(\mathbf{G}) \leq \lambda_0^{-1}$, $i = \overline{1, n}$, достигается при $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$ и $\mathbf{G} = \mathbf{U}^* (\mathbf{\Lambda}^{**})^{-1} \mathbf{U}^{*T}$, где

$$\mathbf{\Lambda}^{**} = \text{diag}(\lambda_1^{**}, \dots, \lambda_n^{**}),$$

$$\lambda_i^{**} = \begin{cases} \lambda_i^*, & \text{если } \lambda_i^* \geq \lambda_0; \\ \lambda_0, & \text{если } \lambda_i^* < \lambda_0. \end{cases}$$

Доказательство. Воспользовавшись равенствами

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*)^T \mathbf{G} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*) &= \text{tr}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*)(\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*)^T); \\ \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*)^T &= \mathbf{0}^T; \quad \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

преобразуем выражение для ϕ^* :

$$\begin{aligned} \phi^* &= -w \ln |\mathbf{G}| + \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b})^T \mathbf{G} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}) = \\ &= -w \ln |\mathbf{G}| + \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*)^T \mathbf{G} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}^*) + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^N e_i \right) (\mathbf{b}^* - \mathbf{b})^T \mathbf{G} (\mathbf{b}^* - \mathbf{b}) = \\ &= -w \ln |\mathbf{G}| + w \text{tr}(\mathbf{G} \mathbf{D}^*) + w (\mathbf{b}^* - \mathbf{b})^T \mathbf{G} (\mathbf{b}^* - \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Так как $w > 0$, то для минимизации ϕ^* достаточно минимизировать функцию

$$\psi = -\ln |\mathbf{G}| + \text{tr}(\mathbf{G} \mathbf{D}^*) + (\mathbf{b}^* - \mathbf{b})^T \mathbf{G} (\mathbf{b}^* - \mathbf{b}). \quad (3)$$

В силу положительной определенности матрицы $\mathbf{G}$ третье слагаемое в выражении (3) всегда неотрицательно и равно нулю только тогда, когда $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$, независимо от конкретного значения матрицы $\mathbf{G}$. Таким образом, в точке минимума $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$, и далее достаточно рассматривать поведение функции $\psi = -\ln |\mathbf{G}| + \text{tr}(\mathbf{G} \mathbf{D}^*)$.

Последующие рассуждения будут основываться на снижении размерности выборочного пространства, что в необходимых случаях отразится на обозначениях, например вместо ψ будет использоваться запись ψ_n , вместо $\mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}_{n \times n}^*$. В силу того что $\mathbf{U}^{*T} = \mathbf{U}^{*-1}$, ψ_n можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_n &= -\ln |\mathbf{U}^{*T} \mathbf{G} \mathbf{U}^*| + \text{tr}(\mathbf{U}^{*T} \mathbf{G} \mathbf{U}^* \mathbf{U}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{U}^*) = \\ &= -\ln |\mathbf{V}_{n \times n}| + \text{tr}(\mathbf{V}_{n \times n} \mathbf{\Lambda}_{n \times n}^*), \end{aligned}$$

где $\mathbf{V}_{n \times n} = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{G}_{n \times n} \mathbf{U}^*$, $\mathbf{V}_{n \times n}$ — положительно определенная симметричная матрица. Кроме того, так как $\mathbf{U}^*$ — ортогональная матрица, то собственные числа матриц $\mathbf{V}_{n \times n}$ и $\mathbf{G}_{n \times n}$ совпадают.

Разложим на блоки матрицы $\mathbf{V}_{n \times n}$ и $\mathbf{\Lambda}_{n \times n}^*$, а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{n \times n} &= \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{n-1 \times n-1} & \mathbf{V}_{n-1 \times 1} \\ \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T & v_{nn} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{\Lambda}_{n \times n}^* &= \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{n-1 \times n-1}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В соответствии с правилами оперирования блоками матрицы [7] имеем:

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}_{n \times n}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{V}_{n-1 \times n-1} & \mathbf{V}_{n-1 \times 1} \\ \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T & v_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= |\mathbf{V}_{n-1 \times n-1}| |v_{nn} - \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T \mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1} \mathbf{V}_{n-1 \times 1}|; \\ \text{tr}(\mathbf{V}_{n \times n} \mathbf{\Lambda}_{n \times n}^*) &= \\ &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{n-1 \times n-1} & \mathbf{V}_{n-1 \times 1} \\ \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{n-1 \times n-1}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n^* \end{pmatrix} \right) = \\ &= \text{tr} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{n-1 \times n-1} \mathbf{\Lambda}_{n-1 \times n-1}^* & \mathbf{V}_{n-1 \times 1} \lambda_n^* \\ \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T \mathbf{\Lambda}_{n-1 \times n-1}^* & v_{nn} \lambda_n^* \end{pmatrix} = \\ &= \text{tr}(\mathbf{V}_{n-1 \times n-1} \mathbf{\Lambda}_{n-1 \times n-1}^*) + v_{nn} \lambda_n^*. \end{aligned}$$

Становится верным следующее представление:

$$\begin{aligned} \psi_n &= -\ln |\mathbf{V}_{n-1 \times n-1}| + \text{tr}(\mathbf{V}_{n-1 \times n-1} \mathbf{\Lambda}_{n-1 \times n-1}^*) + \\ &\quad + v_{nn} \lambda_n^* - \ln(v_{nn} - \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T \mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1} \mathbf{V}_{n-1 \times 1}) = \\ &= \psi_{n-1} + v_{nn} \lambda_n^* - \\ &\quad - \ln(v_{nn} - \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T \mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1} \mathbf{V}_{n-1 \times 1}). \end{aligned}$$

Матрица $\mathbf{V}_{n \times n}$ — положительно определенная и симметричная, поэтому матрица $\mathbf{V}_{n-1 \times n-1}$ и, следовательно, $\mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1}$ также положительно определенные симметричные матрицы [7], т.е. для произвольного ненулевого вектора $\mathbf{x}$ верно неравенство $\mathbf{x}^T \mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1} \mathbf{x} > 0$. Отсюда получаем, что независимо от конкретного вида матрицы $\mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1}$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} v_{nn} \lambda_n^* - \ln(v_{nn} - \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T \mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1} \mathbf{V}_{n-1 \times 1}) &\geq \\ &\geq v_{nn} \lambda_n^* - \ln v_{nn}, \end{aligned}$$

где равенство достигается при $\mathbf{V}_{n-1 \times 1} = (0, \dots, 0)^T$. Для нахождения минимума функции $\eta(v_{nn}) = v_{nn} \lambda_n^* - \ln v_{nn}$ рассмотрим три возможных случая: $\lambda_n^* = 0$; $0 < \lambda_n^* < \lambda_0$; $\lambda_n^* \geq \lambda_0$.

Если $\lambda_n^* = 0$, то необходимо найти минимум функции $\eta(v_{nn}) = -\ln v_{nn}$. В силу леммы 1 и ограничений $\lambda_i(\mathbf{G}) \leq \lambda_0^{-1}$ получаем

$$v_{nn} \leq \lambda_{(n)}(\mathbf{G}) \leq \lambda_0^{-1}. \quad (4)$$

Поэтому функция $\eta(v_{nn})$ при $\lambda_n^* = 0$ достигает своего единственного минимума при $v_{nn} = \lambda_0^{-1}$.

Если $\lambda_n^* > 0$, то единственный безусловный минимум функции $\eta(v_{nn})$ достигается при $v_{nn} = \lambda_n^{*-1}$. Если дополнительно $\lambda_n^* < \lambda_0$, то $\lambda_0^{-1} < \lambda_n^{*-1}$ и с помощью (4) получаем $v_{nn} \leq \lambda_0^{-1} < \lambda_n^{*-1}$; следовательно, минимум $\eta(v_{nn})$ достигается при $v_{nn} = \lambda_0^{-1}$.

Если $\lambda_n^* \geq \lambda_0$, то $\lambda_0^{-1} \geq \lambda_n^{*-1}$ и с помощью (4) получаем, что минимум функции $\eta(v_{nn})$ достигается при $v_{nn} = \lambda_n^{*-1}$.

Таким образом, доказано, что независимо от конкретного вида матрицы $\mathbf{V}_{n-1 \times n-1}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \psi_{n-1} + v_{nn} \lambda_n^* - \\ & - \ln(v_{nn} - \mathbf{V}_{n-1 \times 1}^T \mathbf{V}_{n-1 \times n-1}^{-1} \mathbf{V}_{n-1 \times 1}) \geq \\ & \geq \psi_{n-1} + \frac{1}{\lambda_n^{**}} \lambda_n^* - \ln\left(\frac{1}{\lambda_n^{**}}\right) \end{aligned}$$

и матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{n-1 \times n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\lambda_n^{**}} \end{pmatrix}$ лежит в классе матриц, удовлетворяющих требуемому ограничению на собственные числа. Раскладывая и анализируя аналогичным образом функции $\psi_{n-1}, \dots, \psi_1$, получим, что максимум функции правдоподобия достигается при

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^*; \quad \mathbf{G} = \mathbf{U}^* (\mathbf{\Lambda}^{**})^{-1} \mathbf{U}^{*T},$$

что и требовалось доказать. $\square$

3 Оценивание при ограничениях на дисперсии

Наложим ограничения на ковариационные матрицы, исходя из ограничений на дисперсии в исходном пространстве данных таким образом, чтобы после любого ортогонального преобразования выборочного пространства дисперсии координат не становились бы сколь угодно малыми. За основу для построения такого ограничения можно взять минимальные значения дисперсий $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, \sigma_i^2 > 0, i = \overline{1, n}$, в исходном выборочном пространстве, которые вводятся после содержательного анализа исходных данных. Дальнейшее построение ограничений связано с введением условия, что эллипсоиды, задаваемые формулами $\mathbf{x}^T \mathbf{C}_j^{-1} \mathbf{x} = 1$, где $\mathbf{C}_j$ — положительно определенная ковариационная матрица j -го элемента смеси, $j = \overline{1, k}$, содержат внутри себя эллипсоид $\mathbf{x}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} = 1$, где $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$.

Пусть далее $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ суть некоторые положительно определенные симметричные матрицы. Тогда по определению:

- эллипсоид $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$ содержит внутри себя точку $\mathbf{y}$, если $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \leq 1$;
- эллипсоид $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$ содержит внутри себя эллипсоид $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$ (обозначим как $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$), если эллипсоид $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$ содержит внутри себя все точки эллипсоида $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$.

Лемма 2. Для того чтобы $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathbf{y}$ выполнялось неравенство $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$. Для произвольного $\mathbf{y}$ и некоторого $c > 0$ в силу положительной определенности матрицы $\mathbf{B}$ верно $\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = c^2$, значит, $(\mathbf{y}/c)^T \mathbf{B} (\mathbf{y}/c) = 1$. Из того, что $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$, следует $(\mathbf{y}/c)^T \mathbf{A} (\mathbf{y}/c) \leq 1$. Отсюда получаем требуемое: $(\mathbf{y}/c)^T \mathbf{A} (\mathbf{y}/c) \leq 1 = (\mathbf{y}/c)^T \mathbf{B} (\mathbf{y}/c)$, или $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$. Обратное доказывается аналогично. $\square$

Лемма 3. Для произвольной невырожденной матрицы $\mathbf{T}$ соотношение $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \succ \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T}$.

Доказательство. Для любого $\mathbf{y}$ имеем: $\mathbf{y}^T \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} \leq \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} = \mathbf{y}^T \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{y}$, где $\mathbf{z} = \mathbf{T} \mathbf{y}$. Аналогичным образом $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{v}^T \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{y} \leq \mathbf{v}^T \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$, где $\mathbf{y} = \mathbf{T} \mathbf{v}$. $\square$

Лемма 4. Соотношение $\mathbf{A} \succ \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица) выполняется тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ лежат в промежутке $(0, 1]$.

Доказательство. $\mathbf{A}$ — симметричная матрица, поэтому существуют такие ортогональная матрица $\mathbf{U}$ и диагональная матрица $\mathbf{\Lambda}$ из собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$, что $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$. Тогда согласно доказанным леммам 2 и 3 соотношение $\mathbf{A} \succ \mathbf{I}$ эквивалентно соотношению $\mathbf{\Lambda} \succ \mathbf{I}$, что, в свою очередь, эквивалентно для произвольного $\mathbf{y}$ неравенству $\mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{I} \mathbf{y}$. Последнее неравенство фактически задает ограничения на собственные числа сверху, а из положительной определенности $\mathbf{A}$ следуют ограничения снизу. $\square$

Вернемся к рассмотрению j -го элемента смеси. Для (2) справедливо $\mathbf{C}_j^{-1} \succ \mathbf{\Sigma}^{-1}$, $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ — матрица ограничений на параметры, где $\sigma_i^2 > 0, i = \overline{1, n}$. Как и прежде, обозначим $\mathbf{G} = \mathbf{C}_j^{-1}$. Выше было показано, что для этапа максимизации ЕМ-алгоритма в обозначениях 1-й части работы необходимо и достаточно найти решение задачи

$$-w \ln |\mathbf{G}| + \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b})^T \mathbf{G} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}) \rightarrow \min_{\mathbf{b}, \mathbf{G}, \mathbf{G} \succ \mathbf{\Sigma}^{-1}}.$$

Заменим рассматриваемую оптимизационную задачу ей эквивалентной:

$$\begin{aligned} & -w \ln |\mathbf{T}^T \mathbf{G} \mathbf{T}| + \\ & + \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{b})^T (\mathbf{T}^{-1})^T (\mathbf{T}^T \mathbf{G} \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{b}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{T} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Вводя дополнительные обозначения

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{T}\mathbf{G}\mathbf{T}; \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_i; \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b},$$

получаем

$$-w \ln |\tilde{\mathbf{G}}| + \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{y}_i - \tilde{\mathbf{b}})^T \tilde{\mathbf{G}} (\mathbf{y}_i - \tilde{\mathbf{b}}) \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{G}} \succ \mathbf{I}},$$

где условие $\tilde{\mathbf{G}} \succ \mathbf{I}$ эквивалентно условию, что собственные числа матрицы $\tilde{\mathbf{G}}$ не превосходят 1. Заметим, что матрица $\tilde{\mathbf{G}}$ положительно определенная и симметричная, что следует из положительной определенности и симметричности матрицы $\mathbf{G}$, а также из невырожденности и симметричности матрицы $\mathbf{T}$. Таким образом, мы находимся в условиях доказанной теоремы, где $\mathbf{x}_i$ необходимо заменить на $\mathbf{y}_i$, $\mathbf{G}$ на $\tilde{\mathbf{G}}$, $\mathbf{b}$ на $\tilde{\mathbf{b}}$ и λ_0 положить равным 1. Тогда получаем, что минимум выражения (4) достигается при

$$\tilde{\mathbf{b}} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i \mathbf{y}_i}{w}; \quad \tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{U}}^* (\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{**})^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^{*T},$$

где $\tilde{\mathbf{U}}^*$ — такая ортогональная матрица, что $\tilde{\mathbf{U}}^{*T} \tilde{\mathbf{D}}^* \tilde{\mathbf{U}}^* = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^*$, $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^* = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1^*, \dots, \tilde{\lambda}_n^*)$ — матрица с собственными числами матрицы

$$\tilde{\mathbf{D}}^* = \frac{\sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{y}_i - \tilde{\mathbf{b}}^*) (\mathbf{y}_i - \tilde{\mathbf{b}}^*)^T}{w} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{T}^{-1}$$

на диагонали, а

$$\tilde{\lambda}_i^{**} = \begin{cases} \tilde{\lambda}_i^*, & \text{если } \tilde{\lambda}_i^* \geq 1; \\ 1, & \text{если } \tilde{\lambda}_i^* < 1. \end{cases}$$

Переходя к исходным обозначениям, получаем:

$$\mathbf{b} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{b}} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i \mathbf{T} \mathbf{y}_i}{w} = \mathbf{b}^*; \quad \mathbf{G} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{T}^{-1}.$$

Замечание. Если матрица обобщенных ограничений Σ имеет вид $\lambda_0 \mathbf{I}$, т.е. $\mathbf{G} \succ \lambda_0^{-1} \mathbf{I}$, то это эквивалентно тому, что все собственные числа матрицы $\mathbf{G}$ не превосходят λ_0^{-1} . Следовательно, применяя доказанную теорему, получаем, что $\mathbf{G} = \mathbf{U}^* (\mathbf{\Lambda}^{**})^{-1} \mathbf{U}^{*T}$. $\square$

4 Заключение

Нужно понимать, что оценивание параметров смеси при ограничениях решает в первую очередь вычислительные проблемы, но может при этом повлиять на эффективность решения задачи, в рамках которой оно реализуется. Для иллюстрации это-

Оценка точности классификации A^* в зависимости от значения ограничения λ_0

$\lg \lambda_0$	$A^*, \%$
-5, -4, -3, -2, -1	80
-0,5	83
0	85
1	83
2	73
3	50
4	41

го обратимся к моделированию с помощью смеси результатов реальных обследований [8, разд. 5] с целью дискриминации данных о ферментах, полученных для 218 пациентов с четырьмя заболеваниями печени. В [9] для описания данных каждого из четырех классов использовалась модель смеси нормальных распределений, а качество принимаемых решений характеризовалось точностью классификации A^* , оцениваемой методом перепроверки [10]. Перебор в диапазоне $k = \overline{1, 10}$ единич для всех классов значений числа элементов смеси с последующей попыткой уменьшить этот показатель для отдельных классов привел к оценкам: $k^* = (5, 5, 4, 5)$, достигнутая точность $A^* = 80\%$. Для исключения вырожденных оценок смеси оказалось достаточным принять $\lambda_0 = 10^{-5}$. Варьирование граничного значения позволило улучшить итоговый результат и довести его до 85% (см. таблицу).

Для сравнения: использование модели просто нормального распределения при описании данных из каждого класса привели бы к точности классификации лишь в 67%.

В заключение следует обратить внимание на обзор по моделям смеси нормальных распределений, представленным в **R** [11]. На данный момент существуют более 50 пакетов [12], реализующих ЕМ-алгоритм оценки параметров смеси. Важно, что случай, когда конкретный реализованный пакетом алгоритм не смог сформировать оценки параметров смеси из-за сходимости к вырожденному распределению (например, с «нулевыми» дисперсиями) квалифицировался как неудачный и, соответственно, в пакетах не обрабатывался и авторами обзора не рассматривался.

Коррекция малых собственных чисел ковариационных матриц элементов смеси позволяет нейтрализовать возникающие вычислительные проблемы с неограниченностью правдоподобия, правда, ценой достаточно трудоемкой процедуры коррекции ковариационных матриц на каждом шаге итерационного ЕМ-алгоритма. Обоснование правомерности предлагаемых действий позволяет не только получить детальное описание соответству-

ющих действий, но и предложить вариант выбора нового дополнительного параметра смеси — критических значений λ_0 .

Литература

1. *Кривенко М. П.* Модели для представления и обработки референсных значений // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 63–74. doi: 10.14357/19922264150208.
2. *Кривенко М. П.* Многомерный референсный регион высокой плотности // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 2. С. 59–64. doi: 10.14357/19922264170207.
3. *Кривенко М. П.* Критерии выбора размерности модели факторизации // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 50–56. doi: 10.14357/19922264230207.
4. *McLachlan G., Peel D.* Finite mixture models. — Danvers, MA, USA: Wiley, 2000. 464 p.
5. *McLachlan G. J., Basford K. E.* Mixture models: Inference and applications to clustering. — New York, NY, USA: Marsel Dekker, 1988. 273 p.
6. *Кривенко М. П.* Распознавание элементов изображения, имеющих различные размеры // Системы и средства информатики, 2007. Вып. 17. С. 30–51.
7. *Seber G. A. F.* A matrix handbook for statisticians. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2008. 560 p.
8. *Albert A.* Multivariate interpretation of clinical laboratory data. — New York, NY, USA: CRC Press, 1987. 386 p.
9. *Кривенко М. П.* Снижение размерности для смеси вероятностных анализаторов главных компонент применительно к задачам медицинской диагностики // Системы и средства информатики, 2019. Т. 29. № 4. С. 4–13.
10. *Chernick M. R.* Bootstrap methods: A guide for practitioners and reseachers. — 2nd ed. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2008. 370 p.
11. *Jones E., Harden S., Crawley M. J.* The R book. — 3rd ed. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2023. 880 p.
12. *Chassagnol B., Bichat A., Boudjeniba C., Willemin P.-H., Guedj M., Gohel D., Nuel G., Becht E.* Gaussian mixture models in R // R J., 2023. Vol. 15. No. 2. P. 56–76. doi: 10.32614/RJ-2023-043.

Поступила в редакцию 24.03.2025

Принята к публикации 15.05.2025

ESTIMATION OF PARAMETERS OF A MIXTURE OF NORMAL MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS WITH CONSTRAINTS ON COVARIANCE MATRICES

M. P. Krivenko

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

Abstract: The formulation and method of solving the problem of finding an estimate of the maximum likelihood of the parameters of a mixture of normal multidimensional distributions that allow excluding the occurrence of “infinitely” large values of the likelihood function are considered. It is proposed to condition the set of possible covariance matrices so that they do not become singular. To do this, a boundary λ_0 is introduced for the eigenvalues of the estimated covariance matrices of the elements of the mixture. Correction of small eigenvalues, smaller than λ_0 , covariance matrices of the elements of the mixture makes it possible to neutralize the arising computational problems with unlimited likelihood, however, at the cost of a rather laborious procedure for replacing the eigenvalues of covariance matrices, if necessary, at each step of the iterative EM (expectation-minimization) algorithm. The justification of the legitimacy of the proposed actions allows not only to obtain a detailed description of the corresponding actions but also to offer options for choosing a new additional parameter of the mixture elements, λ_0 . Estimating mixture parameters under constraints primarily solves computational problems but can affect the efficiency of using mixture estimation. This is illustrated by the example of a data classification problem.

Keywords: mixture of normal multivariate distributions; maximum likelihood estimate; EM-algorithm

DOI: 10.14357/19922264250201

EDN: YJOPVN

References

1. Krivenko, M. P. 2015. Modeli dlya predstavleniya i obrabotki referensnykh znacheniy [Models for representation and treatment of reference values]. *Informatika i ee primeneniya* — Inform. Appl. 9(2):63–74. doi: 10.14357/19922264150208.
2. Krivenko, M. P. 2017. Mnogomernyy referensnyy region vysokoy plotnosti [High-density multivariate reference

- regions]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(2):59–64. doi: 10.14357/19922264170207.
3. Krivenko, M. P. 2023. Kriterii vybora razmernosti modeli faktorizatsii [Criteria for choosing the factorization model dimensionality]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):50–56. doi: 10.14357/19922264230207.
 4. McLachlan, G., and D. Peel. 2000. *Finite mixture models*. Danvers, MA: Wiley. 464 p.
 5. McLachlan, G. J., and K. E. Basford. 1988. *Mixture models: Inference and applications to clustering*. New York, NY: Marsel Dekker. 273 p.
 6. Krivenko, M. P. 2007. Raspoznavanie elementov izobrazheniya, imeyushchikh razlichnye razmery [Recognition of image object with different picture size elements]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 17: 30–51.
 7. Seber, G. A. F. 2008. *A matrix handbook for statisticians*. Hoboken, NJ: Wiley. 560 p.
 8. Albert, A. 1987. *Multivariate interpretation of clinical laboratory data*. New York, NY: CRC Press. 386 p.
 9. Krivenko, M. P. 2019. Snizhenie razmernosti dlya smesi veroyatnostnykh analizatorov glavnykh komponent primenitel'no k zadacham meditsinskoy diagnostiki [Dimensionality reduction for mixture of probabilistic principal component analyzers in relation to the tasks of medical diagnostics]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 29(4):4–13.
 10. Chernick, M. R. 2008. *Bootstrap methods: A guide for practitioners and reseachers*. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley. 370 p.
 11. Jones, E., S. Harden, and M. J. Crawley. 2023. *The R book*. 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley. 880 p.
 12. Chassagnol B., A. Bichat, C. Boudjeniba, P.-H. Wuillemin, M. Guedj, D. Gohel, G. Nuel, and E. Becht. 2023. Gaussian mixture models in R. *R J.* 15(2):56–76. doi: 10.32614/RJ-2023-043.

Received March 24, 2025

Accepted May 15, 2025

Contributor

Krivenko Michail P. (b. 1946) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; mkrivenko@frccsc.ru

НЕСМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА РИСКА ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКИ С ДВУМЯ ПОРОГОВЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

О. В. Шестаков¹

Аннотация: Обратные статистические задачи возникают в таких областях, как астрономия, физика плазмы, вычислительная томография и т. п. При этом в наблюдаемых данных, как правило, присутствует шум, и поэтому необходимо применять методы его подавления. В ситуациях, когда задача связана с обращением линейного однородного оператора, хорошо показали себя методы подавления шума, основанные на вейвлет-преобразовании и процедурах пороговой обработки. Эти методы вычислительно эффективны и хорошо адаптируются к локальным особенностям сигналов. Наиболее распространенными видами пороговой обработки стали жесткая и мягкая пороговая обработка. Однако при использовании жесткой пороговой обработки получаются оценки с большой дисперсией, а мягкая пороговая обработка приводит к появлению дополнительного смещения. В попытке избавиться от этих недостатков в последние годы были предложены различные альтернативные виды пороговой обработки. В данной работе рассматривается процедура пороговой обработки с двумя порогами, которая ведет себя как мягкая пороговая обработка при малых значениях вейвлет-коэффициентов и как жесткая при больших. Для данного вида пороговой обработки строится несмещенная оценка среднеквадратичного риска и анализируются ее статистические свойства. Также описывается алгоритм вычисления порога, минимизирующего эту оценку.

Ключевые слова: вейвлеты; пороговая обработка; линейный однородный оператор; несмещенная оценка риска

DOI: 10.14357/19922264250202

EDN: XILHGE

1 Введение

Статистические обратные задачи возникают в ситуациях, когда исследователь заинтересован в оценке неизвестной функции f , описывающей объект исследования, на основе зашумленных наблюдений Kf , где K — некоторый линейный однородный оператор. Такие проблемы возникают во многих научных областях, включая медицину, астрономию, физику плазмы и т. п. Традиционные подходы обычно используют методы регуляризации в сочетании с сингулярным разложением. Функция f разлагается в ряд по базису, образованному собственными функциями самосопряженного оператора K^*K , где K^* — сопряженный оператор к K . При наблюдении зашумленных данных вычисляется частичная сумма ряда и по этим данным оцениваются коэффициенты собственных функций в разложении. Известно, что при оптимальном выборе параметров метода сингулярного разложения построенная оценка достигает минимальной скорости сходимости в некоторых классах функций [1]. Однако метод сингулярного разложения имеет определенные ограничения. Базисные функции полностью определяются оператором K

и не учитывают особенностей самой функции f . Если функция f имеет неоднородную гладкость, то ее представление через собственные функции оператора K^*K часто оказывается неэффективным.

Вейвлет-базисы обеспечивают эффективное представление функций в широком диапазоне функциональных классов, и вейвлет-методы продемонстрировали значительный успех в построении непараметрических оценок функций с точки зрения пространственной адаптивности и асимптотической оптимальности. Правильно подобранный вейвлет-базис может одновременно учитывать как особенности оператора K , так и локальные особенности функции f , такие как резкие изменения и наличие особых точек. Донохо [2] разработал метод вейвлет-вейглет-разложения для решения обратных задач, который основан на разложении функции f в ряд по вейвлет-базису и получении соответствующего разложения функции Kf по вейглет-базису. Затем вычисляются оценки вейвлет-коэффициентов с помощью пороговой обработки эмпирических вейглет-коэффициентов.

Абрамович и Сильверман [3] предложили другой вейвлет-метод, который назвали вейглет-вейвлет-

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, oshestakov@cs.msu.ru

разложением. В этом методе функция Kf разлагается по вейвлет-базису, затем зашумленные эмпирические коэффициенты подвергаются пороговой обработке и наконец осуществляется преобразование K^{-1} для получения оценки функции f .

При использовании указанных вейвлет-методов наиболее часто применяется жесткая или мягкая пороговая обработка. Однако жесткая пороговая обработка использует разрывную пороговую функцию, что приводит к появлению артефактов и неустойчивости по отношению к начальным данным, а при мягкой пороговой обработке в функции сигнала появляется дополнительное смещение. В ряде работ предложены некоторые альтернативные функции пороговой обработки, справляющиеся с указанными недостатками [4–13]. В частности, в работе [4] предлагается использовать пороговую функцию с двумя пороговыми значениями, которая для малых значений коэффициентов ведет себя как мягкая пороговая обработка, а для больших — как жесткая.

В данной работе рассматривается метод обращения линейного однородного оператора с помощью вейвлет-разложения и на основе метода Стейна [14] строится несмещенная оценка среднеквадратичного риска при такой пороговой обработке. Показывается, что при определенных условиях данная оценка сильно состоятельна и асимптотически нормальна. Также обсуждается метод вычисления адаптивного порога, минимизирующего оценку среднеквадратичного риска. Аналогичные результаты для других моделей и методов пороговой обработки получены в работах [15–19].

2 Вейвлет-методы обращения линейных однородных операторов

Линейный оператор K называется однородным, если

$$K[f(a(x - x_0))] = a^{-\beta}(Kf)[a(x - x_0)]$$

для любого x_0 и любого $a > 0$. Параметр β называется показателем однородности. Примерами линейных однородных операторов служат оператор интегрирования, преобразование Гильберта и преобразование Абеля. В дальнейшем будем полагать, что $\beta > 0$. В этом случае задача обращения оператора K становится некорректно поставленной.

Вейвлет-базисы образуются с помощью сдвигов и сжатий (растяжений) специальной функции $\psi(t)$, которая называется материнской вейвлет-функцией:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k).$$

Семейство $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$. Индекс j называется масштабom, а индекс k — сдвигом. Вейвлет-функцию $\psi(t)$ можно выбрать таким образом, чтобы она удовлетворяла определенным условиям, например имела заданное число непрерывных производных и нулевых моментов (подробнее см. [20]). Далее будем полагать, что все необходимые условия выполнены.

Для линейных однородных операторов существуют такие функции $\xi_{j,k}$, что $\langle Kf, \xi_{j,k} \rangle = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ [2]. Функции $\xi_{j,k}$ называются вейглетами. По своим свойствам они похожи на вейвлеты и также представляют собой сдвиги и сжатия (растяжения) некоторой функции ξ . Пусть

$$\xi_{j,k} = \lambda_{j,k} u_{j,k},$$

где

$$\lambda_{j,k} = \|(K^*)^{-1} \psi_{j,k}\|.$$

Можно показать, что

$$\lambda_{j,k} = 2^{\beta j} \lambda_{0,0}.$$

Последовательность $\{u_{j,k}\}$ не образует ортонормированную систему, однако если выполнены некоторые условия гладкости, то она образует устойчивый базис [21].

Вейвлет-разложение функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ имеет вид:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1)$$

При этом функция f также представляется в виде ряда:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \lambda_{j,k} \langle Kf, u_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (2)$$

Как видно, в (2) коэффициенты разложения выражаются через Kf , а не через f , и задача построения оценки функции f сводится к задаче построения оценок коэффициентов разложения. Эта формула лежит в основе метода обращения K , который называется вейвлет-вейглет-разложением.

Абрамович и Сильверман [3] предложили альтернативный метод, который назвали вейглет-вейвлет-разложением. В этом методе по вейвлет-базису раскладывается функция Kf , а не f :

$$Kf = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (3)$$

Функции $\psi_{j,k}$ не обязаны совпадать с функциями в разложении (1), но для удобства будем обозначать их так же. Пусть $\lambda_{j,k} = \|K^{-1} \psi_{j,k}\|$, тогда $\lambda_{j,k} = 2^{\beta j} \lambda_{0,0}$. При применении к (3) обратного

оператора K^{-1} функция f представляется в виде ряда [3]:

$$f = \sum_{j,k \in Z} \lambda_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle u_{j,k}, \quad (4)$$

где $u_{j,k} = K^{-1} \psi_{j,k} / \lambda_{j,k}$. Функции $u_{j,k}$ не совпадают с функциями в разложении (2), однако по аналогии также называются вейглетами.

Оба метода имеют схожие теоретические свойства и дают близкие по качеству результаты [3]. Выбор метода зависит от конкретных практических целей. Например, если необходимо локализовать особенности функции f , то предпочтительнее использовать (2), а для локального обращения оператора K лучше подходит разложение (4) [3].

3 Пороговая обработка эмпирических коэффициентов

На практике в наблюдениях, как правило, присутствует шум. Рассмотрим следующую модель данных с аддитивным гауссовым шумом:

$$X_i = (Kf)_i + z_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (N = 2^J),$$

где $(Kf)_i$ — чистые значения наблюдаемой функции Kf ; z_i — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Для получения эмпирических коэффициентов вектор значений функции Kf умножается на матрицу дискретного вейвлет- или вейглет-преобразования в зависимости от используемого метода. Для метода вейвлет-вейглет-разложения имеем

$$Y_{j,k}^W = \mu_{j,k}^W + w_{j,k}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k = \overline{0, 2^j - 1}, \quad (5)$$

где $\mu_{j,k}^W \approx 2^{J/2} \langle Kf, u_{j,k} \rangle$, а шумовые коэффициенты $w_{j,k}$ имеют нормальное распределение с нулевым средним и не являются независимыми. Дисперсии $\sigma_{j,k}^2$ коэффициентов $w_{j,k}$ зависят от вида оператора и выбранного вейвлет-базиса, но не зависят от j и k [22].

Модель вейглет-вейвлет-коэффициентов имеет вид:

$$Y_{j,k}^V = \mu_{j,k}^V + v_{j,k}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k = \overline{0, 2^j - 1}, \quad (6)$$

где $\mu_{j,k}^V \approx 2^{J/2} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle$, а шумовые коэффициенты $v_{j,k}$ независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma_V^2 = \sigma^2$.

Далее для сокращения записи будем использовать одинаковое обозначение $Y_{j,k}$ для «зашумленных» коэффициентов в моделях (5) и (6) и $\mu_{j,k}$ для «чистых» коэффициентов в этих моделях.

Распространенным методом подавления шума служит пороговая обработка эмпирических коэффициентов. К коэффициентам применяется пороговая функция, смысл которой заключается в обнулении достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом.

Наиболее популярны два вида пороговой функции: это функция жесткой пороговой обработки

$$\rho_H(y, T) = \begin{cases} y & \text{при } |y| > T; \\ 0 & \text{при } |y| \leq T \end{cases}$$

и функция мягкой пороговой обработки

$$\rho_S(y, T) = \begin{cases} y - T & \text{при } y > T; \\ y + T & \text{при } y < -T; \\ 0 & \text{при } |y| \leq T. \end{cases}$$

Здесь T — некоторое пороговое значение. Жесткая пороговая обработка приводит к оценкам, имеющим большую дисперсию (из-за разрывности пороговой функции), а мягкая пороговая обработка вызывает дополнительное смещение в оценках (поскольку обработке подвергаются все коэффициенты) [23]. Один из способов справиться с недостатками жесткой и мягкой пороговой обработки — использовать предложенную в работе [4] пороговую функцию с двумя пороговыми значениями T_1 и T_2 :

$$\rho_F(y, T_1, T_2) = \begin{cases} y & \text{при } |y| \geq T_2; \\ \text{sgn}(y) \frac{T_2(|y| - T_1)}{T_2 - T_1} & \text{при } T_1 < |y| < T_2; \\ 0 & \text{при } |y| \leq T_1. \end{cases} \quad (7)$$

Для значений y вблизи нижнего порога $\rho_F(y, T_1, T_2)$ ведет себя как $\rho_S(y, T_1)$. Для значений y больше верхнего порога $\rho_F(y, T_1, T_2) = y$. Отметим, что жесткая пороговая обработка при $T_1 = T_2$ и мягкая пороговая обработка при $T_2 = \infty$ являются предельными случаями (7).

4 Оценка среднеквадратичного риска метода пороговой обработки

При обращении линейных однородных операторов пороговые значения, как правило, зависят от масштаба j . Определим среднеквадратичный риск метода пороговой обработки с пороговой функцией $\rho_F(y, T_1, T_2)$ по формуле

$$R_J(T_1, T_2) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{j,k}^2 E \left(\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k} \right)^2, \quad (8)$$

где $T_i = (T_{i,0}, \dots, T_{i,J-1})$, $i = 1, 2$; $\hat{Y}_{j,k} = \rho_F(Y_{j,k}, T_{1,j}, T_{2,j})$. Методы выбора пороговых значений T_j обычно ориентированы на минимизацию риска (8). Заметим, что в выражении (8) присутствуют неизвестные величины $\mu_{j,k}$ и вычислить значение $R_J(T_1, T_2)$ нельзя. Поэтому при вычислении значений T_i используется минимаксный подход [24–26]. В задаче непараметрического оценивания функции f для пороговой функции ρ_F в [4] численно исследуются значения T_1 и T_2 , минимизирующие риск, и показывается, что удается построить более точные границы для минимаксного риска, чем в случае жесткой и мягкой пороговой обработки.

Для оценки качества метода пороговой обработки также можно использовать несмещенную оценку риска (8), полученную по методу Стейна. Пусть $g(Y_{j,k}) = Y_{j,k} - \hat{Y}_{j,k}$. Тогда [14]

$$E(\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k})^2 = \sigma^2 + E g^2(Y_{j,k}) - 2\sigma^2 E g'(Y_{j,k})$$

и, следовательно, величина $\sigma^2 + g^2(Y_{j,k}) - 2\sigma^2 g'(Y_{j,k})$ служит несмещенной оценкой для $E(\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k})^2$. Из вида функции ρ_F следует, что

$$\begin{aligned} g(Y_{j,k}) &= Y_{j,k} \mathbf{1}(|Y_{j,k}| \leq T_{1,j}) + \\ &+ \frac{T_{1,j}(T_{2,j} \operatorname{sgn}(Y_{j,k}) - Y_{j,k})}{T_{2,j} - T_{1,j}} \mathbf{1}(T_{1,j} < |Y_{j,k}| < T_{2,j}); \\ g'(Y_{j,k}) &= \mathbf{1}(|Y_{j,k}| \leq T_{1,j}) - \\ &- \frac{T_{1,j}}{T_{2,j} - T_{1,j}} \mathbf{1}(T_{1,j} < |Y_{j,k}| < T_{2,j}). \end{aligned}$$

Таким образом, несмещенная оценка для $R_J(T_1, T_2)$ имеет вид:

$$\hat{R}_J(T_1, T_2) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{j,k}^2 H(Y_{j,k}, T_{1,j}, T_{2,j}), \quad (9)$$

где

$$H(Y_{j,k}, T_{1,j}, T_{2,j}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } |Y_{j,k}| \geq T_{2,j}; \\ \sigma^2 + \frac{T_{1,j}^2 (T_{2,j} \operatorname{sgn}(Y_{j,k}) - Y_{j,k})^2}{(T_{2,j} - T_{1,j})^2} + \\ + \frac{2\sigma^2 T_{1,j}}{T_{2,j} - T_{1,j}} & \text{при } T_{1,j} < |Y_{j,k}| < T_{2,j}; \\ Y_{j,k}^2 - \sigma^2 & \text{при } |Y_{j,k}| \leq T_{1,j}. \end{cases}$$

Исследования показывают, что пороги, обеспечивающие значение среднеквадратичного риска, близкого к минимальному, разумно выбирать растущими со скоростью порядка $\sqrt{2 \log 2^j}$ [26, 27].

В этом случае, повторяя рассуждения из работ [28–30], можно показать, что при условии принадлежности функции Kf определенному классу Липшица несмещенная оценка риска также сильно состоятельна и асимптотически нормальна.

Теорема 1. Пусть Kf задана на некотором отрезке $[a, b]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > (8\beta + 2)^{-1}$. Пусть $T_{1,j} = c_1 \sigma \sqrt{2 \log 2^j}$ и $T_{2,j} = c_2 \sigma \sqrt{2 \log 2^j}$ ($c_1 < c_2$). Тогда

$$P\left(\frac{\hat{R}_J(T_1, T_2) - R_J(T_1, T_2)}{D_J} < x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{при } J \rightarrow \infty,$$

где $D_J = C_\beta 2^{(2\beta+1/2)J}$; $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Замечание. На практике необходимо знать значение константы C_β . Эта константа зависит от дисперсии шума, вида оператора и выбранного вейвлет-базиса. Ее можно вычислить достаточно точно, пользуясь методикой работы [31].

Теорема 2. Пусть Kf задана на отрезке $[a, b]$, $f \in L^2([a, b])$ и $T_{1,j} = c_1 \sigma \sqrt{2 \log 2^j}$, $T_{2,j} = c_2 \sigma \sqrt{2 \log 2^j}$ ($c_1 < c_2$). Тогда при любом $\theta > 1/2 + 2\beta$

$$\frac{\hat{R}_J(T_1, T_2) - R_J(T_1, T_2)}{2^{\theta J}} \rightarrow 0 \text{ п. в. при } J \rightarrow \infty.$$

Эти утверждения служат основанием для использования величины (9) как критерия качества при практической обработке сигналов, поскольку для ее вычисления используются только наблюдаемые данные.

5 Минимизация оценки риска

Другой подход к выбору пороговых значений T_1 и T_2 основан на минимизации оценки риска. Значения $T_{1,j}^*$ и $T_{2,j}^*$ выбираются для каждого фиксированного j так, чтобы векторы значений $T_1^* = (T_{1,0}^*, \dots, T_{1,J-1}^*)$ и $T_2^* = (T_{2,0}^*, \dots, T_{2,J-1}^*)$ минимизировали оценку (9), т. е. выбираются такие T_1^* и T_2^* , что

$$\hat{R}_J(T_1^*, T_2^*) = \min_{T_1, T_2} \hat{R}_J(T_1, T_2).$$

Для поиска этих значений можно использовать следующий алгоритм.

При каждом фиксированном j упорядочим эмпирические коэффициенты $Y_{j,k}$ по убыванию абсолютных значений и обозначим через $Y_{(i)}$ i -ю координату полученного упорядоченного вектора (без

ограничения общности можно полагать, что среди этих значений нет совпадающих). Пусть l и m ($l \leq m$) — такие индексы, что

$$\left\{ \begin{array}{l} |Y_{(m)}| \leq T_{1,j} < |Y_{(m-1)}|, \\ |Y_{(l)}| < T_{2,j} \leq |Y_{(l-1)}|. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Если $l = m$, то функция $\rho_F(y, T_{1,j}, T_{2,j})$ фактически сводится к функции жесткой пороговой обработки с порогом $T_{2,j}$, поэтому сначала рассмотрим случай $l < m$. Поскольку $\lambda_{j,k}^2$ не зависит от k , при поиске минимума можно не рассматривать этот множитель. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^j} H(Y_{(i)}, T_{1,j}, T_{2,j}) &= \sum_{i=1}^{l-1} H(Y_{(i)}, T_{1,j}, T_{2,j}) + \\ &+ \sum_{i=l}^{m-1} H(Y_{(i)}, T_{1,j}, T_{2,j}) + \sum_{i=m}^{2^j} H(Y_{(i)}, T_{1,j}, T_{2,j}) = \\ &= \sum_{i=1}^{l-1} \sigma^2 + \sum_{i=l}^{m-1} \left(\sigma^2 + \frac{T_{1,j}^2 (T_{2,j} \operatorname{sgn}(Y_{(i)}) - Y_{(i)})^2}{(T_{2,j} - T_{1,j})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sigma^2 T_{1,j}}{T_{2,j} - T_{1,j}} \right) + \sum_{i=m}^{N-1} (Y_{(i)}^2 - \sigma^2) = \\ &= \sum_{i=l}^{m-1} \left(\frac{T_{1,j}^2 (T_{2,j} - |Y_{(i)}|)^2}{(T_{2,j} - T_{1,j})^2} + \frac{2\sigma^2 T_{1,j}}{T_{2,j} - T_{1,j}} \right) + \\ &\quad + \sum_{i=m}^{N-1} Y_{(i)}^2 + (2m - 1 - N)\sigma^2. \quad (11) \end{aligned}$$

При ограничениях (10) для любого значения $T_{2,j}$ слагаемые в первой сумме могут достигать минимального значения только при $T_{1,j} = |Y_{(m)}|$. Далее для всех слагаемых в первой сумме выполнено $T_{1,j} < |Y_{(i)}| < T_{2,j}$. Следовательно, выражение

$$\frac{(T_{2,j} - |Y_{(i)}|)^2}{(T_{2,j} - T_{1,j})^2} = 1 + \frac{2(|Y_{(i)}| - T_{1,j})}{(T_{2,j} - T_{1,j})} + \frac{(T_{1,j} - |Y_{(i)}|)^2}{(T_{2,j} - T_{1,j})^2}$$

убывает по $T_{2,j}$, т. е. минимальное значение слагаемых в первой сумме достигается при $T_{2,j} = |Y_{(l-1)}|$. Если $l = m$, то выражение (11) не содержит первой суммы и при ограничениях (10) не зависит от $T_{1,j}$ и $T_{2,j}$. Следовательно, можно также положить $T_{1,j} = |Y_{(m)}|$ и $T_{2,j} = |Y_{(l-1)}|$. Таким образом, пороги $T_{1,j}^*$ и $T_{2,j}^*$ следует искать, сравнивая значения выражения (11) в точках $T_{1,j} = |Y_{(s)}|$ и $T_{2,j} = |Y_{(t)}|$, $1 \leq t < s \leq 2^j$. Те значения, на которых достигается минимум, принимаются за $T_{1,j}^*$ и $T_{2,j}^*$. Найдя эти значения для каждого j , получаем векторы T_1^* и T_2^* .

Описанный алгоритм обобщает алгоритм поиска порога, минимизирующего оценку риска в случае мягкой пороговой обработки [20].

Литература

1. Johnstone I. M., Silverman B. W. Speed of estimation in positron emission tomography and related inverse problems // Ann. Stat., 1990. Vol. 18. P. 251–280.
2. Donoho D. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // Appl. Comput. Harmon. A., 1995. Vol. 2. No. 2. P. 101–126. doi: 10.1006/acha.1995.1008.
3. Abramovich F., Silverman B. W. Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems // Biometrika, 1998. Vol. 85. No. 1. P. 115–129. doi: 10.1093/biomet/85.1.115.
4. Bruce A. G., Gao H.-Y. WaveShrink with firm shrinkage // Stat. Sinica, 1997. Vol. 7. P. 855–874.
5. Gao H.-Y. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote // J. Comput. Graph. Stat., 1998. Vol. 7. No. 4. P. 469–488. doi: 10.1080/10618600.1998.10474789.
6. Chmelka L., Kozumplik J. Wavelet-based Wiener filter for electrocardiogram signal denoising // Comput. Cardiol., 2005. Vol. 32. P. 771–774. doi: 10.1109/CIC.2005.1588218.
7. Poornachandra S., Kumaravel N., Saravanan T. K., Somaskandan R. WaveShrink using modified hyper-shrinkage function // 27th Annual Conference (International) of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005. P. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
8. Lin Y., Cai J. A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform // Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
9. Huang H.-C., Lee T. C. M. Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising // 17th Conference (International) on Image Processing Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
10. Zhao R.-M., Cui H.-M. Improved threshold denoising method based on wavelet transform // 7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. Art. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.
11. He C., Xing J., Li J., Yang Q., Wang R. A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function // Math. Probl. Eng., 2015. Vol. 2015. Art. 528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
12. Priya K. D., Rao G. S., Rao P. S. Comparative analysis of wavelet thresholding techniques with wavelet-Wiener filter on ECG signal // Procedia Comput. Sci., 2016. Vol. 87. P. 178–183. doi: 10.1016/j.procs.2016.05.145.
13. He H., Tan Y. A novel adaptive wavelet thresholding with identical correlation shrinkage function for ECG noise removal // Chinese J. Electron., 2018. Vol. 27. No. 3. P. 507–513. doi: 10.1049/cje.2018.02.006.

14. *Stein C.* Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // *Ann. Stat.*, 1981. Vol. 9. No. 6. P. 1135–1151. doi: 10.1214/aos/1176345632.
15. *Палионная С. И., Шестаков О. В.* Использование FDR-метода множественной проверки гипотез при обращении линейных однородных операторов // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 44–51. doi: 10.14357/19922264220206. EDN: NBVVTW.
16. *Шестаков О. В.* Несмещенная оценка риска пороговой обработки с двумя пороговыми значениями // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLC.
17. *Шестаков О. В., Степанов Е. П.* Нелинейная регуляризация обращения линейных однородных операторов с помощью метода блочной пороговой обработки // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264230401. EDN: PGKKYE.
18. *Воронцов М. О., Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 69–79. doi: 10.14357/19922264240309. EDN: ZOQVTO.
19. *Шестаков О. В.* Решение обратных статистических задач с помощью методов пороговой обработки, допускающих построение несмещенной оценки среднеквадратичного риска // *Информатика и её применения*, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 74–81. doi: 10.14357/19922264250110. EDN: ZSIBDL.
20. *Mallat S.* A wavelet tour of signal processing. — New York, NY, USA: Academic Press, 1999. 857 p.
21. *Lee N.* Wavelet-vaguelette decompositions and homogeneous equations: PhD Thesis. — West Lafayette, IN, USA: Purdue University, 1997. 93 p.
22. *Johnstone I. M.* Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems adaptivity results // *Stat. Sinica*, 1999. Vol. 9. P. 51–83.
23. *Bruce A. G., Gao H.-Y.* Understanding WaveShrink: Variance and bias estimation // *Biometrika*, 1996. Vol. 83. P. 727–745. doi: 10.1093/biomet/83.4.727.
24. *Donoho D., Johnstone I. M.* Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage // *Biometrika*, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
25. *Donoho D., Johnstone I. M.* Minimax estimation via wavelet shrinkage // *Ann. Stat.*, 1998. Vol. 26. No. 3. P. 879–921. doi: 10.1214/aos/1024691081.
26. *Jansen M.* Noise reduction by wavelet thresholding. — Lecture notes in statistics ser. — Springer, 2001. Vol. 161. 196 p.
27. *Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P.* Exact risk analysis of wavelet regression // *J. Comput. Graph. Stat.*, 1998. Vol. 7. P. 278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
28. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность оценки риска при вейвлет-вейглет-разложении функции сигнала в модели с коррелированным шумом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. матем. и киберн.*, 2014. № 3. С. 23–30. EDN: QPRMZD.
29. *Ерошенко А. А., Кудрявцев А. А., Шестаков О. В.* Предельное распределение оценки риска метода вейглет-вейвлет-разложения сигнала в модели с коррелированным шумом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. матем. и киберн.*, 2015. № 1. С. 12–18.
30. *Шестаков О. В.* Сильная состоятельность оценки среднеквадратичной погрешности при решении обратных статистических задач // *Информатика и её применения*, 2017. Т. 11. Вып. 2. С. 117–121. doi: 10.14357/19922264170213. EDN: YTYGBP.
31. *Ерошенко А. А.* Статистические свойства оценок сигналов и изображений при пороговой обработке коэффициентов в вейвлет-разложениях: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2015. 82 с.

Поступила в редакцию 14.03.2025

Принята к публикации 15.05.2025

UNBIASED RISK ESTIMATE FOR THE FIRM SHRINKAGE METHOD OF SOLVING LINEAR INVERSE PROBLEMS

O. V. Shestakov^{1,2,3}

¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

²Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

³Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: Inverse statistical problems arise in such areas as astronomy, plasma physics, computational tomography, etc. In this case, the observed data usually contain noise and, therefore, it is necessary to apply noise suppression methods. In situations where the problem is related to the inversion of a linear homogeneous operator, noise suppression methods based on the wavelet transform and thresholding procedures have proven themselves to be effective. These methods are computationally efficient and adapt well to local features of signals. The most common types of thresholding are hard and soft thresholding. However, hard thresholding produces estimates with a large variance, while soft thresholding introduces additional bias. In an attempt to get rid of these drawbacks, various alternative types of thresholding have been proposed in recent years. This paper considers a thresholding procedure with two thresholds, which behaves like soft thresholding for small values of wavelet coefficients and like hard thresholding for large values. For this type of thresholding, an unbiased estimate of the mean-square risk is constructed and its statistical properties are analyzed. An algorithm for calculating the threshold that minimizes this estimate is also described.

Keywords: wavelets; threshold processing; linear homogeneous operator; unbiased risk estimate

DOI: 10.14357/19922264250202

EDN: XILHGE

References

1. Johnstone, I. M., and B. W. Silverman. 1990. Speed of estimation in positron emission tomography and related inverse problems. *Ann. Stat.* 18(1):251–280.
2. Donoho, D. 1995. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Appl. Comput. Harmon. A.* 2(2):101–126. doi: 10.1006/acha.1995.1008.
3. Abramovich, F., and B. W. Silverman. 1998. Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems. *Biometrika* 85(1):115–129. doi: 10.1093/biomet/85.1.115.
4. Bruce, A. G., and H.-Y. Gao. 1997. WaveShrink with firm shrinkage. *Stat. Sinica* 7:855–874.
5. Gao, H.-Y. 1998. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(4):469–488. doi: 10.1080/10618600.1998.10474789.
6. Chmelka, L., and J. Kozumplik. 2005. Wavelet-based Wiener filter for electrocardiogram signal denoising. *Comput. Cardiol.* 32:771–774. doi: 10.1109/CIC.2005.1588218.
7. Poornachandra, S., N. Kumaravel, T. K. Saravanan, and R. Somaskandan. 2005. WaveShrink using modified hyper-shrinkage function. *27th Annual Conference (International) of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
8. Lin, Y., and J. Cai. 2010. A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform. *Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
9. Huang, H.-C., and T. C. M. Lee. 2010. Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising. *17th Conference (International) on Image Processing Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
10. Zhao, R.-M., and H.-M. Cui. 2015. Improved threshold denoising method based on wavelet transform. *7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.
11. He, C., J. Xing, J. Li, Q. Yang, and R. Wang. 2015. A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function. *Math. Probl. Eng.* 2015:528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
12. Priya, K. D., G. S. Rao, and P. S. Rao. 2016. Comparative analysis of wavelet thresholding techniques with wavelet-Wiener filter on ECG signal. *Procedia Comput. Sci.* 87:178–183. doi: 10.1016/j.procs.2016.05.145.
13. He, H., and Y. Tan. 2018. A novel adaptive wavelet thresholding with identical correlation shrinkage function for ECG noise removal. *Chinese J. Electron.* 27(3):507–513. doi: 10.1049/cje.2018.02.006.
14. Stein, C. 1981. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Stat.* 9(6):1135–1151. doi: 10.1214/aos/1176345632.

15. Palionnaya, S. I., and O. V. Shestakov. 2022. Ispol'zovanie FDR-metoda mnozhestvennoy proverki gipotez pri obrashchenii lineynykh odnorodnykh operatorov [The use of the FDR method of multiple hypothesis testing when inverting linear homogeneous operators]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):44–51. doi: 10.14357/19922264220206. EDN: NBVVTW.
16. Shestakov, O. V. 2022. Nesmeshchennaya otsenka riska porogovoy obrabotki s dvumya porogovymi znacheniyami [Unbiased thresholding risk estimate with two threshold values]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLG.
17. Shestakov, O. V., and E. P. Stepanov. 2023. Nelineynaya regularizatsiya obrashcheniya lineynykh odnorodnykh operatorov s pomoshch'yu metoda blochnoy porogovoy obrabotki [Nonlinear regularization of the inversion of linear homogeneous operators using the block thresholding method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):2–8. doi: 10.14357/19922264230401. EDN: PGKKE.
18. Vorontsov, M. O., and O. V. Shestakov. 2024. Asimptoticheskaya normal'nost' i sil'naya sostoyatel'nost' otsenki riska pri ispol'zovanii FDR-poroga v usloviyakh slaboy zavisimosti [Asymptotic normality and strong consistency of risk estimate when using the FDR threshold under weak dependence condition]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):69–79. doi: 10.14357/19922264240309. EDN: ZOQVTO.
19. Shestakov, O. V. 2025. Reshenie obratnykh statisticheskikh zadach s pomoshch'yu metodov porogovoy obrabotki, dopuskayushchikh postroyeniye nesmeshchennoy otsenki srednekvadrachnogo riska [Solving inverse statistical problems using threshold processing methods that allow the construction of an unbiased estimate of the mean-square risk]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):74–81. doi: 10.14357/19922264250110. EDN: ZSIBDL.
20. Mallat, S. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. New York, NY: Academic Press. 857 p.
21. Lee, N. 1997. Wavelet-vaguelette decompositions and homogeneous equations. West Lafayette, IN: Purdue University. PhD Thesis. 93 p.
22. Johnstone, I. M. 1999. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems adaptivity results. *Stat. Sinica* 9:51–83.
23. Bruce, A. G., and Gao H.-Y. 1996. Understanding WaveShrink: Variance and bias estimation. *Biometrika* 83(4):727–745. doi: 10.1093/biomet/83.4.727.
24. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1994. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika* 81(3):425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
25. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1998. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Ann. Stat.* 26(3):879–921. doi: 10.1214/aos/1024691081.
26. Jansen, M. 2001. *Noise reduction by wavelet thresholding*. Lecture notes in statistics ser. New York, NY: Springer. Vol. 161. 196 p.
27. Marron, J. S., S. Adak, I. M. Johnstone, M. H. Neumann, and P. Patil. 1998. Exact risk analysis of wavelet regression. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(3):278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
28. Eroshenko, A. A., and O. V. Shestakov. 2014. Asymptotic normality of estimating risk upon the wavelet-vaguelette decomposition of a signal function in a model with correlated noise. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 38(3):110–117. doi: 10.3103/S0278641914030042. EDN: UEUPKZ.
29. Eroshenko, A. A., A. A. Kudryavtsev, and O. V. Shestakov. 2015. Limit distribution of a risk estimate using the vaguelette-wavelet decomposition of signals in a model with correlated noise. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 39(1):6–13. doi: 10.3103/S0278641915010021. EDN: UFLCXN.
30. Shestakov, O. V. 2017. Sil'naya sostoyatel'nost' otsenki srednekvadrachnoy pogreshnosti pri reshenii obratnykh statisticheskikh zadach [Strong consistency of the mean square risk estimate in the inverse statistical problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(2):117–121. doi: 10.14357/19922264170213. EDN: YTYGBP.
31. Eroshenko, A. A. 2015. Statisticheskie svoystva otsenok signalov i izobrazheniy pri porogovoy obrabotke koefitsientov v veyvlet-razlozheniyakh [Statistical properties of signal and image estimates under thresholding of coefficients in wavelet decompositions]. Moscow: MSU. PhD Diss. 82 p.

Received March 14, 2025

Accepted May 15, 2025

Contributor

Shestakov Oleg V. (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.ru

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ВАРИАНТ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ПО МЕТОДУ ЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОНАБЛЮДЕНИЙ*

А. В. Босов¹, И. В. Урюпин²

Аннотация: Предложена модификация метода линейных псевдонаблюдений для расширенного фильтра Калмана (РФК), предназначенного для применения в типовой модели дискретной стохастической системы наблюдения. Модифицированный фильтр позволяет использовать как угловые измерения положения движущегося объекта, так и измерения дальности. Для формирования линейных псевдонаблюдений выполняется линеаризация тригонометрических функций угловых измерений и аппроксимация (минимаксная или интегральная) ошибок измерений и погрешностей линеаризации. В круг прикладных задач, решаемых модифицированным фильтром, входят типовые задачи навигации, в частности решаемые для автономных летательных и подводных аппаратов. Экспериментальные расчеты выполнены для модельного примера, описывающего движение автономного летательного аппарата (ЛА), наблюдаемого стационарным радиолокационным комплексом.

Ключевые слова: дискретная стохастическая система наблюдения; линейные псевдонаблюдения; расширенный фильтр Калмана; слежение; радиолокационные наблюдения

DOI: 10.14357/19922264250203

EDN: ZOVFSQ

1 Введение

Алгоритмы фильтрации состояний в моделях стохастических систем позволяют решать разнообразные прикладные задачи, в числе которых существенное место занимает управление движущимися объектами [1]. Методы оптимальной стохастической фильтрации изучены очень хорошо [2], но их практическое применение минимально из-за технической сложности реализации. Единственное исключение — это классический фильтр Калмана [3], имеющий огромное значение в стохастической фильтрации. Но его применение ограничено линейно-гауссовскими моделями. Среди множества эвристических подходов, позволяющих получать неоптимальные, но практически реализуемые оценки в нелинейных задачах, так называемых субоптимальных фильтров, значительная часть инспирирована идеями повторить калмановскую структуру оценки, а самым известным среди таких методов считается РФК [4]. Простая идея аппроксимировать ковариационные матрицы ошибки прогнозирования и оценивания путем линеаризации модели состояния и наблюдения около прогноза в силу системы дает — по-видимому, самый простой и действенный способ реализовать оценку калмановской структуры для нелинейной модели. Но и цена этой простоты может оказаться высокой. В любых работах по совершенствованию

РФК упоминается, что фильтр может расходиться, но систематических исследований этого явления немного. Так, в [5] рассматриваются отдельные примеры в конкретной прикладной области, значительная теоретическая работа, выполненная в [6] применительно к байесовской идентификации параметров с помощью РФК, практического развития не получила. Но сталкиваясь с неприемлемым поведением РФК исследователи продолжают [7]. Впрочем, проблема расходимости субоптимальных фильтров носит системный характер [8] и, вероятно, будет актуальной еще долгое время, хотя методы для ее преодоления известны [9].

Однако идея следовать структуре классического линейного фильтра Калмана не теряет привлекательности, поэтому естественным представляется подойти к воспроизводству этой структуры иначе: не со стороны фильтра, а со стороны системы наблюдения. Основанная на этой идее универсальная методика синтеза фильтров калмановской структуры в моделях дискретных стохастических динамических систем известна как метод линейных псевдоизмерений. Концептуально речь идет о следующем: преобразовать или аппроксимировать модель наблюдений так, чтобы уравнения, описывающие измененные наблюдения, были линейными. В такой замене системы наблюдения и состоит идея линейных псевдонаблюдений. По-видимому, впервые такая возможность была продемонстрирована для

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ABosov@frccsc.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, uryupin93@yandex.ru

угловых измерений в работе [10], хотя сами модели систем слежения по результатам пеленга начали привлекать внимание еще раньше [11]. Заслуженного внимания эта идея первоначально не получила. Возможно, по той причине, что реальный эффект от нее можно оценить только в результате разнообразных и масштабных вычислительных экспериментов, реальных моделей, практических приложений. С этим в те годы, естественно, были проблемы. Так, компьютерное моделирование в [10] было выполнено для модели движения в плоскости с одним скалярным наблюдением и повторено 30 раз.

На более современном уровне эта идея была представлена в работе [12], хотя, по сути, авторы принципиальных изменений не внесли: движение осталось плоским, для преобразования скалярного измерения угла использовался тангенс. Новое качество фильтру псевдонаблюдений придала серия работ, начатая в [13]. Авторы предложили заменить измерения угла на измерения его тангенса, благодаря чему линейные псевдонаблюдения состоялись непосредственно в модели наблюдателя, измеряющего два угла (азимут и угол возвышения) и дальность. В других работах эта идея применялась к серии модельных задач, описывающих движение как летательных, так и подводных аппаратов (см., например, [14–17]).

Модификация фильтра линейных псевдоизмерений, предложенная в данной работе, исходит из модели типовых измерений угловых координат. Усовершенствована аппроксимация ошибок измерений: дисперсия возмущения, сформированного в результате линейной аппроксимации косинусов и синусов, оценивается двумя способами. Первый — на основе минимаксного свойства гауссовского распределения; второй — интегральный, состоящий в замене неизвестной условной дисперсии ее средним безусловным значением. Формирование линейных псевдонаблюдений описано в разд. 2, а модель системы наблюдения и фильтра — в разд. 3.

Проверка работоспособности предложенного метода и сравнение робастного и интегрального вариантов выполнены для модели простого движения ЛА с постоянной средней скоростью и хаотическими маневрами. Измерительный комплекс моделирует радиолокационную станцию (РЛС), измеряющую угловые координаты цели (азимут и угол возвышения) и дальность. Расчету посвящен разд. 4.

2 Линейные псевдонаблюдения

Всюду далее обозначается $E\{X\}$ — математическое ожидание случайного вектора (случайной

величины) X , а $D\{X\}$ — ковариационная матрица (дисперсия). Пусть ЛА ($\mathcal{A}$ — aircraft) имеет координаты $(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}}, Z_{\mathcal{A}})$ в системе координат $Oxyz$, так что плоскость Oxy совпадает с поверхностью земли, а ось Oz направлена вверх и соответствует высоте. Измеритель ($\mathcal{M}$ — meter) имеет координаты $(X_{\mathcal{M}}, Y_{\mathcal{M}}, Z_{\mathcal{M}})$.

Азимут φ (и далее угол возвышения λ) измеряется в радианах. Если с большим запасом предполагать, что ошибка измерения азимута может достигать 1° , то величину $\sigma_\varphi = D\{\varphi\}$ можно считать равной $\sigma_\varphi = \pi/180 \approx 0,0175$. Реально это значение, конечно, меньше. Таким образом, ошибка измерения азимута $v_\varphi \ll 1$. Из измерения $y_\varphi = \varphi + v_\varphi$ угла φ с аддитивной ошибкой v_φ сформируем синус и косинус, ограничившись линейной частью разложения Тейлора для малых v_φ :

$$\begin{aligned} y_\varphi^{\sin} &= \sin(y_\varphi) = \sin(\varphi + v_\varphi) \approx \sin(\varphi) + \cos(\varphi)v_\varphi; \\ y_\varphi^{\cos} &= \cos(y_\varphi) = \cos(\varphi + v_\varphi) \approx \cos(\varphi) - \sin(\varphi)v_\varphi. \end{aligned}$$

Далее исходим из предположения, что распределение v_φ неизвестно и заданы только моменты $E\{v_\varphi\} = 0$ и $D\{v_\varphi\} = \sigma_\varphi^2$, φ и v_φ независимы. Тогда

$$E\{(\cos(\varphi)v_\varphi)^2\} \leq \sigma_\varphi^2; \quad E\{(\sin(\varphi)v_\varphi)^2\} \leq \sigma_\varphi^2,$$

а кроме того,

$$E\{\cos(\varphi)v_\varphi \sin(\varphi)v_\varphi\} = \frac{1}{2}\sigma_\varphi^2 E\{\sin 2\varphi\} = 0,$$

если φ имеет симметричное относительно нуля распределение. С учетом физического смысла φ последнее предположение представляется вполне реалистичным. Остается сослаться на известное минимаксное свойство нормального распределения, максимизирующего дисперсию ошибки оценки на классе распределений с известным математическим ожиданием и ограниченной дисперсией [18], и сформировать наблюдения вида

$$y_\varphi^{\sin} \approx \sin(\varphi) + v_1; \quad y_\varphi^{\cos} \approx \cos(\varphi) + v_2,$$

где v_1 и v_2 — независимые гауссовские случайные величины, $E\{v_1\} = E\{v_2\} = 0$ и $D\{v_1\} = D\{v_2\} = \sigma_\varphi^2$. Этот вариант аппроксимации угловых измерений выше назван минимаксным. Надо понимать, что это определение носит только описательный характер и никаких гарантированных свойств аппроксимация не имеет.

Рассуждая далее, надо сказать, что предложенная аппроксимация довольно грубая, но не из-за использования нормального распределения, а из-за оценок $E\{\cos^2(\varphi)\} \leq 1$ и $E\{\sin^2(\varphi)\} \leq 1$. Другой вариант формирования псевдонаблюдений вместо безусловной верхней границы ориентирован на

оценку средних значений $\cos^2(\varphi)$ и $\sin^2(\varphi)$. Эти величины неизвестны, так как неизвестно распределение φ . Если предполагать, что φ может принимать любые значения с одинаковой вероятностью, т. е. имеет близкое к равномерному распределение, то можно считать, что

$$E\{(\cos(\varphi)v_\varphi)^2\} = E\{(\sin(\varphi)v_\varphi)^2\} = \frac{1}{4}\sigma_\varphi^2$$

и

$$D\{v_1\} = D\{v_2\} = \frac{1}{4}\sigma_\varphi^2.$$

Этот второй вариант аппроксимации угловых измерений назван интегральным. Сравнение двух предложенных вариантов — экспериментальная задача, пример приведен в разд. 4 статьи.

Продолжая выкладки с измерением азимута, запишем далее:

$$\sin(\varphi) \approx y_\varphi^{\sin} - v_1; \quad \cos(\varphi) \approx y_\varphi^{\cos} - v_2;$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Y_A - Y_M}{X_A - X_M} \approx \frac{y_\varphi^{\sin} - v_1}{y_\varphi^{\cos} - v_2};$$

$$(Y_A - Y_M)y_\varphi^{\cos} - (X_A - X_M)y_\varphi^{\sin} \approx (Y_A - Y_M)v_2 - (X_A - X_M)v_1.$$

Так будет выглядеть невязка псевдонаблюдений (когда вместо точных координат (X_A, Y_A) будут подставлены их оценки), а сами псевдонаблюдения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} -Y_M y_\varphi^{\cos} + X_M y_\varphi^{\sin} &\approx (y_\varphi^{\sin}, -y_\varphi^{\cos}) \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix} + \\ &+ (Y_A - Y_M)v_2 - (X_A - X_M)v_1, \end{aligned}$$

который объясняет смысл выполненных преобразований — псевдонаблюдения дают измерения линейной комбинации оцениваемых координат на фоне аддитивного шума. Шум при этом коррелирован, и его ковариация известна.

Итак, для измерения $y_\varphi = \varphi + v_\varphi$ азимута φ формируется псевдонаблюдение

$$\begin{aligned} Y_\varphi &= -Y_M y_\varphi^{\cos} + X_M y_\varphi^{\sin}, \\ y_\varphi^{\sin} &= \sin(y_\varphi), \quad y_\varphi^{\cos} = \cos(y_\varphi), \end{aligned}$$

и алгоритм субоптимальной фильтрации предполагает, что

$$\begin{aligned} Y_\varphi &= (y_\varphi^{\sin}, -y_\varphi^{\cos}) \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix} + \\ &+ (X_M - X_A, Y_A - Y_M) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (1) \end{aligned}$$

Следующее измерение — для угла возвышения λ вида $y_\lambda = \lambda + v_\lambda$. Аналогично азимуту аппроксимируем синус и косинус, исходя из таких же предположений об ошибке измерения v_λ :

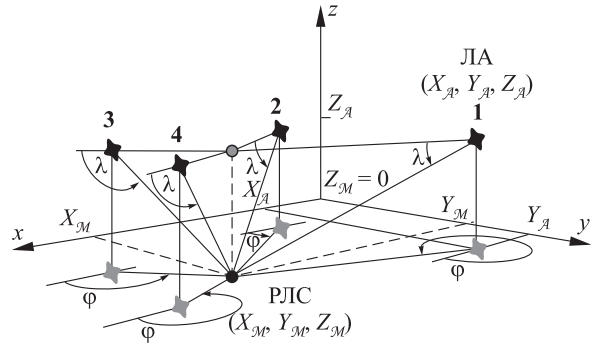


Рис. 1 Определение угловых координат в зависимости от взаимного расположения ЛА и РЛС: φ — азимут цели; λ — угол возвышения

$$\begin{aligned} y_\lambda^{\sin} &= \sin(y_\lambda) \approx \sin(\lambda) + \cos(\lambda)v_\lambda \approx \sin(\lambda) + v_3; \\ y_\lambda^{\cos} &= \cos(y_\lambda) \approx \cos(\lambda) - \sin(\lambda)v_\lambda \approx \cos(\lambda) + v_4 \end{aligned}$$

с независимыми гауссовскими v_3 и v_4 , $E\{v_3\} = E\{v_4\} = 0$ и $D\{v_3\} = D\{v_4\} = \sigma_\lambda^2$ (минимаксный вариант) или $D\{v_3\} = D\{v_4\} = (1/4)\sigma_\varphi^2$ (интегральный вариант). Отсюда

$$\begin{aligned} \sin(\lambda) &\approx y_\lambda^{\sin} - v_3, \quad \cos(\lambda) \approx y_\lambda^{\cos} - v_4, \\ \tan(\lambda) &= \frac{Z_A - Z_M}{|X_A - X_M|} \cos(\varphi) \approx \frac{y_\lambda^{\sin} - v_3}{y_\lambda^{\cos} - v_4}. \end{aligned}$$

Чтобы упростить манипуляции с измерением λ , будем предполагать, что взаимное расположение ЛА и измерителя учтено при выборе системы координат и $X_A > X_M$ (рис. 1). Заменим, как выше для азимута, $\cos(\varphi)$ на $y_\varphi^{\cos} - v_2$ и выполним аналогичные преобразования:

$$\begin{aligned} (Z_A - Z_M)(y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} - y_\lambda^{\cos} v_2 - y_\varphi^{\cos} v_4 + v_2 v_4) &\approx \\ &\approx (y_\lambda^{\sin} - v_3)(X_A - X_M); \\ y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} (Z_A - Z_M) - y_\lambda^{\sin} (X_A - X_M) &\approx \\ &\approx (Z_A - Z_M) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_A - X_M) v_3 + \\ &+ (Z_A - Z_M) y_\varphi^{\cos} v_4 - (Z_A - Z_M) v_2 v_4. \quad (2) \end{aligned}$$

Выражение (2) нужно, чтобы сформировать невязку для псевдонаблюдений, аппроксимировав ошибку в правой части. Поскольку все v_i предполагались независимыми и центрированными, то дисперсия этой ошибки

$$\begin{aligned} D\{(Z_A - Z_M) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_A - X_M) v_3 + \\ + (Z_A - Z_M) y_\varphi^{\cos} v_4 - (Z_A - Z_M) v_2 v_4\} = \\ = (Z_A - Z_M)^2 E\{(y_\lambda^{\cos})^2\} \sigma_\varphi^2 + (X_A - X_M)^2 \sigma_\lambda^2 + \\ + (Z_A - Z_M)^2 E\{(y_\varphi^{\cos})^2\} \sigma_\lambda^2 + (Z_A - Z_M)^2 \sigma_\varphi^2 \sigma_\lambda^2. \end{aligned}$$

Апеллируя к тем же положениям о малых значениях v_i и σ_φ , σ_λ , пренебрежем последним слагаемым и представим невязку псевдонаблюдений (когда вместо точных координат (X_A, Y_A, Z_A) будут подставлены их оценки) как

$$\begin{aligned} y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} (Z_A - Z_M) - y_\lambda^{\sin} (X_A - X_M) &\approx \\ &\approx (Z_A - Z_M) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_A - X_M) v_3 + \\ &\quad + (Z_A - Z_M) y_\varphi^{\cos} v_4, \end{aligned}$$

а сами псевдонаблюдения запишем в виде

$$\begin{aligned} -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_M + y_\lambda^{\sin} X_M &\approx -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_A + y_\lambda^{\sin} X_A + \\ &\quad + (Z_A - Z_M) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_A - X_M) v_3 + \\ &\quad + (Z_A - Z_M) y_\varphi^{\cos} v_4. \end{aligned}$$

Итак, для измерения $y_\lambda = \lambda + v_\lambda$ угла возвышения λ формируется псевдонаблюдение

$$\begin{aligned} Y_\lambda &= -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_M + y_\lambda^{\sin} X_M, \quad y_\lambda^{\sin} = \sin(y_\lambda), \\ y_\lambda^{\cos} &= \cos(y_\lambda), \quad y_\varphi^{\cos} = \cos(y_\varphi), \end{aligned}$$

и алгоритм субоптимальной фильтрации предполагает, что

$$\begin{aligned} Y_\lambda &= (y_\lambda^{\sin}, -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos}) \begin{pmatrix} X_A \\ Z_A \end{pmatrix} + \\ &+ ((Z_A - Z_M) y_\lambda^{\cos}, X_M - X_A, (Z_A - Z_M) y_\varphi^{\cos}) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}. \quad (3) \end{aligned}$$

Последним рассмотрим измерение дальности r вида $y_r = r + v_5$ с независимой от предыдущих v_i гауссовской ошибкой v_5 , $E\{v_5\} = 0$, $D\{v_5\} = \sigma_r^2$. Используя измерение угла возвышения λ и аппроксимацию $\sin(\lambda) \approx y_\lambda^{\sin} - v_3$, запишем

$$r = \frac{Z_A - Z_M}{\sin(\lambda)} \Rightarrow y_r - v_5 \approx \frac{Z_A - Z_M}{y_\lambda^{\sin} - v_3}.$$

Поступая аналогично преобразованиям углов, получаем

$$Z_A - Z_M - y_r y_\lambda^{\sin} \approx -y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5 + v_3 v_5.$$

Имеющийся справа шум — центрированный, его дисперсия

$$\begin{aligned} D\{-y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5 + v_3 v_5\} &= \\ &= E\{y_r^2\} \sigma_\lambda^2 + E\{(y_\lambda^{\sin})^2\} \sigma_r^2 + \sigma_\lambda^2 \sigma_r^2. \end{aligned}$$

Третьим слагаемым в сравнении с первыми двумя можно пренебречь, как делалось выше, и представить невязку псевдонаблюдений (когда вместо

точной координаты Z_A будет подставлена ее оценка) как

$$Z_A - Z_M - y_r y_\lambda^{\sin} \approx -y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5.$$

Сами псевдонаблюдения запишем в виде

$$Z_M + y_r y_\lambda^{\sin} \approx Z_A + y_r v_3 + y_\lambda^{\sin} v_5.$$

Итак, для измерения дальности $y_r = d + v_5$ формируется псевдонаблюдение

$$Y_r = Z_M + y_r y_\lambda^{\sin}, \quad y_\lambda^{\sin} = \sin(y_\lambda),$$

и алгоритм субоптимальной фильтрации предполагает, что

$$Y_r = Z_A + (y_r, y_\lambda^{\sin}) \begin{pmatrix} v_3 \\ v_5 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Теперь можно объединить все три измерения (1), (3), (4) в один вектор псевдонаблюдений $Y = (Y_\varphi, Y_\lambda, Y_r)'$:

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} y_\varphi^{\sin} & -y_\varphi^{\cos} & 0 \\ y_\lambda^{\sin} & 0 & -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \\ &+ \begin{pmatrix} X_M - X_A & Y_A - Y_M & 0 \\ 0 & (Z_A - Z_M) y_\lambda^{\cos} & X_M - X_A \\ 0 & 0 & y_r \end{pmatrix} V, \quad (5) \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (Z_A - Z_M) y_\varphi^{\cos} & 0 \\ 0 & y_\lambda^{\sin} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где $X = (X_A, Y_A, Z_A)'$; $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)'$.

Итак, предполагаем, что в каждый момент времени выполнения измерений наблюдателем формируется вектор $y = (y_\varphi, y_\lambda, y_r)'$, т.е. измеряются азимут, угол возвышения и дальность до цели. Алгоритм оценивания вместо этого вектора получает вектор $Y = (Y_\varphi, Y_\lambda, Y_r)'$ и исходит из модели наблюдений (5).

3 Расширенный фильтр Калмана для линейных псевдонаблюдений

Применяется метод линейных псевдонаблюдений для оценивания состояния $X_t \in \mathbb{R}^{p \times}$ дискретной стохастической системы по наблюдениям $y_t \in \mathbb{R}^{q \times}$ вида

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_t^{(1)}(X_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(X_{t-1})W_t, \\ &\quad t = 1, 2, \dots, \quad X_0 = \eta; \\ y_t &= \psi_t^{(1)}(X_t) + \psi_t^{(2)}(X_t)v_t. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее всюду будет предполагаться, что случайные последовательности X_t и y_t имеют конечные ковариации (их наличие обеспечивается, например, линейными ограничениями на скорость роста функций $\Phi_t^{(1)}$, $\Phi_t^{(2)}$, $\psi_t^{(1)}$ и $\psi_t^{(2)}$); возмущения $W_t \in \mathbb{R}^{p_w}$ и ошибки измерений $v_t \in \mathbb{R}^{q_v}$ — независимые дискретные белые шумы второго порядка; вектор начальных условий $\eta \in \mathbb{R}^{p_x}$ не зависит от W_t и v_t и имеет конечную ковариацию. Соответствующие моменты обозначаются $E\{W_t\} = m_W(t)$ и $D\{W_t\} = D_W(t)$.

Для фильтрации в системе (6) истинные наблюдения y_t заменяются на псевдонаблюдения $Y_t \in \mathbb{R}^{q_Y}$ (в рассмотренных примерах для одного измерения формируется ровно одно псевдонаблюдение, поэтому $q_Y = q_y$, но в общем случае размерности могут и отличаться):

$$Y_t = \Psi_t^{(1)}(X_t, y_t) + \Psi_t^{(2)}(X_t, y_t)V_t$$

и применяется РФК [4]. В используемых обозначениях он может быть записан в виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_t &= \Phi_t^{(1)}(\hat{X}_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(\hat{X}_{t-1})m_W(t); \\ \tilde{K}_t &= \tilde{\Phi}_t^{(1)}\hat{K}_{t-1}(\tilde{\Phi}_t^{(1)})' + \tilde{\Phi}_t^{(2)}D_W(t)(\tilde{\Phi}_t^{(2)})', \\ \tilde{\Phi}_t^{(1)} &= \frac{\partial \Phi_t^{(1)}(X)}{\partial X} \Big|_{X=\tilde{X}_t}, \quad \tilde{\Phi}_t^{(2)} = \Phi_t^{(2)}(\tilde{X}_t); \\ \hat{X}_t &= \tilde{X}_t + K_t(Y_t - \Psi_t^{(1)}(\tilde{X}_t, y_t) - \\ &\quad - \Psi_t^{(2)}(\tilde{X}_t, y_t)m_V(t)); \\ K_t &= \tilde{K}_t(\tilde{\Psi}_t^{(1)})'(\tilde{\Psi}_t^{(1)}\tilde{K}_t(\tilde{\Psi}_t^{(1)})' + \\ &\quad + \tilde{\Psi}_t^{(2)}D_V(t)(\tilde{\Psi}_t^{(2)})')^{-1}, \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)} &= \frac{\partial \Psi_t^{(1)}(X, y_t)}{\partial X} \Big|_{X=\tilde{X}_t}, \\ \tilde{\Psi}_t^{(2)} &= \Psi_t^{(2)}(\tilde{X}_t, y_t); \\ \hat{K}_t &= \tilde{K}_t - K_t\tilde{\Psi}_t^{(1)}\tilde{K}_t. \end{aligned} \right\} (7)$$

Псевдонаблюдения (5) обеспечивают линейность $\Psi_t^{(1)}$ по оцениваемым переменным, $\Psi_t^{(1)}(X_t, y_t) = \Psi_t^{(1)}(y_t)X_t$, так что

$$\frac{\partial \Psi_t^{(1)}(X, y_t)}{\partial X} = \Psi_t^{(1)}(y_t).$$

Именно это свойство и требуется от линейных псевдонаблюдений, поэтому в (7) не нужно считать производную $\partial \Psi_t^{(1)}(X, y_t)/\partial X$. Все остальное — как

в обычном РФК: прогноз $\tilde{X}_t$ в силу системы, эвристическая ковариация ошибки прогноза $\tilde{K}_t$ — результат линеаризации уравнения состояния около прогноза, коррекция — невязка наблюдений и калмановский коэффициент усиления K_t , эвристическая ковариация ошибки оценки $\hat{K}_t$ — результат линеаризации модели наблюдений.

Обычно остается без комментариев тот факт, что, в отличие от оригинальной модели РФК, в методе псевдонаблюдений матрицы $\tilde{\Psi}_t^{(1)}$ и $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ в (7) зависят не только от прогноза $\tilde{X}_t$, но и от реальных наблюдений y_t . Действительно, для псевдонаблюдений $Y_t = (Y_{\varphi_t}, Y_{\lambda_t}, Y_{r_t})'$ согласно (5) имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_t^{(1)}(X_t, y_t) &= \Psi_t^{(1)}(y_t)X_t = \\ &= \begin{pmatrix} \sin(y_{\varphi_t}) - \cos(y_{\varphi_t}) & 0 \\ \sin(y_{\lambda_t}) & 0 & -\cos(y_{\varphi_t})\cos(y_{\lambda_t}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_t; \\ \Psi_t^{(2)}(\tilde{X}_t, y_t) &= \begin{pmatrix} X_M - X(t) & Y(t) - Y_M \\ 0 & (Z(t) - Z_M)\cos(y_{\lambda_t}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_M - X(t) & (Z(t) - Z_M)\cos(y_{\varphi_t}) & 0 \\ y_{r_t} & 0 & \sin(y_{\lambda_t}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $y_t = (y_{\varphi_t}, y_{\lambda_t}, y_{r_t})'$ — текущие измерения; $X_t = (X(t), Y(t), Z(t))'$ — текущие координаты ЛА.

Для линейных псевдонаблюдений, как и должно быть, отсутствует зависимость $\tilde{X}_t$, но вместо этого появляются зависимости $\tilde{\Psi}_t^{(1)}$ и $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ от измерений y_{φ} , y_{λ} и y_r . Ясно, что объяснить это технически несложно: достаточно расширить вектор состояния этими переменными, записать фильтр, а затем исключить добавленные переменные из оцениваемых. Но куда важнее таких рассуждений отметить принципиально иной смысл калмановского коэффициента усиления, точнее матрицы $\hat{K}_t$: в традиционном РФК эта матрица представляется эвристической оценкой минимизируемой ковариации ошибки оценивания $D\{X_t - \hat{X}_t\}$. Если систему (6) сделать линейной, то фильтр (7) станет линейным фильтром Калмана, оптимальной линейной оценкой, а эвристическая величина $\hat{K}_t$ станет точной. В случае же псевдонаблюдений $\hat{K}_t$ зависит от наблюдений и вычисляется на каждой траектории, поэтому ее надо интерпретировать как оценку условной ковариации $D\{X_t - \hat{X}_t|y_s, 0 \leq s \leq t\}$. Если допустить, что при этом в (6) описана линейная динамика, уравнения наблюдений точные (а не приближенные, как в методе псевдонаблюдений), но зависимость $\tilde{\Psi}_t^{(1)}$ и $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ от наблюдений сохраняется, то фильтр (7) станет линейно-гауссовским фильтром Липцера—Ширяева [2], а эвристическая оценка условной ковариации станет точной

условной ковариацией, характеризующей точность фильтрации на конкретной траектории.

Отметим, что эти рассуждения не носят формального характера и сделаны для того, чтобы упомянуть самые важные первоисточники в области нелинейной фильтрации. Используемый РФК как традиционный, так и на основе метода псевдонаблюдений, остается субоптимальным фильтром, не обладающим гарантированными статистическими характеристиками.

4 Численный пример

Для выполнения практического эксперимента траектория движения ЛА дискретизуется, шаг дискретизации совпадает с частотой поступления измерений. Предполагается, что в среднем ЛА движется с постоянной скоростью, а на реальную скорость оказывают влияние неконтролируемые случайные факторы (ветер). Их воздействие приводит к независимым отклонениям скорости. Между очередными изменениями на интервалах дискретизации скорость остается постоянной и изменяется в каждый следующий такт времени. Движение ЛА описывается в декартовой системе координат $Oxyz$, связанной с располагающейся стационарно РЛС. Наблюдения начинаются в момент времени $t = 0$ и выполняются в дискретные моменты времени $1, 2, \dots, t, \dots$, отвечающие разбиению интервала наблюдения с шагом δ : $\delta, 2\delta, \dots, t\delta, \dots$, единица измерения — часы. Начальное положение ЛА — вектор $\eta = (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z)' = (X(0), Y(0), Z(0))'$ — состоит из независимых элементов, имеющих равномерное распределение: $\eta_X \sim R[20, 40]$, $\eta_Y \sim R[20, 40]$, $\eta_Z \sim R[0, 5; 1, 5]$, единица измерения — километры. Таким образом, начальное положение ЛА характеризуется математическим ожиданием $E\{\eta\} = (30, 30, 1)'$ и ковариацией $D\{\eta\} \approx \text{diag}\{6^2; 6^2; 0,3^2\}$.

Скорость ЛА $S(t) = (S_X(t), S_Y(t), S_Z(t))'$ складывается из некоторой постоянной средней скорости и аддитивных возмущений. Постоянная средняя скорость задается случайным вектором $s = (s_X, s_Y, s_Z)'$. Поскольку у всех ЛА не может быть одинаковой средней скорости, то значения s моделируют реализации случайного вектора с известными моментами $(E\{s_X\}, E\{s_Y\}, E\{s_Z\})'$ и $\text{diag}(D\{s_X\}, D\{s_Y\}, D\{s_Z\})$. Предполагается, что элементы s независимы и каждый имеет равномерное распределение: $s_X \sim R[-200, -100]$; $s_Y \sim R[-200, -100]$; $s_Z \sim R[-2, 0]$. Таким образом, средняя скорость движения ЛА характеризуется математическим ожиданием $E\{s\} = (-150, -150, -1)'$, абсолютное значение средней скорости

≈ 212 км/ч и направление движения на начало координат $x = y = 0$ с небольшим уменьшением высоты z (опускаясь в среднем в 5 раз медленнее, чем приближаясь к РЛС в плоскости Oxy) и ковариацией $\text{diag}\{D\{s_X\}; D\{s_Y\}; D\{s_Z\}\} \approx \text{diag}\{29^2; 29^2; 0,6^2\}$. Для каждой траектории параметр s модели движения предполагается известным. В противном случае его можно идентифицировать [19].

Отклонение скорости ЛА $S(t)$ определяют неконтролируемые случайные факторы, которые моделируются аддитивным по отношению к средней скорости s вектором возмущений $W_t = (w_X(t), w_Y(t), w_Z(t))'$, имеющим независимые элементы со стандартным нормальным распределением. Величины отклонений σ_{s_X} , σ_{s_Y} и σ_{s_Z} скорости $S(t)$ от средней, повторяя модель из [19], выбираются равными средним значениям средней скорости s , т. е. $\sigma_{s_X} = E\{s_X\} = 150$; $\sigma_{s_Y} = E\{s_Y\} = 150$; $\sigma_{s_Z} = E\{s_Z\} = 1$. При больших скоростях ЛА движение получается сильно хаотическим, что вполне подходит для создания жестких условий проведения модельных испытаний алгоритмов оценивания. При этом моментные характеристики скорости $S(t)$ постоянны и равны:

$$\begin{aligned} E\{S(t)\} &= E\{s\} = (E\{s_X\}, E\{s_Y\}, E\{s_Z\})'; \\ D\{S(t)\} &= \text{diag}\{D\{s_X\} + \sigma_{s_X}^2, \\ &\quad D\{s_Y\} + \sigma_{s_Y}^2, D\{s_Z\} + \sigma_{s_Z}^2\} = \\ &= \text{diag}\{D\{s_Z\} + (E\{s_X\})^2, D\{s_Y\} + (E\{s_Y\})^2, \\ &\quad D\{s_Z\} + (E\{s_Z\})^2\} = \\ &= \text{diag}\{E\{s_X^2\}, E\{s_Y^2\}, E\{s_Z^2\}\}. \end{aligned}$$

Итоговая динамика имеет вид:

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t-1) + \delta S_X(t), \quad S_X(t) = s_X + \sigma_{s_X} w_X(t); \\ Y(t) &= Y(t-1) + \delta S_Y(t), \quad S_Y(t) = s_Y + \sigma_{s_Y} w_Y(t); \\ Z(t) &= Z(t-1) + \delta S_Z(t), \quad S_Z(t) = s_Z + \sigma_{s_Z} w_Z(t); \\ &\quad t = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Движение моделировалось в дискретные моменты времени $t = 0, \dots, 1000$, которые отвечают разбиению интервала времени наблюдения с шагом дискретизации $\delta = 0,0001$ ч, т. е. оценка положения ЛА определяется в течение $0,1$ ч = 6 мин. При абсолютной постоянной средней скорости 212 км/ч за это время ЛА в среднем перемещается на расстояние порядка 21 км, приближаясь к РЛС. Максимальное расстояние в момент обнаружения ЛА $t = 0$ до РЛС составляет ≈ 57 км, минимальное расстояние — ≈ 28 км.

В те же моменты времени выполняются измерения, т. е. в 1 с выполняются порядка трех измерений.

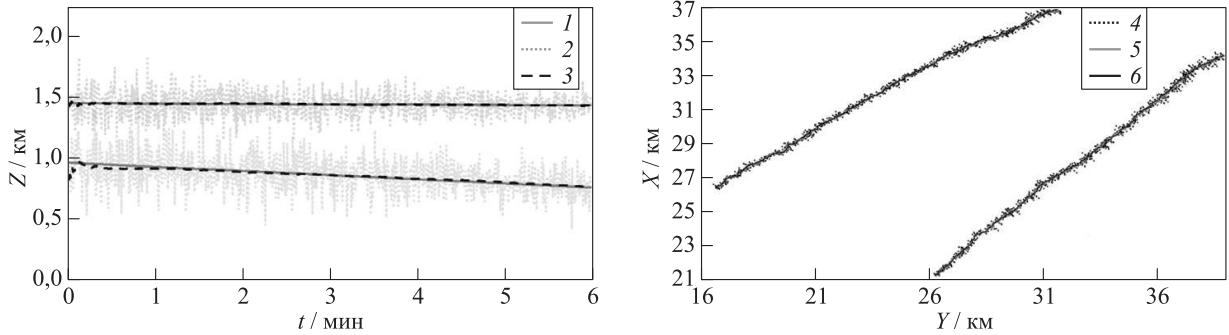


Рис. 2 Типовые траектории ЛА: 1 — координата $Z(t)$; 2 — оценка прямых измерений, 3 — оценка $\hat{Z}(t)$; 4 — траектории оценки прямых измерений; 5 — траектории оценки в координатах $\hat{X}(t), \hat{Y}(t)$; 6 — траектории ЛА в координатах $X(t), Y(t)$

Предполагается, что РЛС имеет два независимых канала, измеряя по каждому азимут, угол возвышения и дальность. Для моделирования выполняемых РЛС наблюдений $y_t = (y_{\varphi_t}, y_{\lambda_t}, y_{r_t})'$ и формируемых алгоритмом фильтрации псевдонаблюдений $Y_t = (Y_{\varphi_t}, Y_{\lambda_t}, Y_{r_t})'$ остается задать только ковариации. В расчете полагалось $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\lambda} = (1/4)\pi/180$ рад (1° на $4\sigma_{\varphi}$ или $4\sigma_{\lambda}$); $\sigma_r = (1/4) \cdot 0,1$ км (100 м на $4\sigma_r$). Реальные точности современных РЛС эти величины превосходят существенно. Такие экстремальные значения для эксперимента выбраны, чтобы продемонстрировать потенциал предложенного алгоритма фильтрации. Можно считать, что эти значения даны для учета возможного противодействия радиолокационным измерениям.

Качество оценки положения ЛА определяется величинами $\sigma_{\hat{X}}(t) = (\bar{E}\{|\hat{X}(t) - X(t)|^2\})^{1/2}$ (аналогично для $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ и $\sigma_{\hat{Z}}(t)$), вычисляемыми вдоль траекторий моделируемого пучка. Здесь $\bar{E}\{\cdot\}$ — статистическое среднее, вычисленное по $N = 1000$ смоделированным траекториям. Для сравнения вычислялась оценка прямых измерений — среднее оценок положений, вычисленное по двум текущим измерениям РЛС (прямое преобразование дальности и углов в декартовы координаты).

На рис. 2 эксперимент проиллюстрирован примерами характерных траекторий ЛА и их оценок (отдельно высота $Z(t)$ и проекция положения на плоскость Oxy), на рис. 3 показана точность оце-

нивания (графики $\sigma_{\hat{X}}(t)$, $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ и $\sigma_{\hat{Z}}(t)$). Обобщенные характеристики качества оценок приведены в таблице. На графиках использована оценка фильтра для интегральной ковариации шума. При этом надо отметить, что визуальная разница между оценками фильтра РФК линейных псевдонаблюдений для минимаксной $D\{v_i\} = \sigma^2$ и интегральной $D\{v_i\} = (1/4)\sigma^2$ форм ковариаций отсутствует.

Обобщенную характеристику точности фильтров дают величины $\sigma_{\hat{X}}^{(\text{mean})} = (1/1000) \sum_{t=1}^{1000} \sigma_{\hat{X}}(t)$ (аналогично $\sigma_{\hat{Y}}^{(\text{mean})}$ и $\sigma_{\hat{Z}}^{(\text{mean})}$). Поскольку разница между оценками фильтров с $D\{v_i\} = \sigma^2$ и $D\{v_i\} = (1/4)\sigma^2$ невелика, то определенный интерес есть в том, чтобы посмотреть на чувствительность фильтра к этому параметру шире. Такой

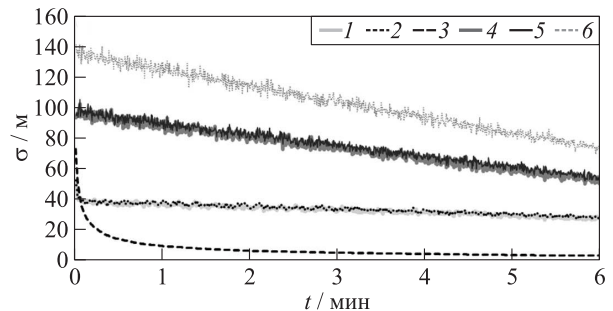


Рис. 3 Точность оценивания (1 — $\sigma_{\hat{X}}$; 2 — $\sigma_{\hat{Y}}$; 3 — $\sigma_{\hat{Z}}$) и отклонения оценки прямых измерений (4 — по X ; 5 — по Y ; 6 — по Z)

Точность фильтрации

Фильтр	$D\{v_i\} = \sigma^2$ Минимаксный	$D\{v_i\} = \left(\frac{1}{2}\sigma\right)^2$ Интегральный	$D\{v_i\} = \left(\frac{1}{4}\sigma\right)^2$	$D\{v_i\} = \left(\frac{3}{4}\sigma\right)^2$	$D\{v_i\} = \left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2$	Прямые измерения
$\sigma_{\hat{X}}^{(\text{mean})}$	35,30	33,85	39,86	33,17	39,26	73,72
$\sigma_{\hat{Y}}^{(\text{mean})}$	35,24	34,47	40,39	33,18	38,87	73,30
$\sigma_{\hat{Z}}^{(\text{mean})}$	7,86	7,93	8,03	7,68	7,74	102,82

предварительный анализ возможности адаптации фильтра — в стиле классического подхода [20]. Результаты объединены в таблицу.

5 Заключение

Решаемая проблема — типовая задача нелинейной фильтрации для дискретных стохастических систем наблюдения. Оценка строится в условиях, которые можно считать экстремальными: реальный движущийся объект вряд ли может совершать такие хаотические маневры, а измерения быть столь неточными. Очень часто субоптимальные фильтры калмановской структуры в таких задачах дают неприемлемые результаты, их оценки попросту расходятся. Метод линейных псевдонаблюдений РФК дал не просто устойчивые оценки, но и обладающие хорошей точностью. Конечно, результат может быть улучшен (это точно может обеспечить применение концепции условно-оптимального оценивания, что продемонстрировано в похожей задаче в [19]).

Другая интересная тема для дальнейшего развития — исследование предложенной оценки в задачах с неполной информацией в стиле адаптивного фильтра Калмана [20]. Из результатов численного эксперимента видно, что предложенные при формировании линейных псевдонаблюдений минимаксная и интегральная аппроксимации ковариации шумов обе дают хороший результат, т.е. в некотором смысле обе оказываются «правильными». Но отклонения от них, т.е. более грубые аппроксимации, результат сильно ухудшают. Такое положение свидетельствует о готовности представленной методики к применениям в условиях неполной априорной информации об ошибках измерений и возможности синтеза адаптивного фильтра.

Литература

1. Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms, and software. — New York, NY, USA: J. Wiley & Sons, 2001. 592 p. doi: 10.1002/0471221279.
2. Липцер П. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 2001. 696 с.
3. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems // J. Basic Eng. — Т. ASME, 1960. Vol. 82. No. 1. P. 35–45. doi: 10.1115/1.3662552.
4. Bernstein I., Friedland B. Estimation of the state of a nonlinear process in the presence of nongaussian noise and disturbances // J. Frankl. Inst., 1966. Vol. 281. No. 6. P. 455–480. doi: 10.1016/0016-0032(66)90434-0.
5. Perea L., How J., Breger L., Elosegui P. Nonlinearity in sensor fusion: Divergence issues in EKF, modified truncated GSF, and UKF // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit Proceedings. — AIAA, 2007. Art. 6514. 16 p. doi: 10.2514/6.2007-6514.
6. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер. с англ. — М.: Наука, 1991. 432 с. (Ljung L. System identification: Theory for the user. — Hoboken, NJ, USA: Prentice Hall, 1987. 519 p.)
7. Hashemi R., Engell S. Effect of sampling rate on the divergence of the extended Kalman filter for a continuous polymerization reactor in comparison with particle filtering // IFAC-PapersOnLine, 2016. Vol. 49. No. 7. P. 365–370. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.363.
8. Босов А. В., Миллер Г. Б. Условно-минимаксный нелинейный фильтр и сигма-точечные фильтры: практический анализ и сравнение // Автомат. и телемех., 2019. № 7. С. 61–88. doi: 10.1134/S000523101907002X. EDN: QEGCEJ.
9. Босов А. В., Миллер Г. Б. О развитии концепции условно-минимаксной нелинейной фильтрации: модифицированный фильтр и его анализ // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 2. С. 7–15. doi: 10.14357/19922264190202. EDN: XZDVEV.
10. Lingren A., Gong K. Position and velocity estimation via bearing observations // IEEE T. Aero. Elec. Sys., 1978. Vol. AES-14. Iss. 4. P. 564–577. doi: 10.1109/TAES.1978.308681.
11. Kolb R. C., Hollister F. H. Bearing-only target motion estimation // 1st Asilomar Conference on Circuits and Systems Proceedings, 1967. P. 935–946.
12. Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S. Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem // Proc. SPIE, 2002. Vol. 4728. P. 240–250. doi: 10.1117/12.478508.
13. Амелин К. С., Миллер А. Б. Алгоритм уточнения местонахождения легкого БПЛА на основе калмановской фильтрации измерений пеленгационного типа // Информационные процессы, 2013. Т. 13. № 4. С. 338–352. EDN: RRXSZT.
14. Miller A. B., Miller B. M. Tracking of the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations // 53rd IEEE Conference on Decision and Control Proceedings. — IEEE, 2014. P. 4178–4184. doi: 10.1109/cdc.2014.7040040.
15. Miller A. B., Miller B. M. Stochastic control of light UAV at landing with the aid of bearing-only observations // Proc. SPIE, 2015. Vol. 9875. Art. 987529. 10 p. doi: 10.1117/12.2228544.
16. Миллер А. Б., Миллер Б. М. Отслеживание подводной цели с использованием пеленгационных измерений // Информационные процессы, 2016. Т. 16. № 2. С. 103–111. EDN: WAXXKV.
17. Miller A., Miller B., Miller G. On AUV control with the aid of position estimation algorithms based on acoustic seabed sensing and DOA measurements // Sensors — Basel, 2019. Vol. 19. No. 24. Art. 5520. 21 p. doi: 10.3390/s19245520.

18. *Morris J.* The Kalman filter: A robust estimator for some classes of linear quadratic problems // *IEEE T. Inform. Theory*, 1976. Vol. 22. No. 5. P. 526–534. doi: 10.1109/tit.1976.1055611.
19. *Босов А. В.* Анализ использования доплеровских измерений для идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными запаздываниями // *Информатика и её применения*, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 33–43. doi: 10.14357/19922264250105. EDN: MZKWC1.
20. *Sims F., Lainiotis D., Magill D.* Recursive algorithm for the calculation of the adaptive Kalman filter weighting coefficients // *IEEE T. Automat. Contr.*, 1969. Vol. 14. No. 2. P. 215–218. doi: 10.1109/TAC.1969.1099155.

Поступила в редакцию 13.02.2025

Принята к публикации 15.05.2025

A MODIFIED EXTENDED KALMAN FILTER BY THE LINEAR PSEUDOMEASUREMENT METHOD

A. V. Bosov and I. V. Uryupin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper proposes a modification of the linear pseudomeasurement method for the Extended Kalman Filter. It is intended for use in a typical discrete stochastic observation system model. The modified filter allows one to use both bearing measurements of a moving object and range measurements. To form linear pseudomeasurements, linearization of trigonometric functions of bearing measurements and approximation (minimax or integral) of measurement errors and linearization errors are performed. The range of applied tasks solved by the modified filter includes typical navigation tasks, in particular, those solved for autonomous aircraft and underwater vehicles. Experimental calculations were performed for a model example describing the movement of an autonomous aircraft observed by a stationary radar system.

Keywords: discrete stochastic observation system; linear pseudomeasurement; Extended Kalman Filter; target tracking; radar observations

DOI: 10.14357/19922264250203

EDN: ZOVFSQ

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Bar-Shalom, Y., X.-R. Li, and T. Kirubarajan. 2002. *Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms and software*. New York, NY: John Wiley & Sons. 592 p. doi: 10.1002/0471221279.
2. Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev. 1974. *Statistika sluchaynykh protsessov (nelineynaya fil'tratsiya i smezhnye voprosy)* [Statistics of random processes (nonlinear filtering and related problems)]. Moscow: Nauka. 696 p.
3. Kalman, R. E. 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.* — *T. ASME* 82(1):35–45. doi: 10.1115/1.3662552.
4. Bernstein, I., and B. Friedland. 1966. Estimation of the state of a nonlinear process in the presence of nongaussian noise and disturbances. *J. Frankl. Inst.* 281(6):455–480. doi: 10.1016/0016-0032(66)90434-0.
5. Perea, L., J. How, L. Breger, and P. Elosegui. 2007. Nonlinearity in sensor fusion: Divergence issues in EKF, modified truncated GSF, and UKF. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit Proceedings*. AIAA. Art. 6514. 16 p. doi: 10.2514/6.2007-6514.
6. Ljung, L. 1987. *System identification: Theory for the user*. Hoboken, NJ: Prentice Hall. 519 p.
7. Hashemi, R., and S. Engell. 2016. Effect of sampling rate on the divergence of the extended Kalman filter for a continuous polymerization reactor in comparison with particle filtering. *IFAC-PapersOnLine* 49(7):365–370. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.363.
8. Bosov, A. V., and G. B. Miller. 2019. Conditionally minimax nonlinear filter and unscented Kalman filter: Empirical analysis and comparison. *Automat. Rem. Contr.* 80(7):1230–1251. doi: 10.1134/S0005117919070026. EDN: KCFBWK.
9. Bosov, A. V., and G. B. Miller. 2019. O razviti kontseptsii uslovno-minimaksnoy nelineynoy fil'tratsii: modifitsirovanny fil'tr i ego analiz [On the conditionally minimax

- nonlinear filtering concept development: Filter modification and analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(2):7–15. doi: 10.14357/19922264190202. EDN: XZDVEV.
10. Lingren, A. G., and K. F. Gong. 1978. Position and velocity estimation via bearing observations. *IEEE T. Aero. Elec. Sys.* AES-14(4):564–577. doi: 10.1109/TAES.1978.308681.
 11. Kolb, R. C., and F. H. Hollister. 1967. Bearings-only target motion estimation. *1st Asilomar Conference on Circuits Systems Proceedings*. 935–946.
 12. Lin, X., T. Kirubarajan, Y. Bar-Shalom, and S. Maskell. 2002. Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem. *Proc. SPIE* 4728:240–250. doi: 10.1117/12.478508.
 13. Amelin, K. S., and A. B. Miller. 2013. An algorithm for refinement of the position of a light UAV on the basis of Kalman filtering of bearing measurements. *J. Commun. Technol. El.* 59(6):622–631. doi: 10.1134/S1064226914060047. EDN: SJVPPV.
 14. Miller, A. B., and B. M. Miller. 2014. Tracking of the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations. *53rd IEEE Conference on Decision and Control Proceedings* IEEE. 4178–4184. doi: 10.1109/cdc.2014.7040040.
 15. Miller, A. B., and B. M. Miller. 2015. Stochastic control of light UAV at landing with the aid of bearing-only observations. *Proc. SPIE* 9875:987529. 10 p. doi: 10.1117/12.2228544.
 16. Miller, A. B., and B. M. Miller. 2018. Underwater target tracking using bearing-only measurements. *J. Commun. Technol. El.* 63(6):643–649. doi: 10.1134/S1064226918060207. EDN: YBUDBB.
 17. Miller, A., B. Miller, and G. Miller. 2019. On AUV control with the aid of position estimation algorithms based on acoustic seabed sensing and DOA measurements. *Sensors — Basel* 19(24):5520. 21 p. doi: 10.3390/s19245520.
 18. Morris, J. 1976. The Kalman filter: A robust estimator for some classes of linear quadratic problems. *IEEE T. Inform. Theory* 22(5):526–534. doi: 10.1109/TIT.1976.1055611.
 19. Bosov, A. V. 2025. Analiz ispol'zovaniya doplerovskikh izmereniy dlya identifikatsii parametrov dvizheniya po nablyudeniya so sluchaynymi zapazdyvaniyami [Doppler measurements application analysis to identify motion parameters from observations with random delays]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform Appl.* 19(1):33–43. doi: 10.14357/19922264250105. EDN: MZKWCI.
 20. Sims, F., D. Lainiotis, and D. Magill. 1969. Recursive algorithm for the calculation of the adaptive Kalman filter weighting coefficients. *IEEE T. Automat. Contr.* 14(2):215–218. doi: 10.1109/TAC.1969.1099155.

Received February 13, 2025

Accepted May 15, 2025

Contributors

Bosov Alexey V. (b. 1969) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; avbosov@ipiran.ru

Uryupin Ilya V. (b. 1993) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; uryupin93@yandex.ru

МЕТОДЫ УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПО СЛОЖНОМУ СТАТИСТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ ДЛЯ НАБЛЮДАЕМЫХ НЕЯВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Н. Синицын¹

Аннотация: Рассмотрены методы синтеза нелинейных условно-оптимальных фильтров (УОФ) по сложному статистическому критерию (ССК) для обработки информации во взаимосвязанных наблюдаемых непрерывных и дискретных неявных негауссовских стохастических системах (СтС), приводимых к явным. Дан краткий обзор работ по УОФ по среднеквадратичному критерию для явных и неявных СтС и УОФ ССК для явных систем. Представлены методы приведения для гладких и разрывных неявных функций. Разработаны точные методы синтеза УОФ ССК для приведенных дифференциальных, регрессионных и авторегрессионных уравнений. Рассмотрены две задачи по применению основных результатов к задачам непрерывной и дискретной ССК-фильтрации в случае аддитивных шумов и неявных функций, допускающих эквивалентную статистическую линеаризацию. Получены обобщения фильтров Калмана и Калмана–Бьюси. Предложены возможные обобщения точных и приближенных методов.

Ключевые слова: непрерывная и дискретная ССК-фильтрация; неявная стохастическая система; сложный статистический критерий (ССК); стохастический процесс (СтП); условно-оптимальный фильтр (УОФ)

DOI: 10.14357/19922264250204

EDN: QMIXFW

1 Введение

Теория условно-оптимальной фильтрации в среднеквадратичном смысле (по В. С. Пугачёву) стохастических процессов (СтП), описываемых явными стохастическим дифференциальными уравнениями, нашла применение при решении задач обработки информации в реальном масштабе времени. Для неявных дифференциальных СтС, допускающих приведение к явным дифференциальным, развиты соответствующие методы условно-оптимальной фильтрации В. С. Пугачёва. Так, в [1] разработаны математические модели наблюдаемых неявных дифференциальных СтС, приводимых к дифференциальным, для задач фильтрации. Получены базовые уравнения нелинейных УОФ. Сформулированы основные выводы, обсуждены примеры синтеза и даны предложения по развитию УОФ для неявных дифференциальных и функционально-дифференциальных СтС.

Развитие методов условно-оптимальной фильтрации при автокоррелированных помехах в наблюдениях для некоррелированных и автокоррелированных помех на случай неявных непрерывных и дискретных гауссовских СтС, приводимых к явным, дано в [2]. Представлены математические модели неявных непрерывных и дискретных гауссовских и негауссовских СтС, приводимых к явным. Для приведенных неявных СтС в условиях, когда наблюдения не оказывают влияния на объект на-

блюдения и описываются явными уравнениями, разрешенными относительно производных (разностей), получены уравнения базовых методов условно-оптимальной фильтрации. Обсуждены три примера, представлены выводы и направления дальнейших исследований.

Статья [3] посвящена методам условно-оптимального синтеза фильтров для неявных дискретных СтС, приводимых к явным, путем эквивалентной гауссовской и негауссовской линеаризации. Предполагается, что наблюдения не влияют на объект наблюдения и описываются дискретными нелинейными уравнениями с некоррелированными и автокоррелированными помехами. Дан обзор работ в области синтеза УОФ для явных и неявных дискретных наблюдаемых СтС. Приведены основные модели дискретных неявных СтС и методы их эквивалентной линеаризации. Получены уравнения УОФ. В качестве примера рассмотрены УОФ для авторегрессионных приведенных уравнений. Обсуждены примеры и направления дальнейших исследований.

В [4] изложены методы синтеза нелинейных нормальных УОФ (НУОФ) по среднеквадратичному критерию для обработки информации во взаимосвязанных наблюдаемых неявных непрерывных и дискретных гауссовских и негауссовских СтС, приводимых к явным. Представлены уравнения наблюдаемых непрерывных и дискретных явных

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

и неявных гауссовских и негауссовских СтС, методы приведения неявных гладких и разрывных СтС к явным. Для взаимосвязанных неявных объектовых и явных систем наблюдения разработаны методы синтеза НУОФ, основанные на решении методом нормальной аппроксимации совместных приведенных уравнений объекта, системы наблюдения и уравнений линейных и нелинейных УОФ для гауссовских и негауссовских СтС. В качестве дискретных неявных СтС, приводимых к дискретным, рассмотрены нелинейные регрессионные и авторегрессионные уравнения. Предложены обобщения методов синтеза НУОФ для сложных неявных непрерывных и дискретных СтС.

Рассмотрим методы синтеза УОФ ССК для обработки информации во взаимосвязанных объектовых наблюдаемых непрерывных и дискретных негауссовских СтС, приводимых к явным. Для явных непрерывных и дискретных систем УОФ ССК рассмотрены в [5–7].

2 Уравнения объектовых наблюдаемых непрерывных и дискретных неявных стохастических систем

Обобщая [1–4], рассмотрим векторную неявную дифференциальную СтС с нелинейностями, описываемыми гладкими детерминированными функциями размерности $(n^\Phi \times 1)$:

$$\Phi = \Phi(t, Z_t, \dot{Z}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t) = 0, \\ Z(t_0) = Z_0, \dot{Z}(t_0) = \dot{Z}_0, \dots, Y^{(k)}(t_0) = Z_0^{(k)}. \quad (1)$$

При этом уравнение нелинейного формирующего фильтра для стохастических возмущений U_t возьмем в виде, разрешенном относительно белых шумов:

$$\dot{U}_t = a^U(t, U_t) + b^U(t, U_t)V_t^U, \quad U(t_0) = U_0. \quad (2)$$

Здесь $a^U(t, U_t)$ и $b^U(t, U_t) - (n^Z \times 1)$ - и $(n^Z \times n^V)$ -мерные функции; V_t^U — белый шум в строгом смысле, допускающий представление вида

$$V_t^U = \dot{W}_t^U, \quad W_t^U = W_0^U(t) + \int_{R_0^q} c^U(u) P^0(t, du),$$

где ν_t — его интенсивность:

$$\nu_t = \nu_t^W = \nu_t^{W_0} + \int_{R_0^q} c^U(u) [c^U(u)]^T \nu_P(t, u) du;$$

$c^U = c^U(u)$ — известная векторная функция той же размерности, что и W_0^U ; интеграл при любом $t \geq t_0$ представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере $P^0(t, \mathcal{A})$, независимой от W_0^U и имеющей независимые значения на попарно непересекающихся множествах; $\mathcal{A}$ — борелевское множество пространства R_0^q с выколотым началом; $\nu_t^W, \nu_t^{W_0}$ и ν_P — интенсивности СтП W_t^U, W_0^U и P^0 . Уравнение (2) понимается в смысле Ито и имеет единственное среднееквадратичное решение.

Для гладких функций в (1), допускающих стохастические производные Ито до h -го порядка, выполним следующие преобразования. Будем дифференцировать по t левые части уравнений (1) по обобщенной формуле Ито [4, 5] до тех пор, пока не появятся производные белого шума. В результате получим следующую систему неявных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi = 0, \quad \dot{\Phi} = 0, \dots, \Phi^{(h)} = 0.$$

Далее введем составной вектор $[\bar{Z}_t^T Z_t'^T]^T$, где $\bar{Z}_t = [Z_t^T \dot{Z}_t^T \dots Z_t^{(k-1)T}]^T$, и вспомогательный вектор Z_t' , определяемый в виде конечного уравнения

$$\Psi(\bar{Z}_t, Z_t') = 0. \quad (3)$$

Как показано в [1–3], если неявные гладкие вектор-функции и конечные неявные уравнения (1) и (3) допускают гладкую замену переменных, то они приводятся к системе, состоящей из векторного стохастического дифференциального уравнения Ито и конечного неявного векторного уравнения (**теорема 2.1**):

$$d\bar{Z}_t = a^\Pi(t, \bar{Z}_t)dt + b^\Pi(t, \bar{Z}_t)dW_0 + \\ + \int_{R_0^q} c^\Pi(t, \bar{Z}_t, u) P^0(dt, du), \quad \Psi^\Pi(\bar{Z}_t, Z_t', t) = 0.$$

Приводимые неявные дискретные регрессионные и авторегрессионные СтС описываются разностными уравнениями вида (**теоремы 2.2 и 2.3**):

$$\bar{Z}_{k+1} = \omega_k^\Pi(\bar{Z}_k, V_k); \quad \Psi_k^\Pi(\bar{Z}_k, Z_k') = 0; \\ \bar{Z}_{k+1} = a_k^\Pi(\bar{Z}_k) + b_k^\Pi(\bar{Z}_k) V_k; \quad \Psi_k^\Pi(\bar{Z}_k, Z_k') = 0.$$

Здесь функции $\omega_k^\Pi(\bar{z}_k, v_k)$, $a_k^\Pi(\bar{z}_k)$ и $b_k^\Pi(\bar{z}_k)$ имеют размерности $(n_{\bar{Z}} \times 1)$, $(n_{\bar{Z}} \times 1)$ и $(n_{\bar{Z}} \times n_v)$ соответственно, $k = 1, 2, \dots$

В задачах фильтрации и идентификации параметров в условиях теоремы 2.1 обычно принимается, что объектовая неявная СтС допускает приведение к явной СтС, измерительная система вполне

наблюдаема, причем уравнение наблюдения разрешено относительно вектора наблюдения. Введем новые обозначения для составных векторов состояния объекта X_t , вспомогательного вектора Z'_t и системы наблюдения Y_t . Тогда в качестве приведенных уравнений состояния объекта и наблюдений будем рассматривать для приведенных дифференциальных СтС следующие уравнения (теорема 2.4):

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_t &= \varphi^\Pi(X_t, Y_t, t) + \psi^\Pi(X_t, Y_t, t)V, \\ \Psi^\Pi(X_t, Z'_t, t) &= 0; \\ \dot{Y}_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, t) + \psi_1(X_t, Y_t, t)V, \quad V = \dot{W}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь

$$V = \dot{W}, \quad W(t) = W_0(t) + \int_{R_0^q} c(u)P^0(t, du),$$

где $c(u)$ – векторная функция размерности $(n^W \times 1)$ q -мерного аргумента u , а интеграл при любом $t \geq t_0$ представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере $P^0(t, B)$, независимой от СтП W_0 и имеющей независимые значения на непересекающихся множествах. Интенсивность $\nu = \nu(t)$ СтП $W(t)$ в этом случае определяется формулой:

$$\nu(t) = \nu_0(t) + \nu'(t), \quad \nu'(t) = \int_{R_0^q} c(u)c(u)^T \nu_P(t, u) du,$$

где $\nu_0(t)$ и $\nu_P(t, u)$ – интенсивности СтП W_0 и P^0 .

Для разностного случая в условиях теорем 2.2 и 2.3 приведенные уравнения состояния и наблюдения будут следующими (теоремы 2.5 и 2.6):

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \omega_k^\Pi(X_k, Y_k, V_k), \\ \Psi^\Pi(X_k, Z'_k) &= 0, \quad Y_k = \omega_{1k}(X_k, Y_k, V_k); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \varphi_k^\Pi(X_k, Y_k) + \psi_k^\Pi(X_k, Y_k) V_k, \\ \Psi_k^\Pi(X_k, Z'_k) &= 0, \\ Y_k &= \varphi_{1k}(X_k, Y_k) + \psi_{1k}(X_k, Y_k) V_k, \end{aligned} \quad (6)$$

где V_k – дискретные негауссовские в общем виде белые шумы с известной одномерной характеристической функцией $h_k = h_k(\varepsilon; t)$.

3 Основные результаты

Рассмотрим векторный СтП X_t . В соответствии с принципом условно-оптимальной фильтрации будем считать, что наилучшей оценкой $\hat{X}_t$ процесса X_t служит такая оценка, которая при каждом

данном t минимизирует в бесконечно близкий момент $t' > t$, $t' \rightarrow t$ заданный функционал от вектора математического ожидания $m_{\hat{X}_t} = M\hat{X}_t$ и матрицы вторых вероятностных моментов ошибки фильтрации $\Gamma_{\hat{X}_t} = M(\hat{X}_t \hat{X}_t^T)$:

$$I_t = I_t(m_{\hat{X}_t}, \Gamma_{\hat{X}_t}) = \min, \quad \hat{X}_t = \tilde{X}(t) = \hat{X}_t(t) - X(t). \quad (7)$$

Критерий (7) будем называть сложным статистическим критерием.

Пусть исходная непрерывная (дифференциальная) неявная СтС приводима к дифференциально-конечной (4) для переменных X_t и Z'_t .

Требуется по результатам наблюдений $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t\}$ найти наилучшую оценку $\hat{X}_t$ процесса X_t в классе допустимых оценок, определяемых уравнением фильтра

$$d\hat{X}_t = \alpha_t \xi(\hat{X}_t, Y_t, t) dt + \beta_t \eta(\hat{X}_t, Y_t, t) dY_t \quad (8)$$

при заданных структурных функциях $\xi = \xi(\hat{X}_t, Y_t, t)$ и $\eta = \eta(\hat{X}_t, Y_t, t)$, отображающих $R^{n_y + n_x + 1}$ в R^q и R^{sn_y} соответственно. Здесь $\alpha_t = \alpha(t)$ и $\beta_t = \beta(t)$ – матрицы коэффициентов, подлежащие определению. Заметим, что, добавив к вектору ξ еще одну координату, равную 1, т.е. положив $\xi' = [\xi^T 1]^T$, и введя матрицы $\alpha' = [\alpha_t \gamma_t]$, получим следующий УОФ (8) со сдвигом:

$$d\hat{X}_t = \alpha_t \xi(\hat{X}_t, Y_t, t) dt + \beta_t \eta(\hat{X}_t, Y_t, t) dY_t + \gamma_t dt.$$

Следуя [5–7], определение оптимальных коэффициентов α_t и β_t в (8) осуществляется в два этапа. На первом этапе определяем коэффициенты $\alpha_{\theta, \lambda_1} = \alpha(\theta, \lambda_1, t)$ и $\beta_{\theta, \lambda_1} = \beta(\theta, \lambda_1, t)$, обеспечивающие минимум приведенного критерия

$$I_{\theta, \lambda_1} = \theta^T m_{\hat{X}_t} + \text{tr}(\lambda \Gamma_{\hat{X}_t}),$$

где θ и λ_1 – вектор и матрица (симметричная, положительно определенная), элементами которых выступают произвольные множества θ_i и $\lambda_{ij}(i, j = \overline{1, n_x})$ соответственно, $\theta \in \Lambda_\lambda \subset R^{n_x}$, $\lambda \in \Lambda_\theta \subset R^N$, $N = n_x(n_x + 1)/2$. На втором этапе, выбрав конкретный вид критерия (7) и подставив в него значения $\alpha_{\theta, \lambda_1}$ и $\beta_{\theta, \lambda_1}$, определяем оптимальные значения θ_0 и λ_0 , соответствующие минимуму принятого критерия.

В результате придем к следующему утверждению.

Теорема 3.1. Пусть векторный СтП $[X_t^T Y_t^T]^T$ определяется стохастическими дифференциальными

уравнениями (4) и (8) и имеет конечные одномерные моменты. Тогда значения структурных коэффициентов $\alpha_t = \alpha(t)$ и $\beta_t = \beta(t)$ фильтра (8) находятся при решении задачи

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_{\theta_0, \lambda_0}, \quad \beta_t = \beta_{\theta_0, \lambda_0}, \quad (\theta_0, \lambda_0) = \\ &= \arg \min_{(\theta, \lambda_1) \in \Lambda} I_t(m_{\hat{X}_t}(\alpha_\theta, \beta_{\theta, \lambda_1}), \Gamma_{\hat{X}_t}(\alpha_\theta, \lambda_1, \beta_{\theta, \lambda_1})), \\ \Lambda &= \Lambda_\theta \times \Lambda_\lambda, \end{aligned}$$

где функции $\alpha_{\theta, \lambda_1}$ и $\beta_{\theta, \lambda_1}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \beta_{\theta, \lambda_1} \kappa_{22} &= \kappa_{02}; \\ \alpha_{\theta, \lambda_1} \kappa_{11} + M \left(\hat{X}_t - X_t + \frac{1}{2} \theta \right) \xi^T \alpha_{\theta, \lambda_1}^T \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_t} &= \kappa'_{01} - \beta_{\theta, \lambda_1} \kappa'_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Структурные коэффициенты κ_{ij} и κ'_{ij} в (9) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \kappa_{02} &= \lambda M \left(X_t - \hat{X}_t \right) \varphi_1^T \eta^T + \lambda M \left(\psi^T \nu \psi_1^T \eta^T \right) - \\ &- \frac{1}{2} \theta M \left(\varphi_1^T \eta^T \right); \end{aligned}$$

$$\kappa_{11} = M \left(\xi - m_1 \right) \xi^T;$$

$$\kappa_{22} = M \left(\eta \psi_1 \nu \psi_1^T \eta^T \right);$$

$$\kappa'_{21} = M \left(\eta \varphi_1 - m_2 \right) \xi^T;$$

$$\kappa_{01} = M \left(\varphi^T - m_0 \right) \xi^T;$$

$$\kappa'_{01} = \kappa_{01} + M \left(X_t - \hat{X}_t \right) \frac{\partial \xi^T}{\partial t} +$$

$$\begin{aligned} &+ M \left\{ \left(X_t - \hat{X}_t - \frac{1}{2} \theta \right) \left[\varphi_1^T - \int_{R_0^q} \psi_1^T c \nu_P(t, v) dv \right] + \right. \\ &\left. + \psi^T \nu \psi_1^T - \beta_{\theta, \lambda_1} \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial Y_t} + \eta^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \xi^T +$$

$$+ \frac{1}{2} M \left\{ \left(X_t - \hat{X}_t - \frac{1}{2} \theta \right) \times \right.$$

$$\times \left\{ \text{tr} \left[\psi_1 \nu \psi_1^T \left(\frac{\partial}{\partial Y_t} + 2 \eta^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \frac{\partial^T}{\partial Y_t} \right] + \right.$$

$$\left. + \text{tr} \left[\beta_{\theta, \lambda_1} \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \eta^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_t} \right] \right\} \xi^T \Big\} +$$

$$+ \int_{R_0^q} M \left(\hat{X}_t - X_t + \psi^T c - \beta_{\theta, \lambda_1} \eta \psi_1 c \right) \times$$

$$\times \left[\xi(Y_t + \psi_1 c, \hat{X}_t + \beta_{\theta, \lambda_1} \eta \psi_1 c, t)^T - \xi^T \right] \nu_P(t, v) dv.$$

Здесь $m_0 = M \varphi^T$; $m_1 = M \xi$; $m_2 = M \eta \varphi_1$; $\nu = \nu(t)$ — интенсивность винеровского процесса; $\nu_P([t_0, t], D)$ — интенсивность пуассоновского процесса $P([t_0, t], D)$. При этом ССК условно-оптимальной оценки вектора вспомогательных переменных $\hat{Z}'_t$ находится из конечного уравнения

$$\Psi^T \left(\hat{X}_t, \hat{Z}'_t \right) = 0.$$

Замечание 3.1. Для приближенного решения уравнений могут применяться известные методы параметризации распределений (методы нормальной аппроксимации, методы моментов, методы ортогональных разложений и др.) [7].

Пусть дискретный процесс $[X_k^T Y_k^T]^T$ удовлетворяет стохастическим разностным уравнениям (5). Требуется по результатам наблюдений $Y_1^k = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ найти наилучшую оценку $\hat{X}_{k+1}$ процесса X_{k+1} в классе допустимых оценок, определяемых разностным уравнением

$$\hat{X}_{k+1} = \delta_k \zeta_k(\hat{X}_k, Y_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $\zeta_k = \zeta_k(\hat{X}_t, y)$ — заданная функция, отображающая R^{n_x+k} в R^s ; δ_k — неизвестная матрица коэффициентов фильтра (10), подлежащая определению. Добавив к вектору ζ_k еще одну координату, равную 1, т.е. положив $\zeta'_k = [\zeta_k^T 1]^T$, и введя матрицу $\delta'_k = [\delta_k \gamma_k]$, получим фильтр со сдвигом γ_k :

$$\hat{X}_{k+1} = \delta_k \zeta_k(\hat{X}_k, Y_k) + \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

В качестве критерия оптимальности оценки $\hat{X}_{k+1}$ принимается ССК:

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= I_t(m_{\hat{X}_{k+1}}, \Gamma_{\hat{X}_{k+1}}) = \min, \\ \tilde{X}_{k+1} &= \hat{X}_{k+1} - X_{k+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Определение оптимальных коэффициентов δ_k в (12) осуществляется в два этапа. На первом этапе определяем функции $\delta_k(\theta, \lambda_1)$, обеспечивающие минимум приведенного критерия

$$\begin{aligned} I_{\theta, \lambda_1} &= \theta_{m_{\hat{X}_{k+1}}}^T + \text{tr} \left(\lambda \Gamma_{\hat{X}_{k+1}} \right) = \min, \\ (\theta, \lambda_1) &\in \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda_\theta \times \Lambda_\lambda, \quad N = \frac{n_x(n_x + 1)}{2}, \end{aligned}$$

где $\theta \in \Lambda_\theta \subset R^{n_x}$ и $\lambda \in \Lambda_\lambda \subset R^N$ — неопределенные множители. На втором этапе определяем оптимальные значения θ_0 и λ_0 , соответствующие минимуму критерия (12).

Таким образом, приходим к утверждению.

Теорема 3.2. Пусть дискретный СтП $[X_k^T Y_k^T]^T$ определяется уравнениями нелинейной регрессии (5) и имеет конечные одномерные вероятностные моменты. Тогда значения структурных коэффициентов δ_k и γ_k фильтра (11) по критерию (12) находятся при решении задачи

$$\begin{aligned} \delta_k &= \delta_k(\theta_0, \lambda_0), \\ (\theta_0, \lambda_0) &= \arg \min_{(\theta, \lambda_1) \in \Lambda} I_k \left(m_{\tilde{X}_{k+1}}(\delta_k(\theta, \lambda_1)) \right), \\ \Gamma_{\tilde{X}_{k+1}}(\delta_k(\theta, \lambda_1)), \end{aligned} \quad (13)$$

в которой функции $\delta_k(\theta, \lambda_1)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\delta_k(\theta, \lambda_1) K_k = L_k, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} L_k &= M \omega_k(X_k, V_k) \zeta_k(\hat{X}_k, Y_k)^T - \frac{1}{2} \lambda^{-1} \theta r_k^T, \\ r_k &= M \zeta_k(\hat{X}_k, Y_k); \\ K_k &= M \zeta_k(\hat{X}_k, Y_k) \zeta_k(\hat{X}_k, Y_k)^T, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь рассмотрим авторегрессионные уравнения (6) и уравнение фильтра

$$\hat{X}_{k+1} = \alpha_k \xi_k(\hat{X}_k) + \beta_k \eta_k(\hat{X}_k) Y_k, \quad (16)$$

где $\xi_k(\hat{X}_k)$ и $\eta_k(\hat{X}_k)$ — заданные функции; $M V_k = 0$; $M(V_k V_k^T) = \nu_k$.

При условиях теоремы 3.2, положив

$$\zeta_k(\hat{X}_k, y) = \left[\xi_k(\hat{X}_k)^T Y_k^T \eta_k(\hat{X}_k) \right]^T; \quad \delta_k = [\alpha_k \beta_k],$$

получим следующий результат.

Теорема 3.3. Пусть дискретный векторный СтП $[X_k^T Y_k^T]^T$ определяется уравнениями нелинейной авторегрессии (6) и имеет конечные одномерные вероятностные моменты. Тогда оптимальные значения структурных коэффициентов α_k и β_k фильтра (16) по критерию (12) определяются из решения задачи (13) для

$$\begin{aligned} \delta_k(\theta, \lambda_1) &= [\alpha_k(\theta, \lambda_1) \beta_k(\theta, \lambda_1)]; \\ \zeta_k(\hat{X}_k, Y_k) &= \left[\xi_k(\hat{X}_k)^T Y_k^T \eta_k(\hat{X}_k) \right]^T. \end{aligned}$$

При этом уравнения для определения $\alpha_k(\theta, \lambda_1)$ и $\beta_k(\theta, \lambda_1)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha_k(\theta, \lambda_1) \kappa_{11} + \beta_k(\theta, \lambda_1) \kappa_{12} = \kappa_{01}; \\ \alpha_k(\theta, \lambda_1) \kappa_{21} + \beta_k(\theta, \lambda_1) \kappa_{22} = \kappa_{02}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{11} &= M(\xi_k \xi_k^T); \quad \kappa_{12} = \kappa_{21}^T = M(\varphi_{1k} \eta_k \xi_k^T); \\ \kappa_{22} &= M(\eta_k \varphi_{1k} \varphi_{1k}^T \eta_k^T) + M(\eta_k \psi_{1k} \nu_k \psi_{1k}^T \eta_k^T); \\ \kappa_{01} &= M(\varphi_{1k} \xi_k^T) - \frac{1}{2} \lambda^{-1} \theta M \xi_k^T; \\ \kappa_{02} &= M(\varphi_{1k} \varphi_{1k}^T \eta_k^T) + M(\psi_{1k} \nu_k \psi_{1k}^T \eta_k^T) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^{-1} \theta M(\varphi_{1k}^T \eta_k^T). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

При определении K_k , L_k и r_k в (14), (15) и κ_{ij} в (17), (18) достаточно знать одномерное совместное распределение случайных векторов X_k и $\hat{X}_k$ при каждом k и распределение величин V_k , которые по предположению известны.

В теоремах 3.2 и 3.3 оценка $\hat{Z}'_k$ находится из конечного уравнения

$$\Psi^{\Pi}(\hat{X}_k, \hat{Z}'_k) = 0.$$

4 Применение к задачам нормальной условно-оптимальной фильтрации по сложному статистическому критерию

В условиях аддитивных гауссовских помех в введенных уравнениях (4), (6), применяя метод эквивалентной статистической линеаризации, приходим к следующим результатам.

Задача 1. Пусть нормальный векторный СтП $[Y_t^T X_t^T \hat{X}_t^T]^T$ определяется статистическими линеаризованными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= a(m_t^X, K_t^X, t) X_t + \psi^{\Pi} V_0, \\ \dot{Y}_t &= a_1(t) X_t + \psi_1 V_0, \quad \Psi^{\Pi}(\hat{X}_t, \hat{Z}'_t) = 0, \\ \dot{\hat{X}}_t &= \alpha_t \hat{X}_t + \beta_t \dot{Y}_t + \gamma_t, \end{aligned}$$

где m_t^X и K_t^X — векторы математических ожиданий и ковариационная матрица; $a(m_t^X, K_t^X, t)$ — матричный коэффициент линеаризации. Тогда в основе нормального непрерывного УОФ ССК лежат следующие уравнения теоремы 3.1:

$$\begin{aligned} \alpha_{\theta, \lambda_1} &= \left[(a - \beta_{\theta, \lambda_1} a_1) K_{X_t \hat{X}_t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\lambda_1^{-1} - I) \theta m_{X_t}^T a_1^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T \right] K_{\hat{X}_t}^{-1}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\beta_{\theta, \lambda_1} = \left[\left(-\frac{1}{2} \lambda_1^{-1} \theta m_{\hat{X}_t}^T + K_{\hat{X}_t} \right) a_1^T + \psi^\Pi \nu_0 \psi_1'^T \right] (\psi_1' \nu_0 \psi_1'^T)^{-1}, \quad (20)$$

где

$$K_{\hat{X}_t} = K_{X_t} - K_{X_t \hat{X}_t} - m_{\hat{X}_t} m_{X_t}^T, \\ m_{\hat{X}_t} = m_{\hat{X}_t} - m_{X_t}. \quad (21)$$

При этом математические ожидания $m_{\hat{X}_t}$ и m_{X_t} и ковариации K_{X_t} , $K_{X_t \hat{X}_t}$ и $K_{\hat{X}_t}$ векторов X_t и $\hat{X}_t$ удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dm_{X_t}}{dt} = a m_{X_t}, \\ \frac{dm_{\hat{X}_t}}{dt} = \alpha_{\theta, \lambda_1} m_{\hat{X}_t} + \beta_{\theta, \lambda_1} a_1 m_{X_t}, \quad (22)$$

$$\frac{dK_{X_t}}{dt} = a K_{X_t} + K_{X_t} a^T + \psi^\Pi \nu_0 \psi^\Pi, \\ \frac{dK_{X_t \hat{X}_t}}{dt} = a K_{X_t \hat{X}_t} + K_{X_t} a_1^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T + \\ + \alpha_{\theta, \lambda_1}^T K_{X_t \hat{X}_t} + \psi^\Pi \nu_0 \psi_1'^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T, \\ \frac{dK_{\hat{X}_t}}{dt} = \beta_{\theta, \lambda_1} a_1 K_{X_t \hat{X}_t} + K_{X_t \hat{X}_t} a_1^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T + \\ + \alpha_{\theta, \lambda_1} K_{\hat{X}_t} + K_{\hat{X}_t} \alpha_{\theta, \lambda_1}^T + \beta_{\theta, \lambda_1} \nu_0 \psi_1'^T \beta_{\theta, \lambda_1}^T. \quad (23)$$

В уравнениях (19)–(23) при $\theta = 0$ и $\lambda = 1$ получаем фильтр Калмана–Бьюси [7].

Задача 2. Для дискретного СтП $[Y_k^T X_k^T \hat{x}_k^T]^T$, описываемого разностными уравнениями

$$X_{k+1} = a_k (m_k^X, K_k^X) X_k + \psi_k^\Pi V_{0k}, \quad \Psi^\Pi (X_k, X_k') = 0;$$

$$Y_k = b_k(t) X_k + \psi_{1k} V_k, \quad \hat{X}_{k+1} = \alpha_k \hat{X}_k + \beta_k Y_k,$$

в основе нормального УОФ ССК лежат следующие уравнения теоремы 3.3:

$$\delta(\theta, \lambda_1) = [\alpha_k(\theta, \lambda_1) \beta_k(\theta, \lambda_1)]; \\ \zeta_k(\hat{X}_k, Y) = [\hat{X}_k^T Y_k^T]^T.$$

При этом $\alpha_k(\theta, \lambda_1)$ и $\beta_k(\theta, \lambda_1)$ определяются по следующим формулам:

$$\alpha_k(\theta, \lambda_1) = \\ = (a_k - \beta_k(\theta, \lambda_1) b_k) \Gamma_{X_k, \hat{X}_k} \Gamma_{\hat{X}_k}^{-1} - \frac{1}{2} \lambda^{-1} \theta m_{\hat{X}_k}^T \Gamma_{\hat{X}_k}^{-1}; \\ \beta_k(\theta, \lambda_1) = \left(a_k R_k b_k^T + \psi_k \nu_{0k} \psi_{1k}^T - \frac{1}{2} \lambda^{-1} \theta \times \right. \\ \times \left(m_{\hat{X}_k}^T + \frac{1}{2} m_{\hat{X}_k}^T \Gamma_{\hat{X}_k}^{-1} \theta m_{\hat{X}_k}^T \right) \times \\ \times (b_k R_k b_k^T + \psi_{1k} \nu_k \psi_{1k}^T)^{-1},$$

где

$$R_k = \Gamma_{X_k} - \Gamma_{X_k, \hat{X}_k} \Gamma_{\hat{X}_k}^{-1} \Gamma_{X_k, \hat{X}_k}^T.$$

Здесь математические ожидания $m_{X_k} = M X_k$ и $m_{\hat{X}_k} = M \hat{X}_k$, вероятностные моменты второго порядка векторов X_k и $\hat{X}_k$, $\Gamma_{X_k} = M X_k X_k^T$, $\Gamma_{X_k, \hat{X}_k} = M X_k \hat{X}_k^T$ и $\Gamma_{\hat{X}_k} = M \hat{X}_k \hat{X}_k^T$ удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$m_{X_{k+1}} = a_k m_{X_k}; \\ m_{\hat{X}_{k+1}} = \alpha_k(\theta, \lambda_1) m_{\hat{X}_k} + \beta_k(\theta, \lambda_1) b_k m_{X_k}; \\ \Gamma_{X_{k+1}} = a_k \Gamma_{X_k} a_k^T + \psi_k^\Pi \nu_{0k} \psi_k^\Pi; \\ \Gamma_{X_{k+1}, \hat{X}_{k+1}} = a_k \Gamma_{X_k, \hat{X}_k} \alpha_k(\theta, \lambda_1)^T + \\ + a_k \Gamma_{X_k} b_k \beta_k(\theta, \lambda_1)^T + \psi_k^\Pi \nu_{0k} \psi_{1k}^T \beta_k(\theta, \lambda_1)^T; \\ \Gamma_{\hat{X}_{k+1}} = \alpha_k(\theta, \lambda_1) \Gamma_{\hat{X}_k} \alpha_k(\theta, \lambda_1)^T + \\ + \beta_k(\theta, \lambda_1) b_k \Gamma_{X_k, \hat{X}_k} \alpha_k(\theta, \lambda_1)^T + \\ + \alpha_k(\theta, \lambda_1) \Gamma_{X_k, \hat{X}_k}^T b_k^T \beta_k(\theta, \lambda_1)^T + \\ + \beta_k(\theta, \lambda_1) \psi_{1k} \nu_{0k} \psi_{1k}^T \beta_k(\theta, \lambda_1)^T; \\ \Psi_k^\Pi (\hat{X}_k, \hat{Z}_k') = 0.$$

При $\theta = 0$ и $\lambda = I$, поскольку $\Gamma_{X_k, \hat{X}_k} = \Gamma_{\hat{X}_k, X_k}^T = \Gamma_{\hat{X}_k}$ и $R_k = \Gamma_{\hat{X}_k} (\hat{X}_k = X_k - \hat{X}_k)$, уравнения определяют дискретный фильтр Калмана [7].

5 Заключение

Разработаны точные методы условно-оптимального синтеза фильтров по ССК для обработки информации в реальном масштабе времени для неявных непрерывных и дискретных СтС, приводимых к явным. Предполагается, что наблюдения влияют на объект наблюдения. Особое внимание уделено задачам приближенного синтеза УОФ ССК на основе методов нормальной аппроксимации и эквивалентной статистической линеаризации.

Полученные методы допускают обобщение на случай приводимых неявных СтС, зависящих от случайных параметров, определяемых каноническими представлениями [8–10], эрмитарных СтС [11–13], а также управляемых СтС [14–18].

Литература

1. Синец И. Н. Методы условно-оптимальной фильтрации и экстраполяции в наблюдаемых неявных стохастических системах // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 2–9. doi: 10.14357/19922264240401. EDN: TFRJYK.
2. Синец И. Н. Условно-оптимальная фильтрация и экстраполяция в неявных дифференциальных гауссовских стохастических системах при автокоррелированной помехе в наблюдениях // Информатика

- и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 19–25. doi: 10.14357/19922264240403. EDN: VUETK.
3. *Синицын И. Н.* Дискретное условно-оптимальное оценивание в неявных наблюдаемых стохастических системах // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 4. С. 16–30. doi: 10.14357/08696527240402. EDN: TLHYUA.
 4. *Синицын И. Н.* Методы нормальной условно-оптимальной фильтрации для наблюдаемых неявных стохастических систем // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 44–51. doi: 10.14357/19922264250106. EDN: TERFUE.
 5. *Синицын И. Н., Шин В. И.* Условно-оптимальная фильтрация в стохастических дифференциальных системах по сложным статистическим критериям // Докл. Акад. наук СССР, 1991. Т. 320. № 4. С. 813–817.
 6. *Синицын И. Н., Шин В. И., Корепанов Э. Р.* Теория условно-оптимальной фильтрации стохастических процессов по сложно-статистическим критериям // Системы и средства информатики, 1993. № 5. С. 106–120.
 7. *Синицын И. Н.* Фильтры Калмана и Пугачёва. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.
 8. *Пугачёв В. С.* Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 1962. 884 с.
 9. *Пугачёв В. С., Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. — 2-е изд. — М.: Логос, 2004. 1000 с.
 10. *Синицын И. Н.* Канонические представления случайных функций. Теория и применения. — 2-е изд. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2023. 816 с.
 11. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. — М.: Наука, 1981. 448 с.
 12. *Финогенко И. А.* О неявных функционально-дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Динамика нелинейных систем. — Новосибирск: Наука, 1983. С. 151–164.
 13. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. 277 с.
 14. *Борисов А. В.* Оптимальная фильтрация в системах с вырожденными шумами в наблюдениях // Автоматика и телемеханика, 1998. № 11. С. 32–45.
 15. *Босов А. В.* Управление линейным выходом марковской цепи по квадратичному критерию. Случай полной информации // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 19–26. doi: 10.14357/19922264220203. EDN: FEQKUN.
 16. *Коновалов М. Г., Разумчик Р. В.* Синтез управления двумерным случайным блужданием с эталонным стационарным распределением // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 109–117. doi: 10.14357/19922264220214. EDN: WVMOBH.
 17. *Босов А. В.* Исследование робастности численных аппроксимаций фильтра Вонэма // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 41–49. doi: 10.14357/19922264230206. EDN: BGILKR.
 18. *Босов А. В.* Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.

Поступила в редакцию 09.12.2024

Принята к публикации 15.05.2025

COMPLEX STATISTICAL CRITERION CONDITIONALLY OPTIMAL FILTERING METHODS FOR OBSERVABLE IMPLICIT STOCHASTIC SYSTEMS

I. N. Sinitsyn

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Paper is devoted to exact and approximate based on complex statistical criterion (CSC) conditionally-optimal filtering (COF) methods for continuous and discrete observable implicit non-Gaussian stochastic systems (StS) reducible to explicit. Survey of COF based on mean square criterion for explicit and implicit StS and CSC COF for explicit StS is given. Reduction methods for smooth and discontinuous implicit functions are presented. The CSC COF exact synthesis methods for reducible differential, regression, and autoregression StS are developed. For reduced StS with additive Gaussian noises and statistically linearized implicit functions generalization of Kalman and Kalman–Bucy filters is considered. Some future generalizations of exact and approximate CSC COF are mentioned.

Keywords: conditionally-optimal (in Pugachev sense) filter; normal approximation method (NAM); normal suboptimal filter (NSOF); stochastic process (StP); stochastic system (StS)

DOI: 10.14357/19922264250204

EDN: QMIXFW

References

1. Sinitsyn, I. N. 2024. Metody uslovno-optimal'noy fil'tratsii i ekstrapolyatsii v nablyudaemykh neyavnykh stokhasticheskikh sistemakh [Conditionally optimal filtering and extrapolation methods for observable implicit stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):2–9. doi: 10.14357/19922264240401. EDN: TFPJYK.
2. Sinitsyn, I. N. 2024. Uslovno-optimal'naya fil'tratsiya i ekstrapolyatsiya v neyavnykh differentsial'nykh gaussovskikh stokhasticheskikh sistemakh pri avtokorrelirovannoy pomekhe v nablyudeniyakh [Conditionally optimal filtering and extrapolation for differential Gaussian implicit stochastic systems at autocorrelated noise in observations]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):19–25. doi: 10.14357/19922264240403. EDN: CVUETK.
3. Sinitsyn, I. N. 2024. Diskretnoe uslovno-optimal'noe otsenivanie v neyavnykh nablyudaemykh stokhasticheskikh sistemakh [Discrete conditionally-optimal estimation in observable implicit stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(4):16–30. doi: 10.14357/08696527240402. EDN: TLHYA.
4. Sinitsyn, I. N. 2025. Metody normal'noy uslovno-optimal'noy fil'tratsii dlya nablyudaemykh neyavnykh stokhasticheskikh sistem [Normal conditionally-optimal filtering methods for implicit stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):44–51. doi: 10.14357/19922264250106. EDN: TEPFUE.
5. Sinitsyn, I. N., and V. I. Shin. 1992. Conditionally optimal filtering of processes in stochastic differential systems by complex statistical criteria. *Dokl. Math.* 44(2):554–557.
6. Sinitsyn, I. N., V. I. Shin, and E. R. Korepanov. 1993. Teoriya uslovno-optimal'noy fil'tratsii stokhasticheskikh protsessov po slozhno-statisticheskim kriteriyam [Theory of conditionally optimal filtering of stochastic processes according to complex statistical criteria]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 5:106–120.
7. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd ed. Moscow: Logos. 776 p.
8. Pugachev, V. S. 1962. *Teoriya sluchaynykh funktsiy i ee primeneniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of random functions and its application to automatic control problems]. 3rd ed. Moscow: Fizmatlit. 884 p.
9. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2001. *Stochastic systems. Theory and applications*. Singapore: World Scientific. 908 p.
10. Sinitsyn, I. N. 2023. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy. Teoriya i primeneniya* [Canonical expansions of random functions. Theory and applications]. 2nd ed. Moscow: TORUS PRESS. 816 p.
11. Kolmanovskiy, V. B., and V. R. Nosov. 1981. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledstviem* [Stability and periodic modes of regulated systems with consequences]. Moscow: Nauka. 448 p.
12. Finogenko, I. A. 1983. O neyavnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovom prostranstve [On implicit functional differential equations in a Banach space]. *Dinamika nelineynykh sistem* [Dynamics of nonlinear systems]. Novosibirsk: Nauka. 151–164.
13. Azbelev, N. V., V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatulina. 1991. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka. 277 p.
14. Borisov, A. 1998. Optimal filtering in systems with degenerate noises in observations. *Automat. Rem. Contr.* 59(11):1526–1537. EDN: LFDCVH.
15. Bosov, A. V. 2022. Upravlenie lineynym vykhodom markovskoy tsepi po kvadraticnomu kriteriyu. Sluchay polnoy informatsii [Linear output control of Markov chain by square criterion. Complete information case]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):19–26. doi: 10.14357/19922264220203. EDN: FEQKUN.
16. Konovalov, M. G., and R. V. Razumchik. 2022. Sintez upravleniya dvumernym sluchaynym bluzhdaniem s etalonnym statsionarnym raspredeleniem [Controlling a bounded two-dimensional Markov chain with a given invariant measure]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):109–117. doi: 10.14357/19922264220214. EDN: WVMOBH.
17. Bosov, A. V. 2023. Issledovanie robnosti chislennykh approksimatsiy fil'tra Vonema [Robustness investigation of the numerical approximation of the Wonham filter]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):41–49. doi: 10.14357/19922264230206. EDN: BGILKR.
18. Bosov, A. V. 2023. Optimal'naya fil'tratsiya sostoyaniya nelineynoy dinamicheskoy sistemy po nablyudeniyam so sluchaynymi zapazdyvaniyami [Nonlinear dynamic system state optimal filtering by observations with random delays]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.

Received December 9, 2024

Accepted May 15, 2025

Contributor

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЙ И ХАРАКТЕРИСТИК СЕТЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ ПО КОМПЛЕКСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ*

А. В. Борисов¹, Ю. Н. Куринов², Р. Л. Смелянский³

Аннотация: Работа посвящена использованию методов оптимальной фильтрации для решения задачи оценивания текущих характеристик сетевого соединения, функционирующего под управлением транспортного протокола TCP. В качестве доступной статистической информации используются измерения времени кругового обращения сегментов данных, джиттера, а также потоки потерь пакетов и таймаутов. Эволюция состояния соединения описывается классом специальных марковских скачкообразных процессов (СМСП): часть компонент определяет качественное состояние канала, другая часть — его количественные характеристики. Выбранная модель функционирования соединения и структура измерений позволяют строить оценки состояния и характеристик соединения, оптимальные как в классе линейных, так и произвольных функций наблюдений. Представлен численный пример, подтверждающий качество обеих оценок.

Ключевые слова: специальный марковский скачкообразный процесс; оптимальная оценка фильтрации; стохастическая дифференциальная система наблюдения; уравнение Кушнера—Стратоновича; фильтр Калмана—Бьюси

DOI: 10.14357/19922264250205

EDN: NSVAYD

1 Введение

Развитие аппаратной составляющей телекоммуникационных сетей идет параллельно с совершенствованием протоколов управления передачей данных. Несмотря на развитие новых транспортных протоколов типа QUIC и MsQuic [1, 2], большее внимание разработчиков направлено на совершенствование традиционного протокола TCP, повсеместно распространенного, постоянно развивающегося и успешно функционирующего в компьютерных сетях уже более полувека [3, 4]. Модификации TCP обычно связаны с его адаптацией к изменениям:

- аппаратной составляющей сетей;
- протоколов стека TCP/IP нижнего уровня;
- протоколов верхнего уровня;
- требований к устойчивости передачи данных, органичному делению доступных ресурсов канала между различными потоками;
- требований эффективности использования аппаратных ресурсов сети.

Механизм в протоколе, обеспечивающий устойчивую передачу данных и эффективное исполь-

зование канальных ресурсов, определяется так называемым алгоритмом управления перегрузкой (АУП) [5]. Именно эта часть протокола совершенствуется наиболее интенсивно [6–9].

Перегрузка возникает вследствие переполнения буферов сетевых устройств, что приводит к потерям пакетов, существенному снижению качества связи и необходимости повторной передачи потерянных данных. В свою очередь, переполнение буферов связано с тем, что сетевые устройства обслуживают одновременно несколько потоков, и доступная пропускная способность канала варьируется во времени и не наблюдаема. Исходя из этого, к АУП предъявляют следующие требования:

- по доступной статистической информации адаптивно управлять интенсивностью передачи данных;
- быстро восстанавливать скорость передачи после сбоев/потерь в канале;
- обеспечивать компромисс между интенсивностью передачи и потерями пакетов;
- обеспечивать гарантированную передачу пакетов.

* Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект № 23-Ш03-03. Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, aborisov@frccsc.ru

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, kurinovurij@gmail.com

³Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, smel@cs.msu.ru

Алгоритмы управления перегрузкой используют статистическую информацию, хранящуюся в заголовках пакетов, в подтверждениях получения пакетов, а также в некоторых служебных пакетах. Состав и структура этой информации остаются относительно неизменными. Различные версии TCP проводят предобработку этих данных, восстанавливая по ним различные события (потери пакетов, тайм-ауты и пр.) и характеристики (время кругового обращения сегмента данных — RTT, джиттер, доступный объем буфера «бутылочного горла» и пр.), и на их основе синтезируют управляющие воздействия: повторно передают потерянные пакеты, изменяют размер окна перегрузки и др. Для эффективного использования коммуникационных ресурсов структура статистической информации расширялась и одновременно усложнялись процессы ее обработки [6, 7].

На ранних этапах эксплуатации TCP сети были проводными, имели умеренную протяженность и емкость. В такой ситуации основными индикаторами перегрузки служили потери пакетов. Поэтому ранние версии TCP Tahoe, Reno и New Reno включали в себя АУП, основанные на информации о потерях пакетов.

Повышение протяженности каналов и их емкости и использование разнородных каналов (спутниковая связь, сотовая сеть, беспроводная связь) привели к ситуации, когда потеря пакетов перестала служить надежным индикатором перегрузки. Это обстоятельство послужило отправной точкой развития версий АУП, основанных на временных задержках. Для них показателем состояния канала, предшествующим перегрузке, стало увеличение RTT из-за заполнения буфера «бутылочного горла». К таким версиям TCP могут быть отнесены Vegas, NICE, FAST и др.

Дальнейшее повышение требований к эффективности использования канальных ресурсов привело к появлению гибридных АУП, основанных на потерях и задержках. В отличие от версий, упомянутых выше, данные алгоритмы быстрее восстанавливают скорость передачи после реакции на перегрузку канала. Помимо этого, они строят оценки показателей текущей доступной пропускной способности, например bandwidth-delay product, и на их основе выбирают интенсивность передачи данных. К версиям TCP такого рода относятся Illinois, BBR и Compound.

В [10] были предложены модель гетерогенного TCP-соединения и алгоритм мониторинга его качественного состояния, который позволил идентифицировать не только факты перегрузки, но и интервалы времени потери связи на беспроводных участках канала. Учет этих оценок позволил полу-

чить существенный прирост пропускной способности соединения.

Предлагаемая статья содержит математическое описание функционирования TCP-соединения как некоторой стохастической дифференциальной системы наблюдения, а также алгоритмы оценивания в реальном масштабе времени его качественного состояния и числовых характеристик производительности. Полученные оценки могут быть использованы при создании новых версий АУП или аппаратно-независимых мониторов состояния каналов. Работа организована следующим образом. В разд. 2 описано функционирование TCP-соединения. Раздел 3 содержит формализацию его математической модели и структуры доступной статистической информации. Проблема оценивания состояния и характеристик соединения представлена в форме задачи оптимальной фильтрации в стохастической системе наблюдения. Здесь же дан вид оценок фильтрации, оптимальных в классе линейных и произвольных преобразований имеющихся наблюдений. Раздел 4 содержит численный пример применения предложенных оценок и сравнительный анализ их качества. В разд. 5 представлены заключительные замечания и выводы.

2 Описание функционирования TCP-соединения

Рассмотрим функционирование TCP-соединения в рамках парадигмы стохастических динамических систем. Объектом интереса для использования в АУП является изменяющееся со временем состояние соединения. Оно характеризуется набором числовых показателей: RTT, джиттером, долей пакетов, теряемых при передаче, а также долей возникающих тайм-аутов. Все эти величины представляют собой результаты усреднения, причем оно может быть выполнено как в вероятностном смысле по пространству элементарных исходов, так и по времени. Поэтому естественно предположить, что временная эволюция этих средних значений носит кусочно-постоянный характер.

Числовых показателей TCP-соединения недостаточно для представления его состояния. Необходимо каким-то образом определять «качественный» сценарий функционирования соединения, например:

- штатная загрузка (буфер «бутылочного горла» канала пуст);
- состояние, предшествующее перегрузке (буфер «бутылочного горла» непуст);

- перегрузка канала (буфер «бутылочного горла» заполнен);
- потеря сигнала на беспроводном участке канала.

Знание текущего качественного состояния также может быть применено при синтезе управления перегрузкой. Например, состояние, близкое к перегрузке, должно стать поводом к снижению интенсивности передачи данных. Или потеря сигнала на беспроводном участке должна приводить к снижению интенсивности передачи, чтобы избежать повторной передачи потерянных пакетов.

Так как возможных качественных состояний может быть лишь конечное число, то их эволюция также описывается кусочно-постоянными функциями. Вполне естественно предполагать, что качественные и количественные показатели состояния соединения изменяются синхронно. В общем случае по совокупности числовых характеристик нельзя сделать гарантированный вывод о качественном состоянии соединения, и наоборот. Поэтому как числовые характеристики, так и качественное состояние ценны с информационной точки зрения.

Статистические данные, доступные на передающем узле, формируются из соответствующих полей заголовков пакетов и подтверждений передачи пакетов. Факты потерь пакетов или возникновения тайм-аутов в процессе передачи в этих «сырых данных» не регистрируются, а являются продуктом некоторой их предобработки. Результаты этой процедуры могут существенно отличаться. Например, в ранних версиях ТСР факт потери пакета фиксировался при повторном получении подтверждения пакета с одним и тем же номером [11]. С ростом канальной емкости повторные сообщения о получении пакетов с одним и тем же номером могли быть индикатором не потерь пакетов, а их «перемешивания» при передаче. Поэтому было решено фиксировать факт потери лишь при тройном подтверждении получения пакета с предыдущим номером [12]. В дальнейшем и этот вариант алгоритма регистрации потерь был оптимизирован с помощью механизма выборочных подтверждений и учета времени задержки [13]. Данный пример иллюстрирует значение процедур предобработки исходной статистической информации для получения размеченных данных, которые и используются для последующего мониторинга состояния ТСР-соединения. Результатом этих действий служат:

- зашумленные наблюдения RTT;
- зашумленные наблюдения джиттера;
- поток потерь пакетов;

- поток тайм-аутов, возникших в процессе функционирования соединения.

В следующем разделе будет предложена марковская стохастическая дифференциальная система наблюдения, описывающая эволюцию состояния соединения и комплекс доступной статистической информации.

3 Математическая модель ТСР-соединения и задача мониторинга его состояния

Состояние ТСР-соединения предлагается описывать с помощью СМСП [14, 15] $Z_t = \text{col}(\theta_t, Y_t)$, где θ_t — качественное состояние канала; Y_t — его числовые характеристики. Компонента θ_t представляет собой марковский скачкообразный процесс с множеством значений $\mathbb{S}^4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, матрицей интенсивностей переходов (МИП) Λ и начальным распределением p_0 . Описание качественных состояний соединения представлено в предыдущем разделе. Компонента $Y_t \in \mathbb{R}^4$ определяет текущие значения числовых характеристик соединения: Y_t^1 — значение RTT; Y_t^2 — джиттер; Y_t^3 — доля потерянных пакетов в информационном потоке; Y_t^4 — доля тайм-аутов, возникающих в соединении.

Распределение числовых характеристик канала описывается условными плотностями Y_t относительно θ_t :

$$\pi^n(y), n = \overline{1, 4}; \quad \pi(y) \triangleq \text{col}(\pi^1(y), \dots, \pi^4(y)).$$

Процесс Z_t непосредственно не наблюдаем, а доступная статистическая информация включает в себя непрерывные процессы

$$\begin{bmatrix} \xi_t^1 \\ \xi_t^2 \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} Y_s^1 \\ Y_s^2 \end{bmatrix} ds + \underbrace{\begin{bmatrix} r^{11} & r^{12} \\ r^{12} & r^{22} \end{bmatrix}}_{\triangleq R^{1/2}} \begin{bmatrix} w_t^1 \\ w_t^2 \end{bmatrix}$$

и процессы со считающими компонентами

$$\begin{bmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} Y_s^3 \\ Y_s^1 \\ Y_s^4 \\ Y_s^1 \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \mu_t^{\eta_1} \\ \mu_t^{\eta_2} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь ξ_t^1 и ξ_t^2 — соответственно наблюдения RTT и джиттера, зашумленные винеровскими процессами $\text{col}(w_t^1, w_t^2)$. Процесс η_t^1 считает потери пакетов, η_t^1 — тайм-ауты; процессы $\mu_t^{\eta_1}$ и $\mu_t^{\eta_2}$ представляют

собой мартингалы. Специфический вид нелинейных коэффициентов сноса в уравнении η_t^1 объясняется следующим образом. Интенсивность потерь пакетов прямо пропорциональна указанной доле потерянных пакетов Y_t^3 и интенсивности передачи данных, которая, в свою очередь, равна $1/Y_t^1$. Снос процесса η_t^2 объясняется аналогично.

Задача мониторинга состояния ТСР-соединения заключается в вычислении по наблюдениям $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{(\xi_s^1, \xi_s^2, \eta_s^1, \eta_s^2), 0 \leq s \leq t\}$ оценки $\hat{Z}_t$ состояния Z_t , минимизирующей критерий $E\{\|\hat{Z}_t - Z_t\|^2\}$.

Известно, что оптимальная оценка состояния совпадает с ее условным математическим ожиданием относительно имеющихся наблюдений: $\hat{Z}_t = E\{Z_t|\mathcal{O}_t\}$. Результаты [15, 16] гарантируют, что существует условная плотность распределения $\psi(t, y) = \text{col}(\psi^1(t, y), \dots, \psi^4(t, y))$, т. е. такая функция, что $\mathcal{P}\{\theta_t = e_n, Y_t \in \mathcal{A}|\mathcal{O}_t\} = \int_{\mathcal{A}} \hat{\psi}^n(t, y) dy$ для любых $n = \overline{1, 4}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^4)$. Условное среднее $\hat{f}(Z_t) = E\{f(Z_t)|\mathcal{O}_t\}$ любой интегрируемой функции $f(z)$ представимо в виде интеграла по $\hat{\psi}(t, y)$.

Функция $\hat{\psi}(t, y)$ определяется решением стохастической системы — обобщения уравнения Кушнера—Стратоновича:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(t, y) = & \text{diag}(p_0) \phi(y) + \\ & + \int_0^t \left[\text{diag} \lambda(s) \hat{\psi}(s-, y) + \text{diag} \pi(y) \tilde{\Lambda}^\top(s) \hat{\theta}_{s-} \right] ds + \\ & + \int_0^t \hat{\psi}(s-, y) \begin{bmatrix} y^1 - \hat{Y}_{s-}^1 & y^2 - \hat{Y}_{s-}^2 \end{bmatrix} R^{-1/2} d\nu_s + \\ & + \int_0^t \left[\frac{y^3/y^1}{(Y_{s-}^3/Y_{s-}^1)} - 1 \quad \frac{y^4/y^1}{(Y_{s-}^4/Y_{s-}^1)} - 1 \right] d\zeta_s, \quad (2) \end{aligned}$$

где $\lambda(t) \triangleq \text{col}(\Lambda_{11}(t), \dots, \Lambda_{44}(t))$, $\tilde{\Lambda}(t) \triangleq \Lambda(t) - \text{diag}(\lambda(t))$; ν_t и ζ_t — обновляющие процессы:

$$\nu_t \triangleq R^{-1/2} \int_0^t \left(\begin{bmatrix} d\xi_s^1 \\ d\xi_s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{Y}_{s-}^1 \\ \hat{Y}_{s-}^2 \end{bmatrix} ds \right);$$

$$\zeta_t \triangleq \int_0^t \left(\begin{bmatrix} d\eta_s^1 \\ d\eta_s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{Y_{s-}^3}{Y_{s-}^1} \right) \\ \left(\frac{Y_{s-}^4}{Y_{s-}^1} \right) \end{bmatrix} ds \right).$$

Система (2) может быть решена численно с помощью сеточного метода, который можно трактовать как обобщение методов, предложенных

в [17, 18] для оценивания марковских скачкообразных процессов с конечным множеством состояний. С уменьшением шага h сетки по пространственной переменной уменьшается и ошибка численной аппроксимации, однако число операций растет пропорционально h^{-4} .

Состояние системы может быть расширено таким образом [14], чтобы полученная система наблюдения стала линейной. В этом случае стандартный фильтр Калмана—Бьюси [19] доставляет оптимальную оценку в классе линейных преобразований наблюдений. При этом трудоемкость этого алгоритма фильтрации постоянна.

Исходный процесс состояния Z_t — восьмимерный. Расширим вектор состояния:

$$Z_t \triangleq \text{vec} \left(\text{col} \left(Z_t, \frac{Y_t^3}{Y_t^1}, \frac{Y_t^4}{Y_t^1} \right) \otimes \theta_t \right)$$

есть 40-мерный вектор, сформированный из элементов кронекерова произведения столбцов $\text{col}(Z_t, Y_t^3/Y_t^1, Y_t^4/Y_t^1)$ и θ_t . Расширенное состояние описывается решением системы линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t A(s) Z_s ds + \mu_t^Z,$$

где $A(s)$ — некоторая известная матричнозначная функция; μ_t^Z — квадратично интегрируемый мартингал, процесс с ортогональными приращениями, с известной дифференциальной ковариацией $R^Z(t)$:

$$E\{\mu_t^Z (\mu_t^Z)^\top\} = \int_0^t R^Z(s) ds.$$

Так как функции сноса в считающих наблюдениях (1) добавлены в расширенный вектор Z_t , объединенный процесс наблюдений также может быть представлен в линейной форме

$$\Xi_t \triangleq \begin{bmatrix} \xi_t^1 \\ \xi_t^2 \\ \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \end{bmatrix} = \int_0^t B(s) Z_s ds + \underbrace{\int_0^t \begin{bmatrix} r^{11} & r^{12} & 0 & 0 \\ r^{12} & r^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} w_s^1 \\ w_s^2 \\ \mu_s^{\eta_1} \\ \mu_s^{\eta_2} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mu_t^\Xi},$$

где $B(t)$ — известная неслучайная матричнозначная функция; μ_t^Ξ представляет собой квадратично интегрируемый мартингал, процесс с ортогональными приращениями и известной дифференциальной ковариацией $R_t^\Xi(s)$:

$$E\{\mu_t^\Xi (\mu_t^\Xi)^\top\} = \int_0^t \underbrace{\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & B(s) R^Z(s) B^\top(s) \end{bmatrix}}_{\triangleq R_t^\Xi(s)} ds.$$

Линейная оптимальная оценка фильтрации $\bar{Z}_t$ и матрица $k(t)$ ее ошибки определяется фильтром Калмана—Бьюси:

$$\begin{aligned} d\bar{Z}_t &= A(t)\bar{Z}_t dt + \\ &+ k(t)B^\top(t) (R_t^\Xi(t))^{-1} (d\Xi_t - B(t)\bar{Z}_t dt), \\ \bar{Z}_0 &= E\{Z_0\}; \\ \dot{k}(t) &= A(t)k(t) + k(t)A^\top(t) + R^Z(t) - \\ &- k(t)B^\top(t) (R_t^\Xi(t))^{-1} B(t)k(t), \\ k(0) &= \text{cov}(Z_0, Z_0). \end{aligned}$$

В следующем разделе проведено сравнение качества линейной и нелинейной оценок на конкретном численном примере.

4 Численный пример мониторинга

Рассматривается задача мониторинга скрытого состояния Z_t , $t \in [0, 150]$. Пример упрощен: в качестве числовых характеристик соединения рассмат-

риваются только среднее RTT Y_t^1 , доля потерь пакетов Y_t^2 и доля тайм-аутов Y_t^3 .

Матрица интенсивностей переходов Λ и начальное распределение p_0 компоненты θ_t равны

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,051 & 0,050 & 0 & 0,001 \\ 0,200 & -0,268 & 0,067 & 0,001 \\ 0 & 0,333 & -0,334 & 0,001 \\ 0,033 & 0 & 0 & -0,033 \end{bmatrix};$$

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0,748 \\ 0,186 \\ 0,037 \\ 0,029 \end{bmatrix}.$$

Отдельные компоненты Y взаимно независимы и имеют следующие условные распределения относительно θ :

— компонента Y^1 :

$$\begin{aligned} \pi^1(y_1|\theta = e_1) &= \mathcal{R}_{[0,015, 0,020]}(y_1); \\ \pi^1(y_1|\theta = e_2) &= \mathcal{R}_{[0,018, 0,023]}(y_1); \\ \pi^1(y_1|\theta = e_3) &= \mathcal{R}_{[0,022, 0,027]}(y_1); \\ \pi^1(y_1|\theta = e_4) &= \mathcal{R}_{[0,024, 0,029]}(y_1); \end{aligned}$$

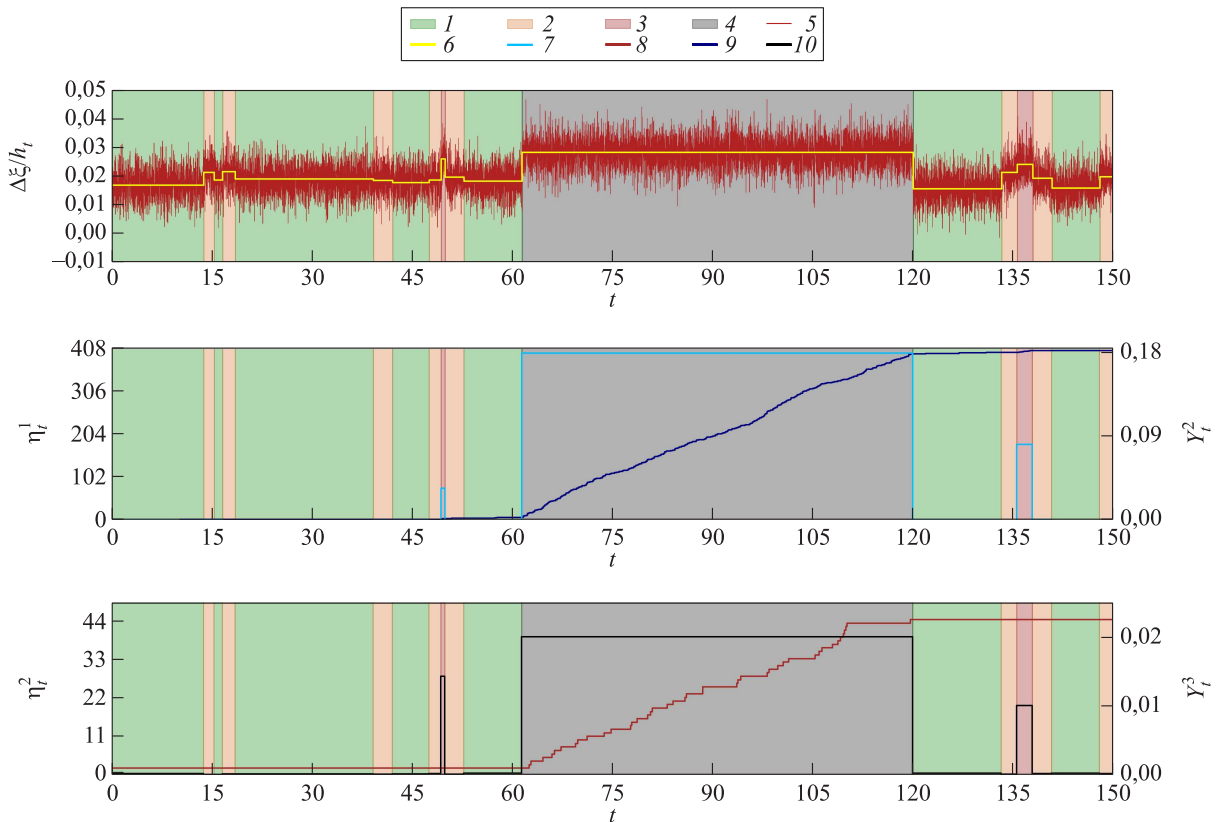


Рис. 1 Числовые характеристики и их наблюдения: 1 — $\theta_t = e_1$; 2 — e_2 ; 3 — e_3 ; 4 — $\theta_t = e_4$; 5 — $\Delta\xi/h_t$; 6 — Y_t^1 ; 7 — Y_t^2 ; 8 — Y_t^3 ; 9 — η_t^1 ; 10 — η_t^2

— компонента Y^2 :

$$\pi^2(y_2|\theta = e_1) = \mathcal{R}_{[0,0005, 0,0015]}(y_2);$$

$$\pi^2(y_2|\theta = e_2) = \mathcal{R}_{[0,0005, 0,0015]}(y_2);$$

$$\pi^2(y_2|\theta = e_3) = \mathcal{R}_{[0,01, 0,1]}(y_2);$$

$$\pi^2(y_2|\theta = e_4) = \mathcal{R}_{[0,05, 0,2]}(y_2);$$

— компонента Y^3 :

$$\pi^3(y_3|\theta = e_1) = \mathcal{R}_{[0,0001, 0,0003]}(y_3);$$

$$\pi^3(y_3|\theta = e_2) = \mathcal{R}_{[0,0001, 0,0003]}(y_3);$$

$$\pi^3(y_3|\theta = e_3) = \mathcal{R}_{[0,002, 0,02]}(y_3);$$

$$\pi^3(y_3|\theta = e_4) = \mathcal{R}_{[0,01, 0,04]}(y_3).$$

Интенсивность шумов в наблюдениях РТТ равна $\sigma = 0,0005$. Состояние системы моделировалось с шагом дискретизации $\delta_t = 10^{-3}$, наблюдения — с шагом $h_t = 10^{-1}$. Уравнения оптимальной фильтрации решались с шагом $h_t = 10^{-1}$ по времени, уравнение для условной плотности решалось с шагами $\Delta_{y^1} = 7 \cdot 10^{-5}$ и $\Delta_{y^2} = 9,975 \cdot 10^{-5}$ по пространственным переменным.

На рис. 1 представлены истинные значения состояний и характеристик соединения и имеющиеся наблюдения.

На рис. 2 приведена эволюция качественного состояния θ_t , его оптимальной линейной $\bar{\theta}_t$ и нелинейной $\hat{\theta}_t$ оценок. Легко видеть, что качество линейных оценок состояния $\theta_t = e_2$ и $\theta_t = e_3$ посредственное. Это связано со структурой доступных наблюдений и значениями параметров моделируемой системы наблюдения.

Во-первых, измерению доступны лишь зашумленные функции числовых характеристик, но не качественные состояния соединения. При этом в рассматриваемом примере знание характеристик Y не позволяет точно восстановить θ .

Во-вторых, среднее время пребывания θ_t в состояниях e_2 и e_3 равно соответственно 3,73 и 2,994, а в состояниях e_1 и e_4 — в 5–10 раз больше. Такая же пропорция сохраняется между числом наблюдений, полученных в период пребывания θ_t в состояниях e_2 и e_3 , по сравнению с e_1 и e_4 .

В-третьих, средние значения компоненты Y_t^1 в зависимости от текущего значения θ_t равны соответственно 0,0175, 0,0205, 0,0245 и 0,0265 и одинаковые средние квадратичные отклонения 0,00144. Состояния e_2 и e_3 «очень быстрые»: алгоритм оптимальной линейной фильтрации не позволяет надежно их идентифицировать при коротких интервалах появления и низком значении соотношения сигнал/шум.

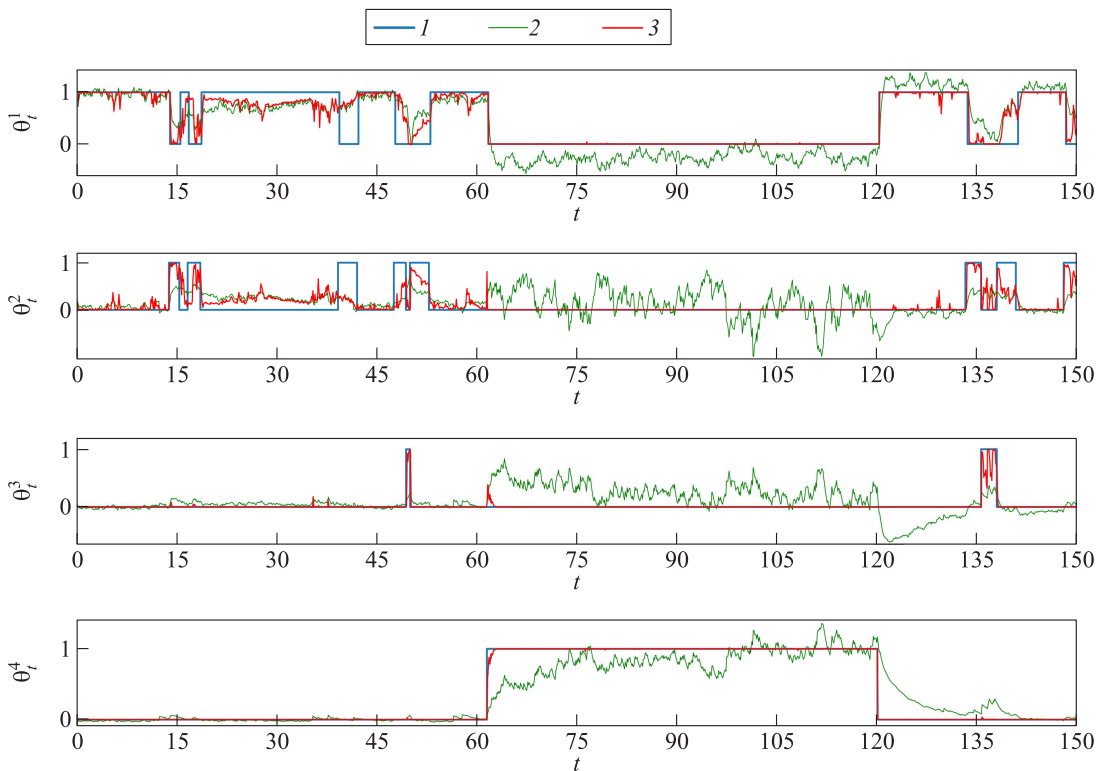


Рис. 2 Качественное состояние соединения и его оценки: 1 — θ_t ; 2 — $\bar{\theta}_t$; 3 — $\hat{\theta}_t$

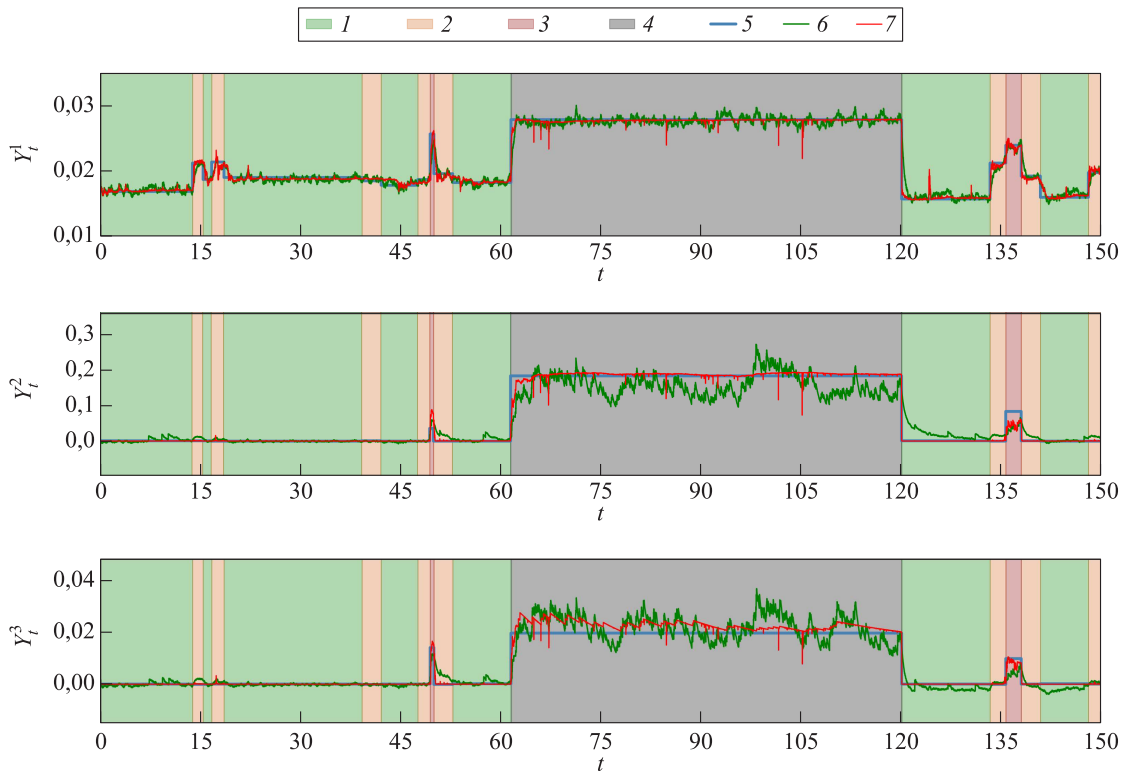


Рис. 3 Числовые характеристики соединения и его оценки: 1 — $\theta_t = e_1$; 2 — e_2 ; 3 — e_3 ; 4 — $\theta_t = e_4$; 5 — Y_t ; 6 — $\bar{Y}_t$; 7 — $\hat{Y}_t$

На рис. 3 представлено изменение числовых характеристик ТСР-соединения, а также их оптимальных линейных и нелинейных оценок. При этом качество как линейных, так и нелинейных оценок достаточно высокое.

Для формального сравнения качества оценок воспользуемся следующим показателем. Пусть X_t — оцениваемый процесс (θ_t или компоненты Y_t^1 , Y_t^2 и Y_t^3), а $\tilde{X}_t$ — его оценка (оптимальная линейная или нелинейная). В качестве характеристики точности воспользуемся значением

$$\rho^X \triangleq 1 - \frac{\int_0^T \mathbb{E} \{ \|X_t - \tilde{X}_t\|^2 \} dt}{\int_0^T \mathbb{E} \{ \|X_s - \mathbb{E} \{ X_s \} \|^2 \} ds},$$

который близок по смыслу к коэффициенту детерминации [20]. Числитель дроби вычислялся методом Монте-Карло по пучку траекторий $N_{\text{sam}} = 5000$. В таблице представлены соответствующие коэффициенты.

Сравнение точности линейной и нелинейной оценок

Оценка	ρ^θ	ρ^{Y^1}	ρ^{Y^2}	ρ^{Y^3}
Линейная	0,374	0,921	0,828	0,76
Нелинейная	0,67	0,955	0,928	0,882

Оба фильтра демонстрируют умеренное качество оценивания компоненты θ , в то время как качество оценивания Y — высокое. Тем не менее следует помнить, что предложенные оценки — лучшие в своих классах и повышение их качества возможно только при наличии какой-либо дополнительной статистической информации.

5 Заключение

Обе оценки, линейная и нелинейная, обладают сильными и слабыми сторонами. Нелинейная оценка — наилучшая среди всех, и ее преимущество в качестве видно в приведенном численном примере. Тем не менее для ее расчета необходим значительный объем ресурсов, причем он зависит как от требуемой вычислительной точности, так и от априорной информации о распределении числовых характеристик соединения. Если размер носителей распределений значителен, то потребуются существенное число точек — узлов сетки. Использование алгоритма нелинейной фильтрации также подразумевает знание априорных распределений $\pi(\cdot)$. Таким образом, непосредственное использование предложенного алгоритма нелинейной фильтрации в новых версиях АУП вряд ли возможно, однако этот алгоритм был бы полезен как часть аппаратно-

независимых мониторов, контролирующих состояние сети.

Объем вычислений, необходимый для реализации оптимальной линейной оценки, не зависит от распределения $\pi(\cdot)$ и незначителен. Процедуры такого вида могут быть включены в новые версии АУП. Далее, линейная оценка не нуждается в детальном знании данных этих распределений, но только их моментных характеристик первого и второго порядка. Это, в свою очередь, упрощает процедуру идентификации параметров, необходимых для реализации линейного фильтра. Помимо собственно оценок состояний и параметров ТСП-соединения линейный фильтр предоставляет ковариационную матрицу своей ошибки, которая, в свою очередь, характеризует точность оценки. Тем не менее помимо проигрыша в точности линейные оценки имеют еще один недостаток. Известно, что условное математическое ожидание компоненты θ_t представляет собой условное распределение качественного состояния ТСП-соединения: оно обладает условием неотрицательности и нормировки. В отличие от нелинейной, оптимальная линейная оценка не обладает свойством неотрицательности. Для восстановления этого свойства линейная оценка должна претерпеть дополнительные нелинейные преобразования, снижающие ее точность.

Прежде применения обе оценки нуждаются в дополнительных исследованиях. Во-первых, необходимо создать процедуры предобработки исходных «сырых наблюдений». В особенности это касается процедур осреднения, одновременно вычисляющих RTT и джиттер. Помимо этого, процедуры должны быть адаптированы к обработке более широкого класса наблюдений, включая косвенные бесшумовые [21]. Во-вторых, алгоритмы фильтрации нуждаются в знании МПП Λ , распределений $\pi(\cdot)$ и/или их моментных характеристик, что делает актуальной разработку соответствующих процедур идентификации. В-третьих, необходимо исследовать устойчивость предложенных алгоритмов фильтрации по отношению к неопределенности вероятностных характеристик модели соединения.

Литература

1. RFC 9000 — QUIC: A UDP-based multiplexed and secure transport. IETF. doi: 10.17487/RFC9000. <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc9000>
2. Jones L. Microsoft's in-house QUIC connections library is now open source. — WinBuzzer, 2020. <https://winbuzzer.com/2020/04/29/microsofts-in-house-quic-connections-library-is-now-open-source-cxwbn/>.
3. Machora L. A survey of transmission control protocol variants // World J. Advanced Research Reviews, 2024. Vol. 21. No. 3. P. 1828–1853. doi: 10.30574/wjarr.2024.21.3.0886.
4. Murkonen T. Performance, privacy, and security issues of TCP/IP at the application layer: A comprehensive survey // GSC Advanced Research Reviews, 2024. Vol. 18. No. 3. P. 234–264. doi: 10.30574/gscarr.2024.18.3.0106.
5. Low S., Paganini F., Doyle J. Internet congestion control // IEEE Contr. Syst. Mag., 2002. Vol. 22. No. 1. P. 28–43. doi: 10.1109/37.980245.
6. Polese M., Chiariotti F., Bonetto E., et al. A survey on recent advances in transport layer protocols // IEEE Commun. Surv. Tut., 2019. Vol. 21. No. 4. P. 3584–3608. doi: 10.1109/COMST.2019.2932905.
7. Al-Saadi R., Armitage G., But J., Branch Ph. A survey of delay-based and hybrid TCP congestion control algorithms // IEEE Commun. Surv. Tut., 2019. Vol. 21. No. 4. P. 3609–3638. doi: 10.1109/COMST.2019.2904994.
8. Lorincz J., Klarin Z., Ovegovic J. A comprehensive overview of TCP congestion control in 5G networks: Research challenges and future perspectives // Sensors — Basel, 2021. Vol. 21. No. 13. Art. 4510. 41 p. doi: 10.3390/s21134510.
9. Korbi Y., Zhani M., Kaippallimalil J. Congestion control in Wi-Fi networks — state of the art, performance evaluation, and key research directions // IEEE Access, 2024. Vol. 12. P. 94972–94989. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3425271.
10. Borisov A., Bosov A., Miller G., Sokolov I. Partial diffusion Markov model of heterogeneous TCP link: Optimization with incomplete information // Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 14. Art. 1632. 31 p. doi: 10.3390/math9141632.
11. Jacobson V. Congestion avoidance and control // ACM SIGCOMM Comp. Com., 1998. Vol. 18. No. 4. P. 314–329. doi: 10.1145/52325.52356.
12. Mathis M., Semke J., Mahdavi J., et al. The macroscopic behavior of the TCP congestion avoidance algorithm // ACM SIGCOMM Comp. Com., 1997. Vol. 27. No. 3. P. 67–82. doi: 10.1145/263932.264023.
13. Cheng Y., Cardwell N., Dukkupati N., Jha P. The RACK-TLP loss detection algorithm for TCP. IETF. RFC 8985. 2021. <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc8985>.
14. Борисов А., Куринов Ю., Смялянский Р. Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
15. Борисов А., Куринов Ю., Смялянский Р. Фильтрация состояний класса марковских скачкообразных процессов по разнородным наблюдениям с аддитивными шумами // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 10–18. doi: 10.14357/19922264240402. EDN: FEMNQL.
16. Borisov A. Filtering of hidden Markov renewal processes by continuous and counting observations // AIMS Mathematics, 2024. Vol. 9. No. 11. P. 30073–30099. doi: 10.3934/math.20241453.

17. Борисов А. Численные схемы фильтрации марковских скачкообразных процессов по дискретизованным наблюдениям II: случай аддитивных шумов // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 1. С. 17–23. doi: 10.14357/19922264200103. EDN: BDUYGW.
18. Борисов А. Общий порядок аппроксимации оценок фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по дискретизованным наблюдениям // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 8–13. doi: 10.14357/19922264220402. EDN: ASRYJD.
19. Kalman R., Bucy R. New results in linear filtering and prediction theory // J. Basic Eng. — T. ASME, 1961. Vol. 83. No. 1. P. 95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
20. Draper N., Smith H. Applied regression analysis. — 3rd ed. — Wiley ser. in probability and statistics. — John Wiley & Sons, Inc. 1998. 736 p. doi: 10.1002/9781118625590.
21. Борисов А. Фильтрация состояний и параметров специальных марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям без шума // Информатика и её применения, 2024. Т. 19. Вып. 1. С. 25–32. doi: 10.14357/19922264250104. EDN: MZAJVZ.

Поступила в редакцию 18.03.2024

Принята к публикации 15.05.2025

MATHEMATICAL SUPPORT FOR MONITORING OF STATES AND NUMERICAL CHARACTERISTICS OF NETWORK CONNECTION BASED ON COMPOUND STATISTICAL INFORMATION

A. V. Borisov¹, Yu. N. Kurinov², and R. L. Smeliansky²

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: The paper focuses on the application of optimal filtering methods to estimate the current qualitative states and numerical characteristics of a TCP link. The available statistical information includes measurements of round-trip times, jitter, and the flows of packet losses and timeouts. The evolution of the link state is modeled using a special class of Markov jump processes where one set of components defines the qualitative state of the channel while the other represents its quantitative characteristics. The proposed stochastic model and measurement structure enable the filtering of both the state and characteristics of the TCP link, yielding estimates that are optimal in both the class of linear and arbitrary transformations of the available observations. A numerical example is provided to validate the accuracy of these estimates.

Keywords: special Markov jump process; optimal filtering estimate; stochastic differential observation system; Kushner–Stratonovich equation; Kalman–Bucy filter

DOI: 10.14357/19922264250205

EDN: NSVAYD

Acknowledgments

The work was done with the support of MSU Program of Development, Project No. 23-SCH03-03. The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. RFC 9000 — QUIC: A UDP-based multiplexed and secure transport. IETF. doi: 10.17487/RFC9000. Available at: <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc9000> (accessed May 26, 2025).
2. Jones, L. 2020. Microsoft’s in-house QUIC connections library is now open source. WinBuzzer. Available at: <https://winbuzzer.com/2020/04/29/microsofts-in-house-quic-connections-library-is-now-open-source-xcxwbn/> (accessed May 26, 2025).
3. Machora, L. 2024. A survey of transmission control protocol variants. *World J. Advanced Research Reviews* 21(03):1828–1853. doi: 10.30574/wjarr.2024.21.3.0886.
4. Murkonen, T. 2024. Performance, privacy, and security issues of TCP/IP at the application layer: A comprehensive survey. *GSC Advanced Research Reviews* 18(3):234–264. doi: 10.30574/gscarr.2024.18.3.0106.

5. Low, S., F. Paganini, and J. Doyle. 2002. Internet congestion control. *IEEE Contr. Syst. Mag.* 22(1):28–43. doi: 10.1109/37.980245.
6. Polese, M., F. Chiariotti, E. Bonetto, *et al.* 2019. A survey on recent advances in transport layer protocols. *IEEE Commun. Surv. Tut.* 21(4):3584–3608. doi: 10.1109/COMST.2019.2932905.
7. Al-Saadi, R., G. Armitage, J. But, and Ph.Branch. 2019. A survey of delay-based and hybrid TCP congestion control algorithms. *IEEE Commun. Surv. Tut.* 21(4):3609–3638. doi: 10.1109/COMST.2019.2904994.
8. Lorincz, J., Z. Klarin, and J. Ožegović. 2021. A comprehensive overview of TCP congestion control in 5G networks: Research challenges and future perspectives. *Sensors — Basel* 21(13):4510. 41 p. doi: 10.3390/s21134510.
9. Korbi, Y., M. F. Zhani, and J. Kaippallimalil. 2024. Congestion control in Wi-Fi networks — state of the art, performance evaluation, and key research directions. *IEEE Access* 12:94972–94989. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3425271.
10. Borisov, A., A. Bosov, G. Miller, and I. Sokolov. 2021. Partial diffusion Markov model of heterogeneous TCP link: Optimization with incomplete information. *Mathematics* 9(14):1632. 31 p. doi: 10.3390/math9141632.
11. Jacobson, V. 1998. Congestion avoidance and control. *ACM SIGCOMM Comp. Com.* 18(4):314–329. doi: 10.1145/52325.52356.
12. Mathis, M., J. Semke, J. Mahdavi, *et al.* 1997. The macroscopic behavior of the TCP congestion avoidance algorithm. *ACM SIGCOMM Comp. Com.* 27(3):67–82. doi: 10.1145/263932.264023.
13. Cheng, Y., N. Cardwell, N. Dukkupati, and P. Jha. 2021. The RACK-TLP loss detection algorithm for TCP. IETF RFC 8985. Available at: <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc8985> (accessed May 26, 2025).
14. Borisov, A. V., Yu. N. Kurinov, and R. L. Smelyansky. 2024. Veroyatnostnyy analiz klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov [Probabilistic analysis of a class of Markov jump processes]. *Informatika i ee primeneniya* — *Inform. Appl.* 18(3):30–37. doi: 10.14357/1992264240304. EDN: XPVTGJ.
15. Borisov, A. V., Yu. N. Kurinov, and R. L. Smelyansky. 2024. Fil'tratsiya sostoyaniy klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov po raznorodnym nablyudeniyam s additivnymi shumami [Filtering of a class of Markov jump processes by heterogeneous observations with additive noises]. *Informatika i ee primeneniya* — *Inform. Appl.* 18(4):10–18. doi: 10.14357/1992264240402. EDN: FEMNQL.
16. Borisov, A. 2024. Filtering of hidden Markov renewal processes by continuous and counting observations. *AIMS Mathematics* 9(11):30073–30099. doi: 10.3934/math.20241453.
17. Borisov, A. V. 2020. Chislennyye skhemy fil'tratsii markovskikh skachkoobraznykh protsessov po diskretizovannym nablyudeniyam II: sluchay additivnykh shumov [Numerical schemes of Markov jump process filtering given discretized observations II: Additive noise case]. *Informatika i ee primeneniya* — *Inform. Appl.* 14(1):17–23. doi: 10.14357/1992264200103. EDN: BDUYGW.
18. Borisov, A. V. 2022. Obshchiy poryadok approksimatsii otsenok fil'tratsii sostoyaniy markovskikh skachkoobraznykh protsessov po diskretizovannym nablyudeniyam [Total approximation order for Markov jump process filtering given discretized observations]. *Informatika i ee primeneniya* — *Inform. Appl.* 16(4):8–13. doi: 10.14357/1992264220402. EDN: ASRYJD.
19. Kalman, R. E., and R. S. Bucy. 1961. New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng. — T. ASME* 83(1):95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
20. Draper, N., and H. Smith. 1998. *Applied regression analysis*. 3rd ed. Wiley ser. in probability and statistics. John Wiley & Sons, Inc. 736 p. doi: 10.1002/9781118625590.
21. Borisov, A. V. 2025. Fil'tratsiya sostoyaniy i parametrov spetsial'nykh markovskikh skachkoobraznykh protsessov po kosvennym nablyudeniyam bez shuma [Filtering of states and parameters of special Markov jump processes via indirect perfect observations]. *Informatika i ee primeneniya* — *Inform. Appl.* 19(1):25–32. doi: 10.14357/1992264250104. EDN: MZAJVZ.

Received March 18, 2024

Accepted May 15, 2025

Contributors

Borisov Andrey V. (b. 1965) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; aborisov@frcsc.ru

Kurinov Yuri N. (b. 2002) — bachelor student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; kurinovurij@gmail.com

Smelyansky Ruslan L. (b. 1950) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, head of department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; smel@cs.msu.ru

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

Ю. И. Битюков¹, П. Ю. Битюков²

Аннотация: Технология лазерных сканеров позволяет получать точечное изображение поверхностей с высокой степенью детализации, поэтому задача реконструкции поверхности (области) по облаку точек привлекает в последнее время большое внимание. С такой задачей сталкиваются в реверс-инжиниринге, археологии и т. д. Основная трудность, возникающая при решении общих задач восстановления поверхности, заключается в том, что поверхность, которую необходимо восстановить, как правило, не является графиком какой-то скалярной функции. Одним из методов, используемых для решения задачи реконструкции, стал метод, основанный на вейвлетах и алгоритме Брегмана, с помощью которого находятся коэффициенты разложения искомой функции, определяющей область, по масштабирующим функциям. При этом в работах не уделяется внимание биортогональным вейвлетам, в частности сплайн-вейвлетам, представляющим собой основной инструмент в задачах геометрического моделирования (NURBS-кривые и поверхности), поскольку в задачах реального проектирования часто требуется локальное видоизменение поверхности и знание аналитического выражения для масштабирующих функций, что и обеспечивается применением сплайн-вейвлетов. В данной статье разработан алгоритм построения гладкой аппроксимации характеристической функции ограниченной области пространства, граница которой содержит заданное облако точек, полученное каким-либо образом, например лазерным сканированием. Для работы алгоритма необходимо лишь задать две последовательности, определяющие семейство биортогональных вейвлетов. Искомая аппроксимация находится в виде разложения по одному из семейств масштабирующих функций (гладких), при этом не требуется составление матрицы значений этих функций в точках облака для определения коэффициентов разложения. Сами коэффициенты находятся с помощью алгоритма Брегмана и дискретного преобразования Фурье.

Ключевые слова: вейвлет; вейвлет-фрейм; вейвлет-преобразование; дискретное преобразование Фурье; геометрическое моделирование; алгоритм Брегмана

DOI: 10.14357/19922264250206

EDN: DWCTWL

1 Введение

В последние годы благодаря быстрому развитию технологии лазерных сканеров, которая позволяет получать точечное изображение поверхностей с высокой степенью детализации, задача реконструкции поверхности (области) по облаку точек привлекла большое внимание. Эта задача возникает в таких областях, как реверс-инжиниринг, археология, получение моделей многолетних конструкций, например для их реконструкции, и т. д.

Основная трудность, возникающая при решении общих задач восстановления поверхности, заключается в том, что поверхность, которую необходимо восстановить, как правило, не является графиком какой-то скалярной функции. Одним из методов, используемых для решения такой задачи, стал метод вейвлет-фреймов, представленный в работах [1, 2]. В работе [1] моделирование области по облаку точек ее границы начинается с того,

что по облаку строится приближение характеристической функции области, а затем с помощью вейвлет-фреймов оно аппроксимируется гладкой функцией $g(x, y, z)$, которая представляет собой линейную комбинацию масштабирующих функций. Область задается неравенством $g(x, y, z) \geq \eta$, $\eta \in (0; 1]$, а восстанавливаемая поверхность задается уравнением $g(x, y, z) = \eta$. В работе [2] требуется нахождение значений масштабирующих функций в точках облака и построение матрицы из этих значений. В обеих работах аппроксимация ищется с помощью алгоритма Брегмана.

Нужно заметить, что масштабирующие функции редко когда известны в аналитическом виде, и матрицу системы линейных уравнений, которая имеет в данной задаче огромные размеры и из которой находятся коэффициенты линейной комбинации, составить затруднительно. Кроме того, в задачах реального проектирования часто требуется не просто создать поверхность по полученному,

¹Московский авиационный институт, yib72@mail.ru

²Московский энергетический институт, p.bityukoff@yandex.ru

например трехмерным сканированием, облаку точек, но также иметь возможность редактировать и видоизменять построенную поверхность. Этим объясняется широкое применение биортогональных сплайн-вейвлетов, где масштабирующие функции (В-сплайны) известны в аналитическом виде и существуют несложные методы локального изменения формы поверхности (области) посредством изменения положения вершин характеристического многогранника. Кроме перечисленного для биортогональных вейвлетов существует схема подъема [3], которая совместно с результатами теории схем подразделений [4] позволяет строить биортогональные вейвлет-системы с заданными свойствами. Интересные варианты использования ортогональных (вейвлетов Шеннона–Котельникова), биортогональных на основе схемы подъема и полуортогональных вейвлет-систем применительно к различным задачам интерполяции и аппроксимации представлены в работах [5–9].

В данной статье разрабатывается алгоритм нахождения гладкой аппроксимации функции, определяющей ограниченную область пространства, граница которой содержит данное облако точек, на основе произвольных (в том числе и сплайн-вейвлетов) биортогональных вейвлетов. Нужно отметить, что функция, описывающая область, также ищется в виде линейной комбинации масштабирующих функций, но матрица системы, из которой могут быть найдены коэффициенты этой комбинации, не выписывается. В статье сохранена идея приближения характеристической функции области, но способ ее построения отличается. Так, в работе [1] это приближение строится с использованием функции, значение которой в каждой точке пространства равно расстоянию от этой точки до облака точек. Ее нахождение занимает достаточно много времени, особенно в трехмерном случае. Поэтому в данной статье приближение характеристической функции находится с помощью свертки и морфологического алгоритма заполнения области.

2 Биортогональные вейвлеты

Пусть φ и $\tilde{\varphi}$ — две масштабирующие функции [10, 11] с масштабными последовательностями u и $\tilde{u}$, которые имеют конечные носители:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k \varphi(2t - k); \\ \tilde{\varphi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_k \tilde{\varphi}(2t - k).\end{aligned}$$

Будем рассматривать последовательности с действительными членами $u_k, \tilde{u}_k \in \mathbf{R}$. Обозначим

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k).$$

Тогда если ψ и $\tilde{\psi}$ — соответствующие вейвлеты, то

$$\psi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} v_k \varphi_{1,k}; \quad \tilde{\psi} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_k \tilde{\varphi}_{1,k}.$$

Как известно, в случае биортогональных вейвлет-систем для $F \in L_2(\mathbf{R})$ имеет место равенство [11]:

$$\begin{aligned}F &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\varphi}_{j,n}) \varphi_{j,n} + \sum_{s \geq j} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\psi}_{s,n}) \psi_{s,n} = \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{j,n} \phi_{j,n} + \sum_{s \geq j} \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_{s,n} \psi_{s,n},\end{aligned}$$

где $c_{j,k} = (f, \tilde{\varphi}_{j,k})$, $d_{j,m} = (f, \tilde{\psi}_{j,m})$, а также справедливы алгоритм вейвлет-разложения [11]

$$c_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_{k-2n} c_{j+1,k}; \quad d_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_{k-2n} c_{j+1,k}$$

и алгоритм вейвлет-восстановления [11]

$$c_{j+1,k} = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} c_{j,\alpha} u_{k-2\alpha} + \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} d_{j,\alpha} v_{k-2\alpha}.$$

При рассмотрении вейвлетов в $L_2(\mathbf{R}^s)$, $s \in \mathbf{N}$, отметим, что если

$$\begin{aligned}F &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbf{Z}} (c^j[1])_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} \varphi_{j,\lambda_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j,\lambda_s} = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_s \in \mathbf{Z}} (c^{j-1}[1])_{k_1, \dots, k_s} \varphi_{j-1,k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j-1,k_s} + \\ &+ \sum_{m_1, \dots, m_s \in \mathbf{Z}} (c^{j-1}[2])_{m_1, \dots, m_s} \psi_{j-1,m_1} \otimes \varphi_{j-1,m_2} \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes \varphi_{j-1,m_s} + \dots + \\ &+ \sum_{l_1, \dots, l_s \in \mathbf{Z}} (c^{j-1}[2^s])_{l_1, \dots, l_s} \psi_{j-1,l_1} \otimes \dots \otimes \psi_{j-1,l_s},\end{aligned}$$

то справедливы алгоритм вейвлет-восстановления

$$\begin{aligned}(c^j[1])_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} &= \sum_{k_1, \dots, k_s \in \mathbf{Z}} (c^{j-1}[1])_{k_1, \dots, k_s} \times \\ &\quad \times (u \otimes \dots \otimes u)_{\lambda_1-2k_1, \dots, \lambda_s-2k_s} + \\ &\quad + \sum_{m_1, \dots, m_s \in \mathbf{Z}} (c^{j-1}[2])_{m_1, \dots, m_s} \times \\ &\quad \times (v \otimes u \otimes \dots \otimes u)_{\lambda_1-2m_1, \lambda_2-2m_2, \dots, \lambda_s-2m_s} + \\ &\quad + \sum_{l_1, \dots, l_s \in \mathbf{Z}} (c^{j-1}[2^s])_{l_1, \dots, l_s} \times \\ &\quad \times (v \otimes v \otimes \dots \otimes v)_{\lambda_1-2l_1, \lambda_2-2l_2, \dots, \lambda_s-2l_s} \quad (1)\end{aligned}$$

и алгоритм вейвлет-разложения

$$\left. \begin{aligned} (c^{j-1}[1])_{k_1, \dots, k_s} &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbf{Z}} (c^j[1])_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} \times \\ &\times (\tilde{u} \otimes \dots \otimes \tilde{u})_{\lambda_1-2k_1, \dots, \lambda_s-2k_s}; \\ (c^{j-1}[2])_{k_1, \dots, k_s} &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbf{Z}} (c^j[1])_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} \times \\ &\times (\tilde{v} \otimes \dots \otimes \tilde{u})_{\lambda_1-2k_1, \lambda_2-2k_2, \dots, \lambda_s-2k_s}; \\ &\dots \\ (c^{j-1}[2^s])_{k_1, \dots, k_s} &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbf{Z}} (c^j[1])_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} \times \\ &\times (\tilde{v} \otimes \dots \otimes \tilde{v})_{\lambda_1-2k_1, \lambda_2-2k_2, \dots, \lambda_s-2k_s}; \end{aligned} \right\} (2)$$

Следует отметить, что в формулах (1) и (2) можно фильтры поменять местами. Фильтры разложения и восстановления обозначим соответственно $\tilde{h}[k]$, $h[k]$, $k = 1, 2, \dots, 2^s$.

Пусть $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbf{Z}^s}$. Определим последовательности

$$\begin{aligned} (\uparrow \lambda)_n &= \begin{cases} \lambda_k, & n = 2k, k \in \mathbf{Z}^s; \\ 0, & n \neq 2k, k \in \mathbf{Z}^s; \end{cases} \\ (\downarrow \lambda)_k &= \lambda_{2k}, k \in \mathbf{Z}^s. \end{aligned}$$

Используя введенное обозначение, преобразования (1) и (2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} c^j[1] &= \sum_{\alpha=1}^{2^s} h[\alpha] * (\uparrow c^{j-1}[\alpha]); \\ c^{j-1}[k] &= \downarrow (c^j[1] * \tilde{h}[k]^-), \quad k = 1, 2, \dots, 2^s, \end{aligned}$$

где $(\tilde{h}[k]^-)_\alpha = \tilde{h}[k]_{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{Z}^s$; звездочкой обозначена свертка последовательностей.

3 Об алгоритме Брегмана

В этом разделе и далее будем использовать обозначения $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ для норм последовательности в $l_1(\mathbf{Z})$ и $l_2(\mathbf{Z})$ соответственно. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left(\frac{1}{2} \|Ax - f\|_2^2 + \|\text{diag}(\lambda) Wx\|_1 \right), \quad (3)$$

где A и W — некоторые матрицы; f и λ — вектор-столбцы, и алгоритм решения такой задачи, называемый алгоритмом Брегмана с разделением (Split Bregman) [2].

Алгоритм Брегмана [2]. Дано: $\delta \in (0; 1]$, $\mu > 0$.

1. Полагаем $d^0 = 0$, $b^0 = 0$, $k = 0$.
2. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ находим:

$$\begin{aligned} 2.1 \quad x^{k+1} &= (A^T A + \mu W^T W)^{-1} (A^T f + \\ &+ \mu W^T (d^k - b^k)); \\ 2.2 \quad d^{k+1} &= \Gamma_{\lambda/\mu} (Wx^{k+1} + b^k); \\ 2.3 \quad b^{k+1} &= b^k + \delta (Wx^{k+1} - d^{k+1}); \\ 2.4 \quad k &= k + 1, \end{aligned}$$

где

$$\Gamma_a(y) = \begin{cases} y - a, & y \in (a; +\infty); \\ 0, & y \in [-a; a]; \\ y + a, & y \in (-\infty; -a). \end{cases}$$

Если a и y — это векторы, то будем считать, что $\Gamma_a(y) = (\Gamma_{a_1}(y) \dots \Gamma_{a_n}(y_n))$.

Теорема 1 [2]. *Предположим, что существует единственное решение x^* задачи (3) и $\delta \in (0; 1]$, $\mu > 0$. Тогда для последовательности x^k , полученной по представленному алгоритму, выполняется*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|Ax^k - f\|_2^2 + \|\text{diag}(\lambda) Wx^k\|_1 \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \|Ax^* - f\|_2^2 + \|\text{diag}(\lambda) Wx^*\|_1; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|_2 &= 0. \end{aligned}$$

4 Постановка задачи и алгоритм решения

Пусть масштабирующая функция $\varphi \in C^p(\mathbf{R}^s)$ определяется масштабной последовательностью u . Обозначим через W дискретное вейвлет-преобразование, которое заданной последовательности $c^j[1]$ с конечным носителем ставит в соответствие по формулам (2) последовательности вейвлет-коэффициентов (имеющие конечные носители)

$$d = Wc^j[1] = \{c^\lambda[k]\}_{k=2, \lambda=j-m+1}^{2^s, j-1} \cup \{c^{j-m}[k]\}_{k=1}^{2^s}.$$

В этом разделе, для постановки задачи, удобно представлять d и $c^j[1]$ вектор-столбцами, а W — матрицей. При практической реализации этого делать, конечно, не нужно, а преобразования осуществлять с использованием формул (1) и (2).

Пусть задано множество точек $P = \{p_i\}_{i=1}^N \subset \mathbf{Z}^s$, $s = 2, 3$, принадлежащих границе некоторой ограниченной области в $\mathbf{R}^s$. Будем рассматривать задачу нахождения гладкой аппроксимации $g(t)$, $t \in \mathbf{R}^s$, характеристической функции области D , граница которой содержит заданное множество точек P . Обозначим через 1_P характеристическую функцию множества P .

Алгоритм реконструкции области по облаку точек. Дано: $M \in \mathbf{N}$, $\varepsilon \geq 1$, $\delta \in (0; 1]$, $\mu > 0$, последовательность λ , $\lambda_i \geq 0$ для всех i .

1. Находим последовательность

$$f_l^\varepsilon = \min((1_{U_\varepsilon(0)} * 1_P)_l, 1), \quad l \in \mathbf{Z}^s,$$

где $U_\varepsilon(0) = \{l \in \mathbf{Z}^s : \|l\|_2 < \varepsilon\}$, и с помощью морфологического алгоритма заполнения области находим характеристическую функцию $1_{D^\varepsilon \cap \mathbf{Z}^s}$, где $D^\varepsilon \subset \mathbf{R}^s$ — ограниченная область и $D \subset D^\varepsilon$.

2. Находим последовательность $z_k = 1_{D^\varepsilon \cap \mathbf{Z}^s}(k)$, $k \in \mathbf{Z}^s$.

3. Полагаем $d^0 = 0$, $b^0 = 0$, $k = 0$.

4. Для каждого $k = \overline{1, M-1}$

4.1 находим

$$x^{k+1} + \mu W^T W x^{k+1} = z + \mu W^T (d^k - b^k); \quad (4)$$

4.2 находим $d^{k+1} = \Gamma_{\lambda/\mu}(W x^{k+1} + b^k)$;

4.3 находим $b^{k+1} = b^k + \delta(W x^{k+1} - d^{k+1})$;

4.4 $k = k + 1$.

5. Искомая гладкая аппроксимация характеристической функции 1_D имеет вид:

$$g(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} x_\alpha^M (\varphi \otimes \dots \otimes \varphi)(t - \alpha), \quad t \in \mathbf{R}^s.$$

Здесь нужно сделать несколько замечаний. Во-первых, шаги 3 и 4 представляют собой M итераций алгоритма Брегмана решения оптимизационной задачи (3) с единичной матрицей A . Во-вторых, найденная последовательность x^M рассматривается далее как начальная последовательность схемы подразделений с маской $u \otimes \dots \otimes u$ и функция $g(t)$ — это не что иное, как предельная функция этой схемы [4]. В-третьих, известно [12], что матрица W^T соответствует вейвлет-восстановлению с фильтрами $\tilde{h}[k]$, $k = 1, 2, \dots, 2^s$. В заключение раздела представим алгоритм решения уравнения (4), основанный на дискретном преобразовании Фурье.

Рассмотрим сначала преобразование

$$x^{j-1} = \downarrow (h^- * x^j),$$

где $h_k^- = h_{-k}$, в предположении, что $\text{supp } h \subset [-r; r]$ и x^j — периодическая последовательность $x_{k+nl}^j = x_k^j$ для всех $l \in \mathbf{Z}$, где $n \in \mathbf{N}$ четное. В этом случае

$$\begin{aligned} x_{k+ln/2}^{j-1} &= \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} h_{\alpha-2(k+ln/2)} x_\alpha^j = \\ &= \sum_{\alpha=-r}^r h_\alpha x_{\alpha+2(k+ln/2)}^j = \sum_{\alpha=-r}^r h_\alpha x_{\alpha+2k}^j = x_k^{j-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, x^{j-1} — периодическая последовательность с периодом $n/2$. Аналогично для преобразования $x^j = h * (\uparrow x^{j-1})$, поскольку $(\uparrow x^{j-1})$ —

периодическая последовательность с периодом n , получаем

$$\begin{aligned} x_{k+ln}^j &= \sum_{\alpha=-r}^r (\uparrow x^{j-1})_{k+ln-\alpha} h_\alpha = \\ &= \sum_{\alpha=-r}^r (\uparrow x^{j-1})_{k-\alpha} h_\alpha = x_k^j. \end{aligned}$$

Если $\omega_m = e^{2\pi i/m}$, $m \in \mathbf{N}$, и $a = \{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}^s}$ — периодическая последовательность $a_{n+k} = a_k$, $n = (n_1 \dots n_s)^T$, для всех $k \in \mathbf{Z}^s$, то дискретное преобразование Фурье последовательности a определяется равенством [10]

$$\hat{a}_{k_1, \dots, k_s} = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{n_1}^{-j_1 k_1} \dots \omega_{n_s}^{-j_s k_s}$$

для $0 \leq k_j < n_j$, $j = \overline{1, s}$, и последовательность $\hat{a}$ также оказывается периодической. В дальнейшем периодическую последовательность будем указывать на периоде, т. е.

$$a = \{a_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1=0, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}.$$

Обратное преобразование Фурье последовательности a определяется равенством [10]:

$$\begin{aligned} \check{a}_{k_1, \dots, k_s} &= \\ &= \frac{1}{n_1 \dots n_s} \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{n_1}^{j_1 k_1} \dots \omega_{n_s}^{j_s k_s}. \end{aligned}$$

Лемма 1. Если $a = \{a_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1=0, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$ — периодическая последовательность, то справедливо равенство

$$\widehat{\uparrow} a_{k_1, \dots, k_s} = \hat{a}_{k_1, \dots, k_s}, \quad k_j = \overline{0, 2n_s - 1}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\uparrow} a_{k_1, \dots, k_s} &= \\ &= \sum_{j_1=0}^{2n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{2n_s-1} (\uparrow a)_{j_1, \dots, j_s} \omega_{2n_1}^{-j_1 k_1} \dots \omega_{2n_s}^{-j_s k_s} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{2n_1}^{-2j_1 k_1} \dots \omega_{2n_s}^{-2j_s k_s} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{n_1}^{-j_1 k_1} \dots \omega_{n_s}^{-j_s k_s} = \hat{a}_{k_1, \dots, k_s}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Если $a = \{a_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1=0, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$, где $n_1, \dots, n_s$ четные, то

$$\begin{aligned} \widehat{\downarrow} a_{k_1, \dots, k_s} &= \frac{1}{2^s} \sum_{i_1, \dots, i_s=0}^1 \hat{a}_{k_1+i_1 n_1/2, \dots, k_s+i_s n_s/2}, \\ k_l &= 0, 1, \dots, \frac{n_l}{2} - 1, \quad l = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$m(x_1, \dots, x_s) = \sum_{j_1, \dots, j_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} x_1^{j_1} \cdots x_s^{j_s}.$$

Тогда

$$\hat{a}_{k_1, \dots, k_s} = m(\omega_{n_1}^{-k_1}, \dots, \omega_{n_s}^{-k_s}).$$

Заметим, что многочлен $m(x_1, \dots, x_s)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} m(x_1, \dots, x_s) &= \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_s=0}^1 x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} m^{[i_1, \dots, i_s]}(x_1^2, \dots, x_s^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m^{[i_1, \dots, i_s]}(x_1, \dots, x_s) &= \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_s=0}^{n_1/2-1, \dots, n_s/2-1} a_{2j_1+i_1, \dots, 2j_s+i_s} x_1^{j_1} \cdots x_s^{j_s}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \hat{a}_{k_1, \dots, k_s} &= \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_s=0}^1 \omega_{n_1}^{-k_1 i_1} \cdots \omega_{n_s}^{-k_s i_s} m^{[i_1, \dots, i_s]}(\omega_{n_1/2}^{-k_1}, \dots, \omega_{n_s/2}^{-k_s}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\omega_n^{-k-n/2} = \omega_n^{-k} \omega_n^{-n/2} = \omega_n^{-k} e^{-\pi i} = -\omega_n^{-k}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\downarrow} a_{k_1, \dots, k_s} &= m^{[0, \dots, 0]}(\omega_{n_1/2}^{-k_1}, \dots, \omega_{n_s/2}^{-k_s}), \\ k_l &= 0, 1, \dots, \frac{n_l}{2} - 1, l = \overline{1, s}, \end{aligned}$$

то для $k_l = 0, 1, \dots, n_l/2 - 1, l = \overline{1, s}$, получаем

$$\sum_{i_1, \dots, i_s=0}^1 \hat{a}_{k_1+i_1 n_1/2, \dots, k_s+i_s n_s/2} = 2^s \hat{\downarrow} a_{k_1, \dots, k_s},$$

что и утверждалось в лемме.

Пусть $Y = \{y_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$ и $n_1, \dots, n_s$ — четные, а $G = \{(i_1, \dots, i_s) : i_\alpha \in \{0, 1\}, \alpha = \overline{1, s}\}$. Заметим, что число элементов в множестве G равно 2^s . Каждому набору $(i_1, \dots, i_s)$ поставим в соответствие число (номер этого набора) $l = \sum_{\lambda=1}^s i_\lambda 2^{\lambda-1}$. Введем в рассмотрение периодические последовательности

$$\begin{aligned} Y_l &= \{y_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1=i_1 n_1/2, \dots, k_s=i_s n_s/2}^{(n_1/2)(i_1+1)-1, \dots, (n_s/2)(i_s+1)-1}, \\ l &= \overline{0, 2^s-1}, \end{aligned}$$

где набор $(i_1, \dots, i_s) \in G$ имеет номер l . При этом $Y_{l,q} = (Y_l)_q$. В этих обозначениях формулу в лемме 2 можно записать следующим образом:

$$\hat{\downarrow} a = \frac{1}{2^s} \sum_{i=0}^{2^s-1} A_i,$$

где $A = \hat{a}$.

Определение 1. Пусть даны две периодические последовательности

$$\begin{aligned} a &= \{a_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}; \\ b &= \{b_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}. \end{aligned}$$

Циклическая свертка таких последовательностей $c = a * b$ представляет собой периодическую последовательность, которая определяется равенством

$$\begin{aligned} c_{k_1, \dots, k_s} &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1} a_{k_1-\lambda_1, \dots, k_s-\lambda_s} b_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} = \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1} b_{k_1-\lambda_1, \dots, k_s-\lambda_s} a_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}, \\ k_l &= \overline{0, n_l-1}, \dots, k_s = \overline{0, n_s-1}. \end{aligned}$$

Как известно [10], имеет место равенство $\hat{c} = \hat{a} \hat{b}$. Рассмотрим теперь преобразование вида

$$c^{j-1}[k] = \hat{\downarrow} (c^j[1] * f^j[k]), \quad k = 1, 2, \dots, 2^s; \quad (5)$$

$$\tilde{c}^j[1] = \sum_{\lambda=1}^{2^s} (\uparrow c^{j-1}[\lambda]) * g^j[\lambda], \quad (6)$$

где $c^j[1]$, $f^j[i]$ и $g^j[i]$ — заданные последовательности. Введем для удобства обозначения: $C^j[k] = \widehat{c^j[k]}$; $F^j[k] = \widehat{f^j[k]}$; $G^j[k] = \widehat{g^j[k]}$; $\tilde{C}^j[k] = \widehat{\tilde{c}^j[k]}$. Согласно лемме 2, преобразование (5), повторенное m раз, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} C^{j-m}[k] &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m=0}^{2^s-1} C^j[1]_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} F_{j-m}^j[k]_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}, \\ k &= 1, 2, \dots, 2^s, \end{aligned}$$

где для $\lambda_1, \dots, \lambda_m = 0, 1, \dots, 2^s - 1$

$$\begin{aligned} F_{j-m}^j[k]_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} &= \\ &= (F^j[1]_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} F^{j-1}[1]_{\lambda_2, \dots, \lambda_m} \cdots \\ &\cdots F^{j-m+2}[1]_{\lambda_{m-1}, \lambda_m} F^{j-m+1}[k]_{\lambda_m}) / 2^{sm}. \end{aligned}$$

По лемме 1 преобразование (6) для случая $m > 1$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^j[1]_{k_1, \dots, k_m} &= \\ &= \sum_{i=2}^{2^s} \sum_{\lambda=1}^{m-1} G_{\lambda}^j[i]_{k_1, \dots, k_m} \tilde{C}^{j-\lambda}[i]_{k_{\lambda+1}, \dots, k_m} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2^s} G_m^j[i]_{k_1, \dots, k_m} \tilde{C}^{j-m}[i], \end{aligned}$$

где $k_1, \dots, k_m = 0, 1, \dots, 2^s - 1$;

$$G_\lambda^j[i]_{k_1, \dots, k_m} = \begin{cases} G^j[i]_{k_1, \dots, k_m}, & \lambda = 1, i = 2, \dots, 2^s; \\ \left(\prod_{\mu=0}^{\lambda-2} G^{j-\mu}[1]_{k_{\mu+1}, \dots, k_m} \right) G^{j-\lambda+1}[i]_{k_\lambda, \dots, k_m}, & \lambda = \overline{2, m}, i = 1, 2, \dots, 2^s. \end{cases}$$

Рассмотрим еще композицию преобразований (5) и (6):

$$\begin{aligned} \tilde{C}^j[1]_{k_1, \dots, k_m} &= \sum_{i=2}^{2^s} \sum_{\lambda=1}^{m-1} \times \\ &\times \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda=0}^{2^s-1} \left(G_\lambda^j[i]_{k_1, \dots, k_m} \left(F_{j-\lambda}^j[i]_{\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda} \right)_{k_{\lambda+1}, \dots, k_m} \right) \times \\ &\times C^j[1]_{\alpha_1, \alpha_\lambda, k_{\lambda+1}, \dots, k_m} + \\ &+ \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=0}^{2^s-1} \left(\sum_{i=1}^{2^s} G_m^j[i]_{k_1, \dots, k_m} F_{j-m}^j[i]_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \right) \times \\ &\times C^j[1]_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}. \end{aligned}$$

После перегруппировки слагаемых данное равенство может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^j[1]_{k_1, \dots, k_m} &= \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=0}^{2^s-1} B_{k_1, \dots, k_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m} C^j[1]_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}, \end{aligned} \quad (7)$$

где последовательности $B_{k_1, \dots, k_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m}$ определяются только филтрами.

Рассмотрим теперь уравнение

$$x^j + \mu W^T W x^j = c^j, \quad (8)$$

где c^j и x^j — периодические последовательности:

$$\begin{aligned} c^j &= \left\{ c_{\beta_1, \dots, \beta_s}^j \right\}_{\beta_1, \dots, \beta_s=0}^{n_1^j-1, \dots, n_s^j-1}; \\ x^j &= \left\{ x_{\beta_1, \dots, \beta_s}^j \right\}_{\beta_1, \dots, \beta_s=0}^{n_1^j-1, \dots, n_s^j-1}. \end{aligned}$$

Алгоритм решения уравнения (8)

1. Применяем дискретное преобразование Фурье к левой и правой частям уравнения (8) и, используя (7), получаем:

$$\begin{aligned} X_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^j + \mu \sum_{\beta_1, \dots, \beta_m=0}^{2^s-1} B_{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m} X_{\beta_1, \dots, \beta_m}^j &= \\ &= C_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^j, \end{aligned} \quad (9)$$

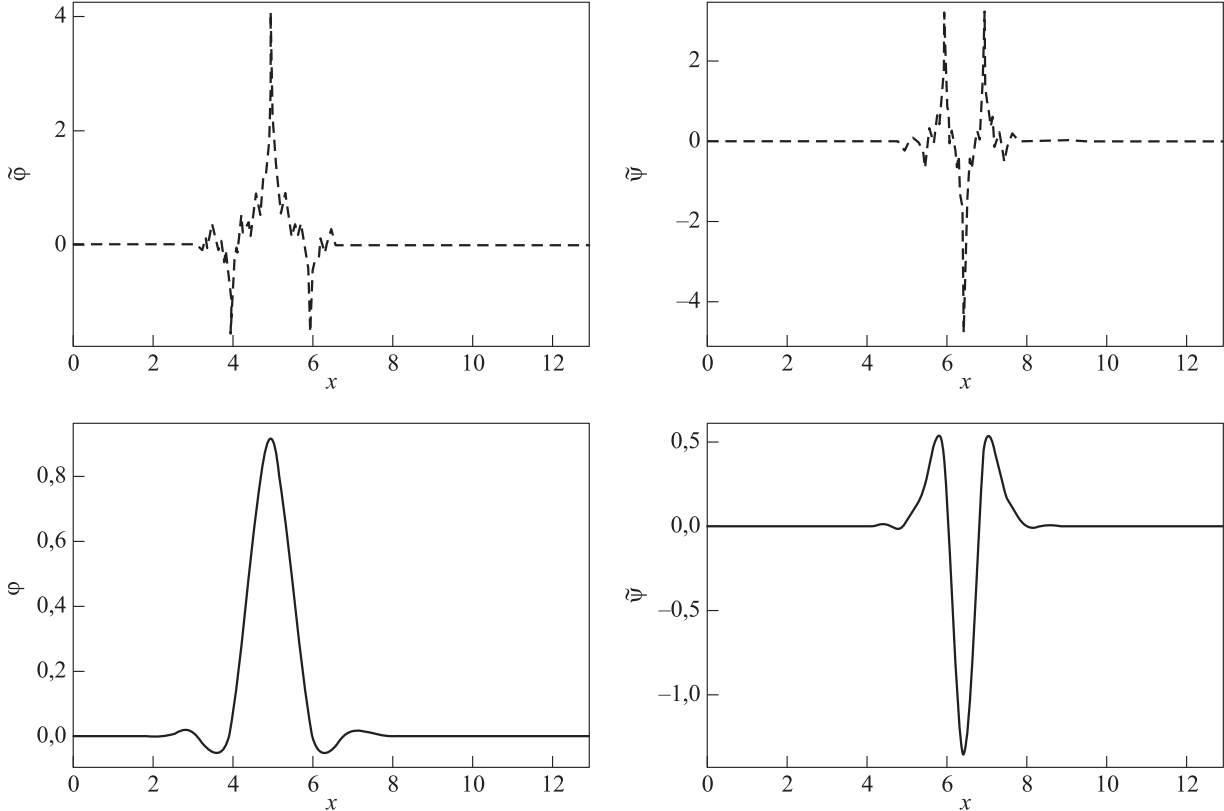


Рис. 1 Графики масштабирующих функций и вейвлетов

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0, 1, \dots, 2^s - 1$; $X^j = \widehat{x}^j$; $C^j = \widehat{c}^j$.

2. Решаем уравнение (9), находим $x^j = \widetilde{X}^j$.

с помощью алгоритма реконструкции области по облаку точек, показана на рис. 2, г. Наконец, на рис. 2, д представлена последовательность

$$x_\eta^M = \begin{cases} 1, & x^M \geq \eta; \\ 0, & x^M < \eta \end{cases}$$

5 Численные результаты

Ради эксперимента примеры в статье построены с использованием биортогональных вейвлетов из параметрического семейства, найденного в работе [9]. Графики масштабирующих функций φ , $\tilde{\varphi}$ и вейвлетов ψ и $\tilde{\psi}$ из этого семейства показаны на рис. 1.

Рассмотрим сначала двумерный случай. На рис. 2, а представлено заданное множество точек P . Результат свертки — последовательность f^ε для $\varepsilon = 2$ — показан на рис. 2, б. Результат работы алгоритма морфологического заполнения области — функция $1_{D^\varepsilon \cap \mathbb{Z}^2}$ для $\varepsilon = 2$ показана на рис. 2, в. Последовательность x^M для $M = 10$, найденная

для $\eta = 0,5$.

Рассмотрим теперь трехмерный случай (рис. 3—5). На рис. 3, а—5, а представлено заданное множество точек $P \subset \mathbb{R}^3$, на рис. 3, б—5, б показана функция $1_{D^\varepsilon \cap \mathbb{Z}^s}$ для $\varepsilon = 2$. На рис. 3, в—5, в показана последовательность

$$x_\eta^M = \begin{cases} 1, & M \geq \eta; \\ 0, & x^M < \eta \end{cases}$$

для $\eta = 0,5$, найденная с помощью алгоритма реконструкции области по облаку точек, представленному в разд. 4.

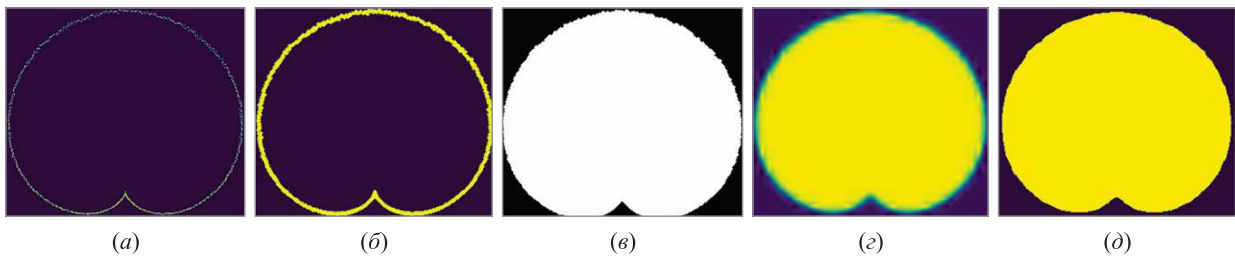


Рис. 2 Заданное множество точек P (а); последовательность f^ε для $\varepsilon = 2$ (б); функция $1_{D^\varepsilon \cap \mathbb{Z}^2}$ для $\varepsilon = 2$ (в); последовательность x^M для $M = 10$ (г) и последовательность x_η^M для $\eta = 0,5$ (д)

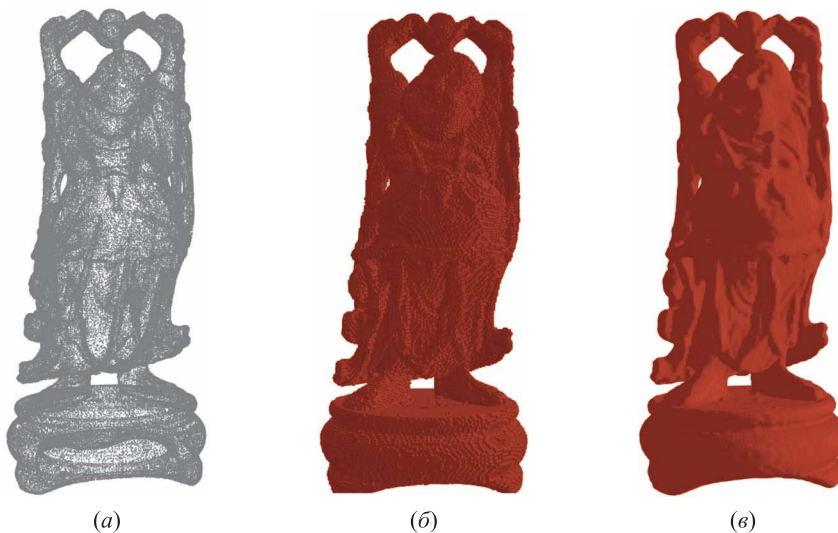


Рис. 3 Пример 1: заданное множество точек P (а), функция $1_{D^\varepsilon \cap \mathbb{Z}^s}$ для $\varepsilon = 2$ (б) и последовательность x_η^{15} для $\eta = 0,5$ (в)

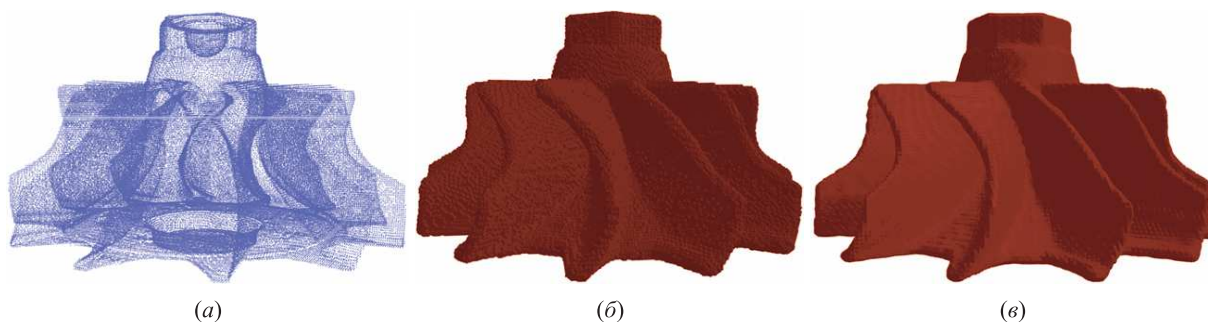


Рис. 4 Пример 2: заданное множество точек P (а), функция $1_{D^\varepsilon \cap \mathbb{Z}^s}$ для $\varepsilon = 2$ (б) и последовательность x_η^{15} для $\eta = 0,5$ (в)

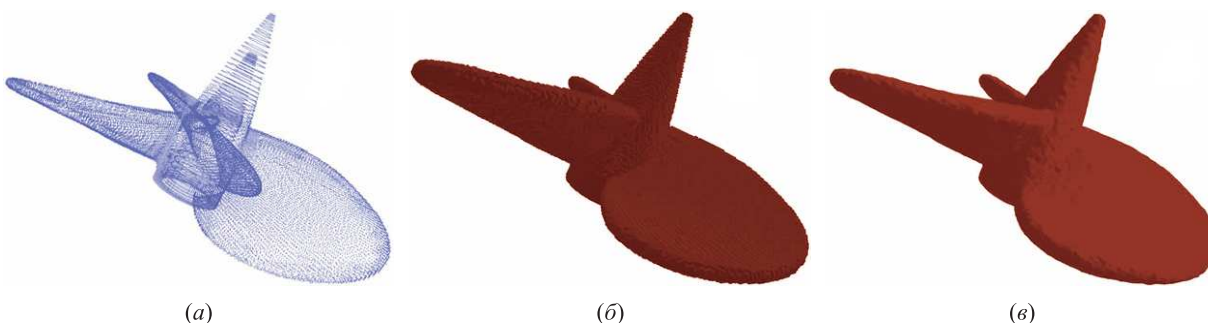


Рис. 5 Пример 3: заданное множество точек P (а), функция $1_{D^\varepsilon \cap \mathbb{Z}^s}$ для $\varepsilon = 2$ (б) и последовательность x_η^{14} для $\eta = 0,5$ (в)

6 Заключение

В данной статье разработан алгоритм построения гладкой аппроксимации характеристической функции ограниченной области пространства, граница которой содержит заданное облако точек, полученное каким-либо образом, например лазерным сканированием. Для работы алгоритма необходимо лишь задать две масштабные последовательности, определяющие семейство биортогональных вейвлетов. Искомая аппроксимация находится в виде разложения по одному из семейств масштабирующих функций (гладких), при этом не требуется составление матрицы значений этих функций в точках облака для определения коэффициентов разложения. Сами коэффициенты находятся с помощью алгоритма Брегмана и дискретного преобразования Фурье.

Поскольку на основе схемы подъема и схем подразделений можно строить параметрические семейства биортогональных вейвлетов с разными свойствами (разным классом гладкости, разным числом нулевых моментов и т. д.), например так, как это сделано в статье [9], то в качестве дальнейшего исследования в этой области будет рассмотрена задача выбора биортогонального семейства вейвлетов (поиск фильтров), дающего в некотором смысле

наилучшее приближение характеристической функции. Например, в качестве критерия оптимизации может рассматриваться время нахождения гладкой аппроксимации с заданной точностью. Результаты работы планируется использовать в развитии CAD-подсистемы системы CAD/CAE для 3D-печати конструкций из композиционных материалов, теоретические основы для которой заложены в работе [8].

Литература

1. Dong Bin, Shen Zuowei. Wavelet frame based surface reconstruction from unorganized points // J. Comput. Phys., 2011. Vol. 230. P. 8247–8255. doi: 10.1016/j.jcp.2011.07.022.
2. Dong Bin, Shen Zuowei. MRA-based wavelet frames and applications // Mathematics Image Processing, 2013. Vol. 19. Art. 2. 156 p. doi: 10.1090/pcms/019/02.
3. Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets // Appl. Comput. Harmon. A., 1996. Vol. 3. Iss. 2. P. 186–200. doi: 10.1006/acha.1996.0015.
4. Cavaretta A.S., Dahmen W., Micchelli C.A. Stationary subdivision // Mem. Am. Math. Soc., 1991. Vol. 93. No. 453. 186 p.

5. Битюков Ю. И., Платонов Е. Н. Применение вейвлетов для расчета линейных систем управления с сосредоточенными параметрами // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 4. С. 94–103. doi: 10.14357/19922264170412. EDN: ZXWUQD.
6. Синецын И. Н. Метод интерполяционного аналитического моделирования одномерных распределений в стохастических системах // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 55–61. doi: 10.14357/19922264180107. EDN: YTTRDJ.
7. Синецын И. Н. Интерполяционное аналитическое моделирование распределений в сложных стохастических системах // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 1. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264190101. EDN: ZASZFI.
8. Босов А. В., Битюков Ю. И., Денискина Г. Ю. О поиске оптимальной схемы 3D-печати конструкций из композиционных материалов // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 10–19. doi: 10.14357/19922264220102. EDN: CBWAQO.
9. Битюков Ю. И., Битюков П. Ю. Построение параметрического семейства вейвлетов и использование его в обработке изображений // Моделирование и анализ данных, 2023. Т. 13. № 4. С. 7–22. doi: 10.17759/mda.2023130401. EDN: BYJQUA.
10. Frazier M. W. An introduction to wavelets through linear algebra. — New York, NY, USA: Springer, 1999. 503 p.
11. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005. 615 с. EDN: MDWNXB.
12. Stollnitz E. J., DeRose T. D., Salesin D. H. Wavelets for computer graphics: Theory and applications. — San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publs., 1996. 290 p.

Поступила в редакцию 03.02.2025

Принята к публикации 15.05.2025

ABOUT AN ALGORITHM FOR GEOMETRIC MODELING OF STRUCTURES BASED ON THE RESULTS OF LASER SCANNING

Yu. I. Bityukov¹ and P. Yu. Bityukov²

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Sh., Moscow 125933, Russian Federation

²National Research University “Moscow Power Engineering Institute,” 1 bld. 14 Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation

Abstract: Laser scanner technology makes it possible to obtain point images of surfaces with a high degree of detail; so, the task of reconstructing a surface (area) from a point cloud has recently attracted a lot of attention. This is a problem faced in reverse engineering, archaeology, etc. The main difficulty that arises when solving general surface restoration problems is that the surface to be restored is usually not a graph of some scalar function. One of the methods used to solve the reconstruction problem is a method based on wavelets and the Bregman algorithm, which is used to find the coefficients of decomposition of the desired function defining the area by scaling functions. At the same time, the work does not pay attention to biorthogonal wavelets, in particular, spline wavelets, which are the main tool in geometric modeling problems (NURBS curves and surfaces), since real-world design tasks often require local surface modification and knowledge of the analytical expression for scaling functions, which is ensured by the use of spline wavelets. In this article, an algorithm has been developed for constructing a smooth approximation of a characteristic function of a bounded region of space, the boundary of which contains a given point cloud obtained in some way, for example, by laser scanning. For the algorithm to work, it is only necessary to specify two sequences defining a family of biorthogonal wavelets. The desired approximation is in the form of a decomposition according to one of the families of scaling functions (smooth) and it is not necessary to compile a matrix of values of these functions at points in the cloud to determine the decomposition coefficients. The coefficients themselves are found using the Bregman algorithm and the discrete Fourier transform.

Keywords: wavelet; wavelet frame; wavelet transform; discrete Fourier transform; geometric modeling; Bregman algorithm

DOI: 10.14357/19922264250206

EDN: DWCTWL

References

1. Dong, Bin, and Zuowei Shen. 2011. Wavelet frame based surface reconstruction from unorganized points. *J. Comput. Phys.* 230(22):8247–8255. doi: 10.1016/j.jcp.2011.07.022.
2. Dong, Bin, and Zuowei Shen. 2013. MRA-based wavelet frames and applications. *Mathematics Image Processing* 19:2. 156 p. doi: 10.1090/pcms/019/02.
3. Sweldens, W. 1996. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Har-*

- mon. A.* 3(2):186–200. doi: 10.1006/acha.1996.0015.
4. Cavaretta, A. S., W. Dahmen, and C. A. Micchelli. 1991. Stationary subdivision. *Mem. Am. Math. Soc.* 93(453). 186 p.
5. Bityukov, Yu. I., and E. N. Platonov. 2017. Primene-
nie veyvletov dlya rascheta lineynykh sistem upravleniya
s sosredotochennymi parametrami [The use of wavelets
for the calculation of linear control systems with lumped
parameters]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(4):94–103. doi: 10.14357/19922264170412. EDN:
ZXWUQD.
6. Sinitsyn, I. N. 2018. Metod interpolatsionnogo anali-
ticheskogo modelirovaniya odnomernykh raspredeleniy
v stokhasticheskikh sistemakh [Method of interpolation-
al analytical modeling of processes in stochastic systems].
Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl. 12(1):55–61.
doi: 10.14357/19922264180107. EDN: YTTRDJ.
7. Sinitsyn, I. N. 2019. Interpolatsionnoe analiticheskoe
modelirovanie raspredeleniy v slozhnykh stokhastiche-
skikh sistemakh [Interpolational analytical modeling in
complex stochastic systems]. *Informatika i ee Prime-
neniya — Inform. Appl.* 13(1): 2–8. doi: 10.14357/
19922264190101. EDN: ZASZFI.
8. Bosov, A. V., Yu. I. Bityukov, and G. Yu. Deniskina. 2022.
O poiske optimal'noy skhemy 3D-pechati konstruktsey
iz kompozitsionnykh materialov [About searching for the
optimal 3D printing scheme of structures from com-
posite materials]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform.
Appl.* 16(1):10–19. doi: 10.14357/19922264220102. EDN:
CBWAQO.
9. Bityukov, Yu. I., and P. Yu. Bityukov. 2023. Postroyenie
parametricheskogo semeystva veyvletov i ispol'zovanie
ego v obrabotke izobrazheniy [Construction of a para-
metric family of wavelets and its use in image processing].
Modelirovanie i analiz dannykh [Modeling and Data Anal-
ysis] 13(4):7–22. doi: 10.17759/mda.2023130401. EDN:
BYJQUA.
10. Frazier, M. W. 1999. An introduction to wavelets through
linear algebra. New York, NY: Springer. 503 p.
11. Novikov, I. Ya., V. Yu. Protasov, and M. A. Skopina. 2005.
Teoriya vspleskov [The theory of wavelets]. Moscow: Fiz-
matlit. 615 p. EDN: MDWNXB.
12. Stollnitz, E. J., T. D. DeRose, and D. H. Salesin. 1996.
Wavelets for computer graphics: Theory and applications.
San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publs. 290 p.

Received February 3, 2025

Accepted May 15, 2025

Contributors

Bityukov Yuri I. (b. 1972) — Doctor of Science in technology, professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Sh., Moscow 125933, Russian Federation; yib72@mail.ru

Bityukov Pavel Y. (b. 2003) — master student, National Research University “Moscow Power Engineering Institute,” 1 bld. 14 Krasnokazarmennaya Str., Moscow 111250, Russian Federation; p.bityukoff@yandex.ru

МЕТРИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В КОНТЕКСТЕ ТЕОРИИ РЕШЕТОК.

ЧАСТЬ 2. ПРАКТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛЕДСТВИЙ ТЕОРЕМЫ О РЕГУЛЯРНОСТИ И НОРМАЛЬНОСТИ

И. Ю. Торшин¹

Аннотация: В первой части доказана теорема, связывающая понятие нормальности топологических пространств с регулярностью по Ю. И. Журавлёву в контексте проблемы метризации признаков пространств. Следствия теоремы позволяют систематизировать поиск наиболее приемлемых проблемно-ориентированных метрик с учетом индивидуальных весов атомов решетки, порядка атомов, способа формирования метрики (на множества, на функциях, на векторах) и способа настройки параметров метрик. Предложены новые способы порождения синтетических признаков с использованием опорных классов значений или же с использованием целых опорных цепей (отбор наиболее информативных элементарных признаков, максимизация информативности элементарных признаков). Систематизированы перспективные направления дальнейших исследований, в том числе переход к решетке значений признаков и перспективные функционалы порождения синтетических признаков. Приведены результаты соответствующих вычислительных экспериментов, указывающие на снижение значений показателей переобучения и на повышение качества работы алгоритмов числового прогнозирования с использованием предлагаемых способов порождения метрик и синтетических признаков.

Ключевые слова: топологический анализ данных; алгебраический подход; вычислительный эксперимент; синтетические признаки

DOI: 10.14357/19922264250207

EDN: JTNKFQ

1 Введение

В топологической теории распознавания изучаются методы систематизации порождения метрик и синтетических признаков описаний, наиболее адекватных прикладным задачам [1]. Порождение синтетических признаков осуществляется посредством метода опорных функций [2] или на основе ρ_L -метрик над булевой решеткой $L(T(\mathbf{X}))$ [3], где $\mathbf{X}$ — множество исходных описаний объектов, изоморфное *множеству прецедентов*

$$Q = \varphi(\mathbf{X}) = \{D(x_i) | x_i \in \mathbf{X}\},$$

$$D(x_i) = (\Gamma_1(x_i) \times \dots \times \Gamma_k(x_i) \times \dots \times \Gamma_{n+l}(x_i))_{\Delta};$$

функции $\Gamma_k(x_i)$ вычисляют значения *элементарных признаков* для объекта x_i .

В первой части работы доказана теорема о регулярности и нормальности топологических пространств, показавшая, что регулярность $\mathbf{X}$ по Ю. И. Журавлёву (условие $\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$) гарантирует нормальность и, следовательно, метризуемость топологического пространства $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$ [1]. Из теоремы о регулярности и нормальности были выведены 8 следствий, причем следствия 3–5 указывают на определенные способы порождения метрик

над дискретным топологическим пространством $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$, однозначно соответствующим булевой решетке $L(T(\mathbf{X}))$.

2 Расстояния на основе функций от множеств (следствие 3)

В данном следствии принимается одинаковый вклад каждого атома решетки в числовую оценку пути между множествами a и b , так что метрики над $L(T(\mathbf{X}))$ представлены в виде (квазилинейных) композиций функций $f : L(T(\mathbf{X})) \rightarrow \mathbb{R}$ от множеств $a, b, a/\backslash b$. Если ρ_L -метрика по следствию 3 настраивается (что обозначим как $\rho_{L\vec{w}}$, где $\vec{w}$ — вектор весов), то настройка $\vec{w}$ может проводиться итеративно (стохастическая оптимизация) или посредством процедур, аналогичных методу наименьших квадратов (МНК).

Рассмотрим расстояния:

- (1) на множествах;
- (2) на функциях;
- (3) на векторах.

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, tiy135@yahoo.com

3 Расстояния по следствию 3 на множествах

В теории множеств важнейшей функцией от множества считается *мощность*, $f(a) = |a|$. При $f(a) = |a|$ метрикам по следствию 3 соответствуют все известные полуэмпирические расстояния на множествах [4], в том числе метрики на основе решеточных оценок [5–7]. Соответствующие определения ρ_L представимы в виде $g_1(|a|) \circ g_2(|b|) \circ g_3(|a/\backslash b|) \circ \dots$, $g_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Конкретный вид функций g_α и их композиций определим по результатам анализа известных метрик на множествах [4]:

- (1) все такие метрики — дроби;
- (2) все числители дробей — линейные комбинации $|a|$, $|b|$, $|a/\backslash b|$, $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$ и др., парных произведений мощностей, корней квадратных от парных произведений;
- (3) знаменатели этих дробей по структуре подобны числителям и могут включать минимум/максимум от $|a|$, $|b|$, $|\mathbf{X}|^2$, произведение $|a||\bar{a}||b||\bar{b}|$ или его квадратный корень.

Для $a, b \in L(T(\mathbf{X}))$ определим алфавит мощностей

$$A(a, b) = \{1, |a|, |b|, |a/\backslash b|, |a/\backslash \bar{b}|, |a\Delta b|, |a/b|, |b/a|, |\bar{a}|, |\bar{a}||a|, \dots\},$$

так что $A^2(a, b)$ включает все элементы $A(a, b)$ (с единицей) и все пары элементов $A(a, b)$. Пусть $\tilde{A}^2(a, b)$ — вектор, содержащий произведения каждого из элементов $A^2(a, b)$, а $\tilde{w}_{A^2}, \tilde{w}'_{A^2} \in \mathbb{R}^{|A^2(a, b)|}$ — веса элементов квадрата алфавита. Тогда *обобщенное расстояние между a, b* определено как $\tilde{w}_{A^2} \tilde{A}^2(a, b) / (\tilde{w}'_{A^2} \tilde{A}^2(a, b))$.

4 Расстояния по следствию 3 на функциях

При задании опорной цепи A_t [7], соответствующей t -й переменной с областью определения I_t , каждому $a \in L(T(\mathbf{X}))$ соответствует множество чисел $\Gamma_t(a) = \{\Gamma_t(x), x \in a\}$ и определена эмпирическая функция распределения (ЭФР)

$$\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(a) = \sup\{|\beta| \mid B \subseteq \Gamma_t(a) \forall \beta \in B : \beta \leq x\} / |\Gamma_t(a)|, \quad x \in \mathbb{R}$$

(кратко — $\hat{\Phi}\Gamma_t(a)$, а функцию плотности обозначим $\hat{\phi}\Gamma_t(a)$). Использование ЭФР позволяет представить функцию от множества a , фигурирующую

в следствии 3, в виде $\hat{\Phi}\Gamma_t(a)$ и оценивать расстояние $d_{\tilde{w}}$ между множествами a и b как расстояние между $\hat{\Phi}\Gamma_t(a)$ и $\hat{\Phi}\Gamma_t(b)$, т. е.

$$\rho_L \tilde{w} = d_{\tilde{w}}(\hat{\Phi}\Gamma_t(a), \hat{\Phi}\Gamma_t(b)).$$

Расстояния $d_{\tilde{w}}$ формулируются в виде функционалов над массивом $\{d\Phi(x, t, a, b) = \hat{\Phi}(x)\Gamma_t(a) - \hat{\Phi}(x)\Gamma_t(b), x \in I_t\}$: расстояние Колмогорова $\max\{|d\Phi(x, t, a, b)|\}$, Крамера — фон Мизеса — $\sum_x d\Phi(x, t, a, b)^2$, Круглова — $\sum_x w(d\Phi(x, t, a, b))$, где $w(x)$ — весовая функция. Настраиваемое расстояние $d_{\tilde{w}}$ может быть сформулировано в теоретико-вероятностном формате с использованием функций плотности $p_1 = \hat{\phi}\Gamma_t(a)$ и $p_2 = \hat{\phi}\Gamma_t(b)$: расстояния Золотарёва $\sum_x w(x)(p_1(x) - p_2(x))$, «ясности» $1 - \sum_x (p_1 \ln p_2 + p_2 \ln p_1 - (p_1 + p_2) \ln w(x))$, Чизара $\sum_x p_2 w(p_1/p_2)$, Бурби — Рао $\sum_x (0,5w(p_1) + 0,5w(p_2) - w(0,5p_1 + 0,5p_2))$ и др. [4]. Заметим, что расстояния Золотарёва и «ясности» включают веса индивидуальных значений $x \in I_t$, что является одним из случаев расстояний по следствию 4 (индивидуальные веса объектов); расстояния Чизара, Бурби — Рао и Круглова относятся к «промежуточному» случаю расстояний по следствию 4.

В целом все известные $d_{\tilde{w}}$ (1) включают агрегацию по I_t (суммирование или максимум), (2) агрегируются $d\Phi(x, t, a, b)$ или функции плотности, (3) веса при агрегации могут определяться для значений $x \in I_t$ или для функционалов от значений $d\Phi(x, t, a, b)$, $\hat{\Phi}\Gamma_t(a)$ и $\hat{\Phi}\Gamma_t(b)$. При использовании суммирования по $x \in I_t$ как единственного способа агрегации «универсальные» функция расстояния между ЭФР строятся как линейные комбинации над алфавитами наподобие $\{w_1(x)d\Phi(x, t, a, b), w_2(d\Phi(x, t, a, b)), w_3(x)\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(a), w_4(x)\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(b), w_5(\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(a)), w_6(\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(b)), w_7(\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(a) + \hat{\Phi}(x)\Gamma_t(b))\}$.

5 Расстояния по следствию 3 на векторах

Каждому $a \in L(T(\mathbf{X}))$ может быть сопоставлен вектор и введено расстояние на векторном пространстве. Очевидна многочисленность способов построения векторов и выбора способа вычисления компонент векторов. В [3, 7] предложен способ определения компонент векторов элементов как списков оценок над решеткой. В целом методы порождения векторных описаний нуждаются в более систематичном рассмотрении на основании решеточного формализма топологической теории распознавания.

6 Расстояния на основе индивидуальных весов атомов (следствие 4)

В соответствии со следствием 4 вклад каждого атома (одноатомного отрезка пути) в оценку расстояния между множествами a и b индивидуален, а порядок удаления/добавления атомов в множествах $a \setminus b$ и $b \setminus a$ не имеет значения. Функционалы, вычисляющие расстояние, представимы в виде коммутативных композиций функций от атомов, формирующих $a \Delta b$.

Целесообразно рассмотреть данное следствие в контексте двух экстремальных случаев: длины всех одноатомных отрезков равны (следствие 3) и длины всех одноатомных отрезков различны. В промежуточном случае длины одноатомных отрезков одинаковы для определенных групп атомов в наборе $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{|S|}\}$, $S \subset L(T(\mathbf{X}))$, который становится фактор-группой над $\mathbf{X}$.

При определении расстояний по следствию 4 на множествах целесообразно заменить мощности множеств в формулировках этих расстояний (Фреше—Никодима, Сокала—Сниса, Тверского и др.) на суммы весов атомов, составляющих эти множества. Таким образом, любая непараметрическая функция расстояния на множествах становится параметрической $\rho_{L\vec{w}}$, в которой вектор весов $\vec{w}$ определяется весами объектов.

В расстояниях на функциях $\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(a)$ и $\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(b)$, порождаемых t -й опорной цепью, ось абсцисс этих функций соответствует значениям $\Gamma_t(x_i)$, так что вдоль этой оси объекты x_i могут быть упорядочены по значениям $\Gamma_t(x_i)$. Например, расстояние Золотарёва, при условии регулярности $\mathbf{X}$ по Γ_t , уже оказывается параметризованной метрикой по следствию 4, в которой вектор весов $\vec{w}$ представлен в виде весовой функции $w(x)$.

Определения расстояния на векторах $\vec{v}_\alpha[a]$ и $\vec{v}_\alpha[b]$ содержат оценки $v[a]$, включающие мощности множеств. Поэтому, заменяя мощности множеств при вычислении оценок на суммы весов объектов, можно получить параметризованные векторные метрики по следствию 4.

7 Расстояния с учетом порядка атомов (следствие 5)

В соответствии со следствием 5 определен порядок удаления/добавления атомов в множествах $a \setminus b$ и $b \setminus a$, и метрики по следствию 5 ищутся в виде комбинаций функций от последовательностей атомов из множества $a \Delta b$. Принимая во внимание

чрезвычайную комбинаторную сложность булевых решеток (число полных цепей равно $N!$), целесообразно рассматривать максимально короткие подпоследовательности атомов из $a \Delta b$. Трактабельным вариантом оказываются функционалы, вводимые по аналогии с концепцией марковских цепей и соответствующие последовательностям из двух атомов (т. е. каждый атом соответствует «состоянию конечного автомата»).

8 О критериях выбора значений параметров настраиваемых метрик

Основная проблема при настройке метрик $\rho_{L\vec{w}}$ по следствиям 3–5 — выбор адекватного изучаемой задаче критерия качества, в соответствии с которым настраиваются весовые параметры такой метрики. В силу невозможности применения парадигмы согласования значений метрик [2, 3, 7] в $L(T(\mathbf{X}))$ остаются только две возможности дальнейших исследований:

- (1) оставаясь в парадигме согласования метрик, найти пространство, в котором есть экспертные метрики (переход к расстояниям на объектах);
- (2) оставаясь в решетке $L(T(\mathbf{X}))$, найти функционалы, по которым настраивать веса $\vec{w}$ («информативность» метрик, особые синтетические признаки).

9 О переходе от решетки $L(T(\mathbf{X}))$ к расстояниям на объектах

Формальное описание объекта $x_i \in \mathbf{X}$, $D(x_i)$, соответствует представлению любого объекта набором множеств $\{\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x))\}$. Информация для задания некоторых «экспертных» расстояний между такими множествами, как правило, отсутствует. Применение ρ_L к парам множеств $(\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i)), \Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_j)))$ подразумевает оценку расстояний $\rho_q : Q^2 \rightarrow R^+$ между объектами x_i и x_j , $\rho_q(D(x_i), D(x_j))$, что дает возможность использовать четко формализуемые способы введения экспертных метрик: метрику разреза; оценки компактности классов; метрики алгоритмов вычислений оценок Ю.И. Журавлёва; экспертные и прочие оценки «схожести» объектов и др. Задачи числового прогнозирования сводимы к задачам классификации [6].

Громоздкость конструкций $\rho_q(D(x_i), D(x_j))$ диктует необходимость перехода от решетки

$L(T(\mathbf{X}))$ над булеаном множества объектов к решетке значений признаков. Данный переход представляет собой отдельное направление дальнейших теоретических и экспериментальных исследований, включающих среди прочего поиск функционалов ρ_q , наиболее релевантных для исследуемой задачи. Описанный ниже подход с синтетическими k' -ми признаками также может рассматриваться как подход к вычислению ρ_q .

10 Порождение признаков с использованием классов значений

Критерий настройки весов метрики $\rho_{L\bar{w}}$ может быть основан на специальных формах синтетических признаков, позволяющих осуществлять настройку $\rho_{L\bar{w}}$ по значениям t -й таргетной переменной. Пусть опорная цепь A_t разбита на n_z процентилей, заданных $\iota = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_z, \dots, \lambda_{n_z}\} \subset \mathbf{I}_t$, так что для z -го процентиля заданы множества $\Gamma_{tz}^{-1} = \{x | \lambda_{z-1} < (\Gamma_t(x) < \lambda_z)\}$ и $\Gamma_t(\Gamma_{tz}^{-1})$.

Определим множество

$$G_1(x_i, t, z) = \{\rho_{L\bar{w}}(\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i)), \Gamma_{tz}^{-1}), k = \overline{1, n}\},$$

ЭФР $\hat{\Phi}\Gamma_t(\Gamma_{tz}^{-1})$ и $\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)$, их математические ожидания $\hat{\mu}\hat{\Phi}\Gamma_t(\Gamma_{tz}^{-1})$, $\hat{\mu}\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)$ и стандартные отклонения. Эти определения позволяют порождать синтетические признаки $\Gamma_{k'}(x_i)$, $k' > n + l$, на основе линейных и других функционалов, оценивающих $\Gamma_t(x_i)$. При упорядочении $\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)$ по значениям $\hat{\mu}\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)$ выражение $1 - \hat{\mu}\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)$ оценивает вклад расстояний значений признаков $\Gamma_k(x_i)$ до z -го процентиля в оценку значения t -й переменной, так что $\Gamma_{k'}(x_i)$ оценивается суммированием по z :

$$\Gamma_{k'}(x_i) = \sum_{z=1, n_z} \left(1 - \hat{\mu}\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)\right) \hat{\mu}\hat{\Phi}\Gamma_t(\Gamma_{tz}^{-1}),$$

$$z = \overline{1, n_z}. \quad (1)$$

Значения $\hat{\mu}\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)$ могут нормироваться на максимальное значение:

$$\Gamma_{k'}(x_i) = \sum_{z=1, n_z} \frac{1 - \hat{\mu}\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)}{\max_{\mu z}} \hat{\mu}\hat{\Phi}\Gamma_t(\Gamma_{tz}^{-1}),$$

$$\max_{\mu z} = \max(\hat{\mu}\hat{\Phi}G_1(x_i, t, z)). \quad (2)$$

Очевидно, что функционалы (1) позволяют осуществлять прямую настройку $\rho_{L\bar{w}}$ по значениям прогнозируемой t -й переменной $\Gamma_t(x_i)$, $x_i \in \mathbf{X}$, в том числе с использованием аналитических процедур МНК-типа (см. ниже).

11 Порождение признаков с использованием целых опорных цепей

Эксперименты, проведенные в работе [7], показали, что «метрические» признаки на основе отдельных значений признаков $\Gamma_k(x_i)$ малоинформативны. Признаки на основе ЭФР $\hat{\Phi}\rho_{m\bar{\alpha}}(x_i, p)$ [7] показали несколько лучшую информативность, но ограничены заданием «опорных» классов объектов, т. е. множества ι . Возможно ли определение синтетических признаков на основе *всей* опорной цепи A_t , а не z -процентилей? При такой постановке вопроса $\rho_{L\bar{w}}$ применяется к каждому из элементов опорной цепи: (1) при отборе (ранжировании) наиболее информативных $\Gamma_k(x_i)$ либо (2) при повышении информативности каждого $\Gamma_k(x_i)$ путем особой параметризации.

12 Отбор наиболее информативных элементарных признаков

Данный подход подразумевает необходимость отбора признаков (значений признаков), самых информативных для поставленной задачи. Для задачи численного прогнозирования t -й переменной наиболее перспективно оценивать информативность посредством «расщепления» цепи A_t на две подцепи, соответствующие $\Gamma_k(x_i)$ и всем остальным значениям Γ_k [3, 5, 7], так что каждой из двух подцепей соответствует своя ЭФР: $\text{cdf}_{tk}^+(x_i)$ и $\text{cdf}_{tk}^-(x_i)$. Тогда расстояние d_f между $\text{cdf}_{tk}^+(x_i)$ и $\text{cdf}_{tk}^-(x_i)$ (по Колмогорову, Крамеру – фон Мизесу и др.) оценивает вклад значения признака $\Gamma_k(x_i)$ в значение t -й переменной, а разность $\hat{\mu}\text{cdf}_{tk}^+(x_i) - \hat{\mu}\text{cdf}_{tk}^-(x_i)$ — вклад признака в значение t -й переменной. Соответственно, $\Gamma_{k'}(x_i)$ определяется суммированием:

$$\Gamma_{k'}(x_i) = \sum_{k=1, n} d_f(\text{cdf}_{tk}^+(x_i), \text{cdf}_{tk}^-(x_i)) \times$$

$$\times (\hat{\mu}\text{cdf}_{tk}^+(x_i) - \hat{\mu}\text{cdf}_{tk}^-(x_i)). \quad (3)$$

13 Максимизация информативности элементарных признаков

Рассмотрение всей цепи A_t позволяет порождать описания каждого значения k -го признака

в виде одномерной функции. Для $\rho_{L\vec{w}}$ для каждой Γ_k определим множество пар

$$P_k(\lambda_{k\beta}) = \left\{ (\lambda_{tb}, \rho_{L\vec{w}}(\Gamma_k^{-1}(\lambda_{k\beta}), \Gamma_t^{-1}(\lambda_{tb}))), \right. \\ \left. b = \overline{1, |\mathbf{I}_t|} \right\}, \quad \lambda_{k\beta} \in I_k.$$

Рассмотрим $P_k(\lambda_{k\beta})$ как подстановку некоторой действительно-значной и непрерывной функции $f(P_k(\lambda_{k\beta}), x)$, аппроксимирующей расстояния до элементов цепи. Аргумент x функции $f(P_k(\lambda_{k\beta}), x)$ — значения t -й переменной, погруженные в отрезок числовой прямой $[\lambda_1 \dots \lambda_{|\mathbf{I}_t|}]$. На практике $f(P_k(\lambda_{k\beta}), x)$ удобно определить на основе $P_k(\lambda_{k\beta})$ с использованием разложения над базисом Фурье или над иным базисом в гильбертовом пространстве действительных функций. Описание объекта $q = D(x_i)$ набором («пучком») однородных функций $\mathbf{P}(x_i) = \{f(P_k(\Gamma_k(x_i)), x), k = 1, n\}$ видится максимально полным представлением прецедентных данных, отражающим все расстояния от всех значений признаков $\Gamma_k(x_i)$. Тогда рассматривается задача

$$(w_s) = \\ = \arg \min_{w_s} \sum_{\mathbf{X}} \sum_{k=1, n} \left(\arg \min_x f(P_k(\Gamma_k(x_i)), x) - \right. \\ \left. - \Gamma_t(x_i) \right)^2. \quad (4)$$

Одно из возможных решений задачи (4) — введение индивидуальных наборов весов для каждого из значений k (и z , если используется разбиение на n_z процентилей), т. е. $w_s[k, z]$ -настраиваемые метрики (wskz-метрики).

14 Об оценках информативности

В [7] предложены оценки информативности k' -й переменной относительно t -й, сводящиеся к измерению расстояний между ЭФР $F_{k't}(x, y)$ и $F_{k'}(x)F_t(y)$ посредством функций d_f . При рассмотрении k' -й и t -й переменных как двух вероятностных схем (в терминологии А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина) становится возможным рассчитать буквальную «информативность» как разность между количеством информации (средней энтропией по формуле Шеннона) для совместного распределения вероятности $H_{k't}$ и для каждой из переменных по отдельности ($H_{k'}$ и H_t). При независимости k' -й и t -й переменных $H_{k't} = H_{k'} + H_t$, а при взаимозависимости — $H_{k't} < H_t$, так что функционал $H_t - H_{k't}$ оценивает информативность k' -й относительно t -й переменной.

15 МНК-подобные процедуры для настройки $\Gamma_{k'}$

Пусть для данной $\rho_{L\vec{w}}$ $\Gamma_{k'}$ можно представить в виде $\vec{Y}_{k'} = \mathbf{Z}\vec{w}$, где $\vec{Y}_{k'}$ — вектор значений $\Gamma_{k'}$ для всех $x_i \in \mathbf{X}$, $|\vec{Y}_{k'}| = N$, а матрица $\mathbf{Z}$ (размерность $N|\vec{w}|$) отражает способ вычисления $\Gamma_{k'}$ на основе прецедентной информации. Тогда глобальный оптимум $\vec{w}$ для $\Gamma_{k'}(x_i)$ можно вычислить с использованием МНК. Пусть $\vec{Y}$ — столбец матрицы информации, так что $\vec{Y}_{k'} = \vec{Y}$ — условие корректности $\Gamma_{k'}$ и МНК-решение уравнения $\vec{Y} = \mathbf{Z}\vec{w}$ равно

$$\vec{w} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \vec{Y}.$$

Для $\Gamma_{k'}(x_i)$ по (1) и $\rho_{L\vec{w}}$ в виде расстояния Золотарёва или «ясности» элементы $\mathbf{Z}$ представимы как суммы функционалов от $\hat{\Phi}(x)\Gamma_t()$ или $\hat{\phi}(x)\Gamma_t(a)$ по k (признакам) и z (процентиям). В случае расстояний Круглова, Чизара, Бурби—Рао выражения для $\rho_{L\vec{w}}$ содержат «вложенные» термы $(w(\hat{\Phi}(x)\Gamma_t(a) - \hat{\Phi}(x)\Gamma_t(b)))$ в расстоянии Круглова, так что применение МНК требует введения конкретного вида функции $w()$ (кусочно-линейной, полиномиальной, Фурье-аппроксимации и др.).

16 Экспериментальное тестирование предлагаемых методов

Эксперименты были проведены на модельных данных для числового прогнозирования. Признаковые описания объектов представляли собой вектор $\vec{x} = (x_i)$ булевых признаков ($n = 50$), а числовое значение целевой переменной вычислялось булевым полиномом 3-й степени

$$B(\vec{x}) = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{l=0, n} w_{ijl} x_i x_j x_l, \quad x_0 = 1,$$

со случайными w_{ijl} , корректирующим преобразованием $\text{corr}(B(\vec{x}))$ и со стохастическим компонентом $0,2\text{random}() \cdot |\text{corr}(B(\vec{x}))|$. Были сгенерированы 500 модельных выборок. Предварительные эксперименты показали, что использование этой разновидности модельных данных предоставляет намного более строгое тестирование предлагаемых алгоритмических конструкций, чем используемые в предыдущих работах выборки данных по фармако-, хемо- и биоинформатике [2–4, 7].

Синтетические признаки $\Gamma_{k'}(x_i)$ порождались всеми перечисленными в работе [7] способами ($\rho_m(\mathbf{c}_\alpha, \Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i)))$, ЭФР-признаки $\hat{\phi}(x)\rho_{m\alpha}(x_i, p)$

при разных x и др.), а отбор проводился В-алгоритмом [7]. При $n = 50$ общее число синтетических признаков было равно 7562. В качестве *расстояний* ρ_m по следствию 3 теоремы о регулярности и нормальности были использованы метрики на основе одно- и двухэлементных алфавитов $A(a, b)$ и $B(a, b)$ совместно с 65 известными функциями расстояния на множествах, векторах и ЭФР [4]. В качестве ρ_m по следствию 4 — расстояния Золотарёва и «ясности», Круглова, Чизара, Бурби—Рао и wskz-метрики с настройкой $\Gamma_{k'}(x_i)$ посредством МНК.

Для оценки «информативности» получаемых синтетических признаков $\Gamma_{k'}(x_i)$ использовались:

- (1) функционалы на основании расстояний между $\Gamma_{k'}^{-1}(\Gamma_{k'}(x_i))$ и $\Gamma_t^{-1}(\Gamma_t(x_i))$: коэффициент корреляции, нормализованное стандартное отклонение и др.;
- (2) различные варианты функций d_f для ЭФР $F_{k't}(x, y)$ и $F_{k'}(x)F_t(y)$;
- (3) собственно информативность $H_t - H_{k't}$.

В качестве алгоритмов прогнозирования числовых целевых переменных использовались нейронные сети с несколькими слоями (от 2 до 10) с функцией активации softmax и полиномы различных конструкций (более 20 формул, в том числе квазиполиномиальные модели с элементарными функциями) в контексте 10-кратной кросс-валидации 50%/50%.

Экспериментальные исследования были проведены в два этапа: уточнение способов оценки «информативности» и отбор наиболее информативных признаков для прогнозирования целевых переменных. Вычисления по различным способам оценки «информативности» порождаемых синтетических признаков проводились на ЭФР-признаках $\hat{\phi}(x)\rho_{m\alpha}(x_i, p)$, вычисляемых на основе непараметрических ρ_m . Эксперименты показали, что большинство способов оценки информативности входили в два расположенных рядом кластера: малый кластер (в центре — метрика Колмогорова и информативность $H_t - H_{k't}$) и большой кластер (12 точек, в центре d_f , соответствующая расстоянию Реньи). Поскольку кластеры 1 и 2 расположены рядом и кластер 1 содержит информативность в виде $H_t - H_{k't}$, то все метрики (кроме расстояний Андерсона, инженерной метрики и коэффициента корреляции $r(\Gamma_{k'}(x_i), \Gamma_t(x_i))$) могут в действительности рассматриваться как оценки информативности, без кавычек. При этом расстояние Андерсона и инженерная метрика лежат на осях соответствующей метрической диаграммы, а точка, соответствующая коэффициенту корреляции, находится в правом верхнем углу диаграммы.

На втором этапе проводились эксперименты по прогнозированию модельных целевых переменных, включавшие настройку метрик по следствию 4 с использованием синтетических признаков по формулам (1), (2) и (3) и отбор наиболее информативных признаков посредством В-алгоритма на основе метрики Колмогорова (максимальное отклонение) [7]. Наиболее часто в наборы информативных $\Gamma_{k'}$ -признаков входили ЭФР-признаки, сконструированные на основании предложенных в предыдущих работах оценочных метрик (43% от всех информативных), причем самыми информативными ρ_m были *непараметрические* метрики по следствию 3 на множествах (оценочные, расстояния Фейта, Симпсона, Фреше—Никодима).

В то же время если брать самые информативные синтетические $\Gamma_{k'}$, то среди них наиболее часто (38% выборки) встречался признак на основании расстояния Золотарёва (по следствию 4), вычисляемого по формуле (1) и настраиваемого процедурой МНК. Интересно отметить, что среди расстояний по следствию 4, настраиваемых по (1), расстояние Золотарёва доминировало: $\Gamma_{k'}$ на основе настраиваемых расстояний Круглова, Чизара, Бурби—Рао не отличались существенно более высоким качеством.

В целом по исследованной выборке, использование синтетических признаков по (1) с метриками по следствию 4, настраиваемыми посредством МНК-процедур, позволило снизить показатели переобучения и улучшить качество работы алгоритмов числового прогнозирования. Так, с использованием только ЭФР-признаков значение коэффициента ранговой корреляции составило $r = 0,88 \pm 0,09$ на обучении и $r_c = 0,56 \pm 0,23$ на контроле. В то же время добавление признаков по (1)—(3) способствовало повышению $r_c = 0,58 \pm 0,18$ и снижению $r = 0,75 \pm 0,15$, что соответствует улучшению обобщающей способности получаемых алгоритмов.

17 Заключение

В результате анализа условий необходимости и достаточности метризации дискретных пространств $(X, T(X))$ была сформулирована и доказана теорема, устанавливающая соответствие между понятиями регулярности множества прецедентов $\varphi(X)$ и нормальности решетки $L(T(X))$. Следствия этой теоремы позволили сформулировать ряд не исследованных ранее подходов к метризации, включая метрики над алфавитами мощностей по следствию 3, настраиваемые метрики по следствию 4 и конструкции, связанные с учетом порядка атомов (следствие 5 теоремы). Сформулированы

перспективные направления дальнейших исследований:

- (1) переход от решетки $L(T(\mathbf{X}))$ к решетке значений признаков (что позволяет систематически исследовать способы введения метрик между объектами);
- (2) перспективные функционалы для порождения синтетических признаков;
- (3) методы порождения векторных описаний для определения расстояний между элементами $L(T(\mathbf{X}))$;
- (4) представление значений признаков произвольных типов (в том числе булевых) в виде непрерывных функций.

Вычислительные эксперименты показали перспективность предлагаемых способов метризации топологического пространства $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$ и способов порождения синтетических признаков, способствующих повышению обобщающей способности алгоритмов числового прогнозирования.

Литература

1. Торшин И. Ю. Метризация дискретных топологических пространств в контексте теории решеток. Часть 1. О нормальности пространств // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 82–88. doi: 10.14357/19922264250111. EDN: CAWKMO.
2. Торшин И. Ю. О задачах оптимизации, возникающих при применении топологического анализа данных к поиску алгоритмов прогнозирования с фиксированными корректорами // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 2–10. doi: 10.14357/19922264230201. EDN: IGSPEW.
3. Торшин И. Ю. О формировании множеств прецедентов на основе таблиц разнородных признаков описаний методами топологической теории анализа данных // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 2–7. doi: 10.14357/19922264230301. EDN: AQEUYO.
4. Деца Е. И., Деца М. М. Энциклопедический словарь расстояний / Пер. с англ. — М.: Наука, 2008. 444 с. (Deza E. I., Deza M. M. Dictionary of distances. — North-Holland: Elsevier, 2006. 412 p. doi: 10.1016/B978-0-444-52087-6.X5000-8).
5. Torshin I. Y., Rudakov K. V. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification // Pattern Recognition Image Analysis, 2015. Vol. 25. No. 4. P. 577–587. doi: 10.1134/S1054661815040252.
6. Torshin I. Y., Rudakov K. V. On the procedures of generation of numerical features over partitions of sets of objects in the predicting numerical target variables // Pattern Recognition Image Analysis, 2019. Vol. 29. No. 3. P. 654–667. doi: 10.1134/S1054661819040175.
7. Торшин И. Ю. О порождении синтетических признаков на основе опорных цепей и произвольных метрик в рамках топологического подхода к анализу данных. Часть 2. Экспериментальная апробация на задачах фармакоинформатики // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 47–53. doi: 10.14357/19922264240207. EDN: OTXCUD.

Поступила в редакцию 17.03.2025

Принята к публикации 15.05.2025

METRIZATION OF DISCRETE TOPOLOGICAL SPACES IN THE CONTEXT OF LATTICE THEORY. PART 2. PRACTICAL ANALYSIS OF THE CONSEQUENCES OF THE THEOREM ON REGULARITY AND NORMALITY

I. Yu. Torshin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: In the first part, a theorem has been proved that connects the concept of normality of topological spaces and regularity according to Yu. I. Zhuravlev, in the context of the problem of metrization of feature spaces. The consequences of the theorem allow one to systematize the search for the most acceptable problem-oriented metrics. Promising directions for further research have been systematized, including the transition to a lattice of feature values and promising functionals for generating synthetic features. The results of the corresponding computational experiments are presented.

Keywords: topological data analysis; algebraic approach of Yu. I. Zhuravlev and K. V. Rudakov; computational experiment; synthetic features

DOI: 10.14357/19922264250207

EDN: JTNKFQ

References

1. Torshin, I. Yu. 2025. Metrizatsiya diskretnykh topologicheskikh prostranstv v kontekste teorii reshetok. Chast' 1. O normal'nosti prostranstv [Metrization of discrete topological spaces in the context of lattice theory. Part 1. On the normality of spaces]. *Informatika i ee primeneniya — Inform Appl.* 19(1):82–88. doi: 10.14357/19922264250111. EDN: CAWKMO.
2. Torshin, I. Yu. 2023. O zadachakh optimizatsii, voznikayushchikh pri primeneni topologicheskogo analiza dannykh k poisku algoritmov prognozirovaniya s fiksirovannymi korektorami [On optimization problems arising from the application of topological data analysis to the search for forecasting algorithms with fixed correctors]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):2–10. doi: 10.14357/19922264230201. EDN: IGSPew.
3. Torshin, I. Yu. 2023. O formirovani mnozhestv pretsedentov na osnove tablits raznorodnykh priznakovykh opisaniy metodami topologicheskoy teorii analiza dannykh [On the formation of sets of precedents based on tables of heterogeneous feature descriptions by methods of topological theory of data analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):2–7. doi: 10.14357/19922264230301. EDN: AQEUYO.
4. Deza, E. I., and M. M. Deza. 2006. *Dictionary of distances*. North-Holland: Elsevier. 412 p. doi: 10.1016/B978-0-444-52087-6.X5000-8.
5. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2015. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification. *Pattern Recognition Image Analysis* 25(4):577–587. doi: 10.1134/S1054661815040252.
6. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2019. On the procedures of generation of numerical features over partitions of sets of objects in the problem of predicting numerical target variables. *Pattern Recognition Image Analysis* 29(4):654–667. doi: 10.1134/S1054661819040175.
7. Torshin, I. Yu. 2024. O porozhdenii sinteticheskikh priznakov na osnove opornykh tsepey i proizvol'nykh metrik v ramkakh topologicheskogo podkhoda k analizu dannykh. Chast' 2. Eksperimental'naya aprobatsiya na zadachakh farmakoinformatiki [On the generation of synthetic features based on support chains and arbitrary metrics within the framework of a topological approach to data analysis. Part 2. Experimental testing on pharmacoinformatics problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):47–53. doi: 10.14357/19922264240207. EDN: OTXCUD.

Received March 17, 2025

Accepted May 15, 2025

Contributor

Torshin Ivan Y. (b. 1972) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, Candidate of Science (PhD) in chemistry, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str, Moscow 119333, Russian Federation; tiy135@yahoo.com

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ И ДОВЕРИЕ К РЕЗУЛЬТАТАМ КЛАССИФИКАЦИИ

А. А. Грушо¹, Н. А. Грушо², М. И. Забейайло³, В. О. Писковский⁴, Е. Е. Тимонина⁵

Аннотация: Принято считать, что доверие к системе искусственного интеллекта (ИИ) определяется уверенностью потребителя и организаций-регуляторов в том, что данная система способна выполнять возложенные на нее задачи с требуемым качеством. В научной литературе речь идет только о повышении доверия, но не о гарантиях доверия к результатам работы ИИ. В трактовке повышения доверия естественно полагать, что доверия к результатам работы ИИ нет. В данной статье построена математическая модель, в рамках которой доказано, что в классе систем ИИ, построенных на машинном обучении, гарантий доверия быть не может. Определено понятие «доверия классификатору», если он с вероятностью 1 правильно классифицирует новые данные. Результат получен в условиях классического пространства данных R^L и набора равномерных распределений. Модель можно усложнять, оставляя пространство метрическим, а распределения непрерывными. При этом доверие не зависит от способностей классификатора и от свойства генерализации.

Ключевые слова: машинное обучение; доверие; классификация; причинно-следственные связи

DOI: 10.14357/19922264250208

EDN: CXRNK

1 Введение

Понятийные рамки для термина «доверие» предлагает ГОСТ Р 59276–2020, разработанный АО ВНИИС и Техническим комитетом по стандартизации ТК 164 «Искусственный интеллект» [1]. Считается, что доверие к системе ИИ определяется уверенностью потребителя и организаций-регуляторов в том, что данная система способна выполнять возложенные на нее задачи с требуемым качеством. В свою очередь, доверенной предлагается считать такую систему ИИ, которой доверяют пользователи и регуляторы. Там же предлагаются:

- перечень существенных характеристик, определяющих доверие к системам ИИ;
- общая процедурная схема проверки доверия, состоящая в подтверждении соответствия этих характеристик конкретной системы установленным пользователями и регуляторами требованиям;
- способы обеспечения доверия на стадиях жизненного цикла системы ИИ.

Критически значимым в части обеспечения доверия к системам ИИ считается качество используемых ими данных. Развернутое обсуждение проблем критичности влияния качества исходных

данных на функциональность и безопасность систем ИИ можно найти, в частности, в работе [2]. В работе [3] показано, как можно использовать обучающие данные в системах ИИ для искажения результатов их работы. Из результатов этой работы следует необходимость целенаправленного изучения обучающих данных для повышения доверия к результатам работы ИИ, причем эффективность методов такого анализа не доказана.

Детальное обсуждение типологии и методов управления рисками, ассоциируемыми с системами ИИ, в том числе в аспекте обеспечения кибербезопасности, предлагает Национальный институт стандартов США [4, 5].

Популярным и востребованным направлением исследований и разработок в области повышения доверия к системам ИИ стало создание проблемно-ориентированных инструментальных средств выявления уязвимостей в исходном коде программных систем ИИ. Примеры программных инструментов этого типа, а также результатов их использования при доработке популярных фреймворков и прикладных систем ИИ, в том числе для использования в облачной среде, предлагает Центр доверенного ИИ, организованный в ИСП РАН [6].

Интересные примеры подходов к обеспечению доверия к результатам работы прикладных систем ИИ наработаны в области медицины и здравоохра-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, grusho@yandex.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, info@itake.ru

³Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, m.zabeyailo@yandex.ru

⁴Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vvp80@yandex.ru

⁵Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, eltimon@yandex.ru

нения [7–10]. Важнейшими факторами, определяющими доверие к формируемым системами ИИ результатам здесь названы:

- риски причинения вреда здоровью пациентов в силу некачественных выводов и заключений;
- сложность интерпретации полученных в процессе машинного обучения решений (так называемая проблема «черного ящика»);
- повышенные риски некорректной работы самообучающихся алгоритмов, способных изменять свои выводы и заключения вследствие появления новых клинических данных, в том числе получаемых в процессе эксплуатации такой системы ИИ;
- проблемы обеспечения кибербезопасности;
- риски смещения данных, которые, в свою очередь, приводят к асимметрии между теми данными, на которых обучались ИИ-модели, и данными реальной клинической практики и др.

Один из путей повышения доверия в этих задачах — сбор дополнительной информации из различных информационных пространств [11–13].

Оригинальный подход к оценке доверия к результатам, формируемым системой ИИ, предлагается в работах [14–17]. В его основе — использование эвристики приближения к достоверности гипотез, формируемых средствами каузального анализа открытых — пополняемых новыми сведениями — коллекций эмпирических данных [18, 19]. Эта эвристика формализуется средствами оригинальной логики рассуждений, конструктивно интегрируя эмпирическую индукцию, рассуждения по аналогии и абдуктивное объяснение.

Ключевые проблемы в укреплении доверия к ИИ на практическом уровне разработчика ИТ-систем и решений, а также рекомендации и предложения по формированию стратегии укрепления доверия в виде последовательности шагов для укрепления доверия к ИИ обсуждаются в [20]. Целью реализации такого подхода оказывается прозрачность ИИ-решений, которая позволяет пользователям понимать, как системы ИИ формируют свои заключения, и укрепляет уверенность в их надежности.

Из приведенного обзора видно, что речь идет только о повышении доверия, но не о гарантиях доверия к результатам работы ИИ. В трактовке повышения доверия естественно полагать, что доверия к результатам работы ИИ нет.

В данной статье построена математическая модель, в рамках которой доказано, что в классе систем ИИ, построенных на машинном обучении, гарантий доверия быть не может.

2 Модель доверия

Рассматривается задача классификации многомерных числовых данных x , где x принадлежит компактной области $D \subset R^L$. Классы определяются разбиением области D непрерывными границами на k непересекающихся подмножеств $D_1, \dots, D_k$. Классификатор $H(x)$, определяющий принадлежность x одному из классов, представляет собой дифференцируемую функцию на каждом множестве D_i без границ, $i = \overline{1, k}$.

Пусть для простоты значениями классификатора будут натуральные числа $1, 2, \dots, k$. Классификатор имеет внутренние параметры, которые подбираются для каждого класса методом машинного обучения. С этой целью для каждого класса D_i , $i = \overline{1, k}$, создается обучающая выборка S_i из элементов каждого класса (обучение с учителем).

Каждая выборка создается случайно и равномерно, элементы выборки набираются независимо друг от друга. Будем считать, что классификатор правильно определяет класс каждого элемента выборок с вероятностью 1.

Отметим, что классификатор остается дифференцируемой функцией только внутри классов, которые считаются открытыми множествами. На границах классов классификатор имеет разрывы, так как его значения дискретны и различны на различных классах. Отметим, что вероятность попасть на непрерывную границу любого класса равна 0.

Для больших k , L и сложных границ возникает задача доверия к результату классификации на остальных данных, отличных от данных обучающих выборок.

Определим понятие «доверия классификатору» как ситуацию, когда он правильно классифицирует новые данные x из D с вероятностью 1.

Согласно построенной модели данные из обучающих выборок классифицируются правильно с вероятностью 1. Данные, не входящие в обучающие выборки и выбранные случайно, классифицируются с помощью построенной функции H с неизвестным доверием. Отметим, что порядок решения задачи классификации традиционно следующий: случайный выбор обучающей выборки — построение классификатора — случайный выбор новых данных x для классификации.

Рассмотрим следующую обратную модель: случайный выбор данных x для классификации — выбор обучающих выборок с известной принадлежностью к классам, не совпадающих с x с вероятностью 1, — построение классификатора на обучающих выборках — классификация данных x . Такой порядок покажется странным, но он пол-

ностью совпадает по организации, применению и результатам с первоначальным порядком. Новый порядок позволит оценить доверие в задаче классификации.

3 Схема серий в новом порядке классификации

Предположим, что данные x выбираются случайно и равновероятно из области D . Для простоты будем считать, что размер каждой из обучающих выборок равен n . Тогда обучающая выборка произвольного класса становится выборкой размера n из пространства D_i с заданным равномерным распределением. Элементы обучающей выборки для произвольного класса D_i будем обозначать $x(i, m)$, $m = \overline{1, n}$.

В исходном пространстве R^L существует метрика ρ для любой пары точек пространства R^L . Тогда для каждого элемента из всех классов можно вычислить величины

$$\rho(i) = \min_{x(i, m) \in S_i} \{\rho(x(i, m), x)\}.$$

Для всех $i = \overline{1, k}$, $m = \overline{1, n}$, с вероятностью 1 построенные величины $\rho(i)$ больше 0. Такой вывод сделан на основании того, что вероятность попасть в заданную точку пространства D равна 0. Необходимым условием того, что классификатор принимает в точке x правильное значение i с вероятностью 1, служит информация о том, что $x \in D_i$ с вероятностью 1. Если вероятность события $\{x \in D_i\}$ строго меньше 1, то функция не может увеличить эту вероятность до 1. Это означает, что в рассматриваемой модели нет доверия в смысле данного выше определения принадлежности x к определенному классу, поскольку единственными известными элементами, принадлежащими D_i с вероятностью 1, остаются элементы обучающей выборки. Таким образом, если заданы функции принадлежности данных классам, нет достоверности и, следовательно, нет доверия к правильной классификации любым классификатором, основанном на машинном обучении с помощью конечной обучающей выборки.

Рассмотрим вопрос о том, возможно ли, увеличивая размер обучающих выборок, получить доверие к определению класса элемента x . Увеличение размера обучающих выборок n приведет к тому, что последовательности $\rho(i) = \rho(i, n)$ для каждого n будут положительными, и для каждого n вывод о невозможности доказательства доверия будет сохраняться.

Рассмотрим предельное распределение последовательностей $\{\rho(i, n)\}$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что каждая последовательность считается ограничен-

ной и невозрастающей, поэтому каждая последовательность имеет предел. Если элемент x действительно принадлежит D_i , то предел $\rho(i, n)$ равен 0 независимо от случайности в выборе элементов обучающей выборки. Это следует из того, что для любой сколь угодно маленькой окрестности x в форме шара вероятность попадания в эту окрестность нового члена обучающей выборки больше 0. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, в эту окрестность на конечном шаге попадет элемент обучающей выборки. Важно, что для любого малого положительного ε с вероятностью, стремящейся к 1, в шар радиуса ε попадет элемент обучающей выборки.

Если x принадлежит другому классу D_j , то в D_j существует окрестность x в форме шара фиксированного радиуса δ , не имеющего общих точек ни с одной границей других классов, такого что $\rho(i, n) \geq \delta$. Это значит, что элементы обучающей выборки класса D_i не могут попасть в этот шар с вероятностью 1. Таким образом, принадлежность к правильному классу определяется с вероятностью 1, если известно предельное поведение последовательностей $\{\rho(i, n)\}$ при $n \rightarrow \infty$. Однако определить n , при котором x можно классифицировать по приведенной схеме, нельзя. Поэтому в данном случае добиться доверия невозможно.

Для того чтобы связать эти результаты с классификаторами, необходимо рассмотреть схему серий, когда для каждого n обучается свой классификатор, доверие к работе которого не выше, чем доверие к методу классификации, описанному ранее. Отсюда следует, что при использовании только машинного обучения доверие к классификации x не может быть обеспечено. Этот вывод можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. В условиях построенной модели обеспечить доверие к результатам классификации x только по данным обучающих выборок невозможно.

4 Заключение

В работе построена модель, в которой доверие к результату конечной классификации зависит только от обучающих выборок, полученных при использовании принципа обучения с учителем. Доказано, что в этих условиях информации для обеспечения доверия к результатам классификации недостаточно.

Результат получен в условиях классического пространства данных R^L и набора равномерных распределений. Очевидно, что модель можно усложнять, оставляя пространство метрическим, а распределения непрерывными. При этом доверие

не зависит от способностей классификатора и от свойства генерализации.

Авторы не встречали в научной литературе результаты, подобные доказанной теореме, но практические применения потребовали искать пути обхода проблемы, сформулированной в теореме. Основной выход исследователи нашли в описании доверия с помощью теории рисков. Такой подход в своей основе использует вероятностное приближение к точному определению доверия, использованному в статье.

Литература

1. ГОСТ Р 59276–2020. Системы искусственного интеллекта. Способы обеспечения доверия. Общие положения. — М.: Стандартинформ, 2021. 16 с.
2. Гарбук С. В. Функциональность и безопасность систем искусственного интеллекта: качество данных // Открытые системы. СУБД, 2024. № 01. doi: 10.51793/OS.2024.95.90.004. EDN: IKAMSA.
3. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Писковский В. О., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Логика обмана в машинном обучении // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 78–83. doi: 10.14357/19922264240111. EDN: SCDSHX.
4. Artificial intelligence risk management framework (AI RMF 1.0). NIST AI 100-1. — NIST, 2023. 42 p. doi: 10.6028/NIST.AI.100-1.
5. The NIST Cybersecurity Framework (CSF) 2.0. — NIST, 2024. 27 p. doi: 10.6028/NIST.CSWP.29.
6. Исследовательский центр доверенного искусственного интеллекта (ИСП РАН). <https://www.ispras.ru/ai-center>.
7. Rowe J. Informatics association seeks tweaks to FDA's AI regulatory framework // AI Powered Healthcare, 2019. <https://www.healthcareitnews.com/ai-powered-healthcare/informatics-association-seeks-tweaks-fda%E2%80%99s-ai-regulatory-framework>.
8. AI and the potential liability issues arising from use in a clinical setting // Digital Health, 2019. <https://www.digitalhealth.net/2019/08/ai-and-the-potential-liability-issues-arising-from-use-in-a-clinical-setting>.
9. Грушо А. А., Забежайло М. И., Тимонина Е. Е. О казуальной репрезентативности обучающих выборок прецедентов в задачах диагностического типа // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 1. С. 80–86. doi: 10.14357/19922264200111. EDN: LAQCSA.
10. Гусев А. В., Астапенко Е. М., Иванов И. В., Зарубина Т. В., Кобринский Б. А. Принципы формирования доверия к системам искусственного интеллекта для сферы здравоохранения // Вестник Росздравнадзора, 2022. № 2. С. 25–33. EDN: BSMOFV.
11. Grusho A., Grusho N., Timonina E. Method of several information spaces for identification of anomalies // Intelligent distributed computing XIII / Eds. I. Kotenko, C. Badica, V. Desnitsky, D. El Baz, M. Ivanovic. — Studies in computational intelligence ser. — Springer, 2020. Vol. 868. P. 515–520. doi: 10.1007/978-3-030-32258-8_60.
12. Grusho A., Grusho N., Zabezhailo M., Timonina E. Evaluation of trust in computer-computed results // Distributed computer and communication networks / Eds. V. M. Vishnevskiy, K. E. Samouylov, D. V. Kozyrev. — Communications in computer and information science ser. — Cham, Springer, 2022. Vol. 1552. P. 420–432. doi: 10.1007/978-3-030-97110-6_33.
13. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Причинно-следственные связи в задачах классификации // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
14. Финн В. К. Об эмпирических закономерностях в ДСМ-методе автоматизированной поддержки исследований // Научно-техническая информация. Сер. 2, 2023. № 12. С. 14–33. doi: 10.36535/0548-0027-2023-12-2. EDN: MGHILTO.
15. Финн В. К. Об эмпирических закономерностях ранга r в ДСМ-методе автоматизированной поддержки исследований // Научно-техническая информация. Сер. 2, 2024. № 1. С. 11–33. doi: 10.36535/0548-0027-2024-01-2. EDN: BRCGLY.
16. Финн В. К. ДСМ-метод автоматизированной поддержки исследований и доверие к его результатам // Искусственные общества, 2024. Т. 19. Вып. 1. doi: 10.18254/S207751800030180-7. EDN: PLMOHH.
17. Финн В. К. ДСМ-метод автоматизированной поддержки исследований и аппарат понятий для искусственного интеллекта // Искусственные общества, 2024. Т. 19. Вып. 2. doi: 10.18254/S207751800030907-6. EDN: PLMOHH.
18. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Сложные причинно-следственные связи // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 84–89. doi: 10.14357/19922264230212. EDN: TGXQIW.
19. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Смирнов Д. В., Тимонина Е. Е. Классификация с помощью причинно-следственных связей // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 71–75. doi: 10.14357/19922264230310. EDN: AKWBZD.
20. 8 шагов для укрепления доверия к ИИ // Geeks for geeks, 2025. https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.59240b49-67d7e9b5-8a692915-74722d776562/https/www.geeksforgeeks.org/steps-for-building-trust-in-ai.

Поступила в редакцию 26.03.2025

Принята к публикации 15.05.2025

MACHINE LEARNING AND TRUST IN CLASSIFICATION RESULTS

A. A. Grusho, N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. O. Piskovski, and E. E. Timonina

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

Abstract: It is generally accepted that trust in the artificial intelligence system is determined by the confidence of the consumer and regulatory organizations that this system is capable of performing the tasks assigned to it with the required quality. In the scientific literature, we are talking only about increasing trust but not about guaranteeing trust in the results of artificial intelligence. In the interpretation of increasing trust, it is natural to believe that there is no trust in the results of the work of artificial intelligence. In this article, a mathematical model is built, within the framework of which it is proved that in the class of artificial intelligence systems built on machine learning, there can be no guarantees of trust. The concept of “the trust in classifier” is defined if it correctly classifies new data with probability 1. The result was obtained under the conditions of the classical data space R^L and a set of uniform distributions. The model can be complicated by leaving the space metric and the distributions continuous. In this case, trust does not depend on the capabilities of the classifier and on the generalization property.

Keywords: machine learning; trust; classification; causal relationships

DOI: 10.14357/19922264250208

EDN: CXRNK

References

1. GOST R 59276-2020. 2021. Sistemy iskusstvennogo intellekta. Sposoby obespecheniya doveriya. Obshchie polozheniya [Artificial intelligence systems. Methods for ensuring trust. General]. Moscow: Standardinform Pubs. 16 p.
2. Garbuk, S. V. 2024. Funktsional’nost’ i bezopasnost’ sistem iskusstvennogo intellekta: kachestvo dannykh [Functionality and security of artificial intelligence systems: Data quality]. *Otkrytye sistemy. SUBD* [Open Systems. DBMS] 1:18–22. doi: 10.51793/OS.2024.95.90.004. EDN: IKAMSA.
3. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. O. Piskovski, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2024. Logika obmana v mashinnom obuchenii [Logic of deception in machine learning]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):78–83. doi: 10.14357/19922264240111. EDN: SCDSHX.
4. Artificial intelligence risk management framework (AI RMF 1.0). 2023. NIST AI 100-1. NIST. 42 p. doi: 10.6028/NIST.AI.100-1.
5. The NIST cybersecurity framework (CSF) 2.0. 2024. NIST. 27 p. doi: 10.6028/NIST.CSWP.29.
6. Issledovatel’skiy tsentr doverennogo iskusstvennogo intellekta (ISP RAN) [Research Center of the Trusted Artificial Intelligence ISP RAS]. Available at: <https://www.ispras.ru/ai-center> (accessed May 26, 2025).
7. Rowe, J. 2019. Informatics association seeks tweaks to FDA’s AI regulatory framework. *AI Powered Healthcare*. Available at: <https://www.healthcareitnews.com/ai-powered-healthcare/informatics-association-seeks-tweaks-fda%E2%80%99s-ai-regulatory-framework> (accessed May 26, 2025).
8. AI and the potential liability issues arising from use in a clinical setting. 2019. *Digital Health*. Available at: <https://www.digitalhealth.net/2019/08/ai-and-the-potential-liability-issues-arising-from-use-in-a-clinical-setting> (accessed May 26, 2025).
9. Grusho, A. A., M. I. Zabezhailo, and E. E. Timonina. 2020. O kauzal’noy reprezentativnosti obuchayushchikh vyborok pretsedentov v zadachakh diagnosticheskogo tipa [On causal representativeness of training samples of precedents in diagnostic type tasks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(1):80–86. doi: 10.14357/19922264200111. EDN: LAQDMA.
10. Gusev, A. V., E. M. Astapenko, I. V. Ivanov, et al. 2022. Printsipy formirovaniya doveriya k sistemam iskusstvennogo intellekta dlya sfery zdravookhraneniya [Principles for building confidence in artificial intelligence systems for healthcare]. *Vestnik Roszdravnadzora* [Bulletin of Roszdravnadzor] 2:25–33. EDN: BSMOFV.
11. Grusho, A., N. Grusho, and E. Timonina. 2020. Method of several information spaces for identification of anomalies. *Intelligent distributed computing XIII*. Eds. I. Kotenko, C. Badica, V. Desnitsky, D. El Baz, and M. Ivanovic. Studies in computational intelligence ser. Springer. 868:515–520. doi: 10.1007/978-3-030-32258-8_60.
12. Grusho, A., N. Grusho, M. Zabezhailo, and E. Timonina. 2022. Evaluation of trust in computer-computed results. *Distributed computer and communication networks*. Eds. V. M. Vishnevskiy, K. E. Samouylov, and D. V. Kozyrev. Communications in computer and information science ser. Cham, Springer. 1552:420–432. doi: 10.1007/978-3-030-97110-6_33.
13. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. V. Kulchenkov, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Prichinno-sledstvennyye svyazi v zadachakh klassifikatsii [Causal relationships in classification problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
14. Finn, V. K. 2023. On empirical regularities in the JSM method of automated research support. *Automatic Doc-*

- umentation *Mathematical Linguistics* 57(6):362–381. doi: 10.3103/S0005105523060055.
15. Finn, V. K. 2024. On rank r empirical regularities in the JSM method of automated research support. *Automatic Documentation Mathematical Linguistics* 58(1):10–31. doi: 10.3103/S0005105524010035.
 16. Finn, V. K. 2024. DSM-metod avtomatizirovannoy podderzhki issledovaniy i doverie k ego rezul'tatam [JSM method for automated research support and trust in its results]. *Iskusstvennye obshchestva* [Artificial Societies] 19(1):9. 36 p. doi: 10.18254/S207751800030180-7. EDN: PLMOHH.
 17. Finn, V. K. 2024. DSM-metod avtomatizirovannoy podderzhki issledovaniy i apparat ponyatiy dlya iskusstvennogo intellekta [The JSM-method of automated research support and the conceptual apparatus for artificial intelligence]. *Iskusstvennye obshchestva* [Artificial Societies] 19(2):9. 75 p. doi: 10.18254/S207751800030907-6. EDN: FVVMNB.
 18. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Slozhnye prichinno-sledstvennye svyazi [Complex cause-and-effect relationships]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):84–89. doi: 10.14357/19922264230212. EDN: TGXQIW.
 19. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, D. V. Smirnov, and E. E. Timonina. 2023. Klassifikatsiya s pomoshch'yu prichinno-sledstvennykh svyazey [Classification by cause-and-effect relationships]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):71–75. doi: 10.14357/19922264230310. EDN: AKWBZD.
 20. 8 shagov dlya ukrepleniya doveriya k II [8 steps for building trust in AI]. 2025. *Geeks for geeks*. Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/steps-for-building-trust-in-ai> (accessed May 26, 2025).

Received March 26, 2025

Accepted May 15, 2025

Contributors

Grusho Alexander A. (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; grusho@yandex.ru

Grusho Nikolai A. (b. 1982) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; info@itake.ru

Zabezhailo Michael I. (b. 1956) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; m.zabezhailo@yandex.ru

Piskovski Viktor O. (b. 1963) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; vvp80@yandex.ru

Timonina Elena E. (b. 1952) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; eltimon@yandex.ru

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРЫ ПРОБЛЕМЫ В ГИБРИДНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

С. В. Листопад¹, И. А. Кириков²

Аннотация: Работа направлена на развитие исследований в области автоматического решения практических проблем, сложность которого обусловлена нечеткостью их определения и слабой формализацией: на момент возникновения проблемы часто отсутствует ясное понимание ее сути и границ, что требует дополнительных усилий для их выявления и описания. Один из традиционных подходов при ручном и автоматизированном решении практических проблем — декомпозиция их на части, которые могут быть решены существующими методами — требует значительных временных и трудовых ресурсов. В настоящей работе на основе традиционных подходов к декомпозиции проблемы построена концептуальная модель метода автоматической идентификации ее структуры с использованием прототипных фреймовых моделей для применения в гибридных интеллектуальных многоагентных системах (ГиИМАС) с целью снижения трудозатрат на начальном этапе ее решения.

Ключевые слова: проблема; концептуальная модель; декомпозиция; редукция; коллектив специалистов; гибридная интеллектуальная многоагентная система

DOI: 10.14357/19922264250209

EDN: EFHCPM

1 Введение

Ключевые характеристики практических проблем [1, 2], требующие формирования групп специалистов для всестороннего анализа и согласования решений, — их слабая формализация, а также разнообразие необходимых знаний и методов [3–5]. Моделирование коллективных рассуждений в таких группах может выполняться методами синергетического искусственного интеллекта, в частности ГиИМАС [1]. Существенный недостаток ГиИМАС и построенных на их основе рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов [6] — ограниченность автоматической идентификации структуры новых слабоформализуемых проблем. Разработка методов и моделей, повышающих автоматизацию процесса идентификации структуры проблемы, позволит снизить трудозатраты на данном этапе ее решения.

В [7] рассмотрены основные подходы к идентификации структуры проблемы в коллективах специалистов, а в [8] проанализированы существующие методы автоматизированной [9] и автоматической [10–14] декомпозиции проблем. Анализ, проведенный в этих работах, показал актуальность разработки новых и интеграции существующих методов для компенсации их недостатков, в частности с использованием технологий больших языковых моделей [15, 16], генеративных агентов [17],

а также необходимость учета результатов, полученных в рамках традиционных подходов к идентификации структуры проблемы коллективами специалистов [18, 19]. Настоящая работа посвящена разработке концептуальной модели метода автоматической идентификации структуры проблемы в ГиИМАС на основе данных подходов.

2 Концептуальная модель проблемы

На основе анализа подходов к определению понятия «проблема» [3, 20–22] в качестве рабочего принято определение проблемы как затруднения, обуславливающего негативное восприятие субъектом текущей ситуации, характеризующегося такими особенностями, как недоопределенность, комплексность, многослойность, полителичность, непрозрачность, динамичность, субъективность, межпредметное содержание [8].

Ввиду недоопределенности при возникновении затруднения невозможно определить, присущи ли ему остальные характеристики, а потому в этот момент потенциальная проблема может быть описана только на макроуровне (обозначается чертой над символом концепта):

$$\overline{\text{prb}} = \langle \text{id, sit, sbj, est} \rangle, \quad (1)$$

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ser-list-post@yandex.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, baltbipiran@mail.ru

где id — идентификатор проблемы; sit — субъективное описание проблемной ситуации; sbj — наименование субъекта, столкнувшегося с проблемой; est — оценка, характеризующая негативное восприятие ситуации sit субъектом sbj .

На микроуровне (обозначается чертой под символом концепта) модель проблемы может быть описана следующим кортежем:

$$\underline{prb} = \langle sitm, sbjm, STHM, pfmt, metm \rangle, \quad (2)$$

где $sitm$ — концептуальная модель ситуации sit [8]; $sbjm$ — концептуальная модель субъекта sbj (4); $STHM$ — концептуальные модели стейкхолдеров (4); $pfmt$ — метод (5) формирования проблемного поля $prbfld$ (6); $metm$ — концептуальная модель формируемого метода решения проблемы [8].

Таким образом, проблема представляется своими макро- (1) и микроуровневой (2) моделями, которые специфицируются по мере анализа проблемы и могут быть пустыми на его первых этапах:

$$prb = \langle \overline{prb}, \underline{prb} \rangle. \quad (3)$$

Модели субъекта $sbjm$ и стейкхолдера $sthm \in STHM$ (2) описываются кортежем

$$sbjm = sthm = \langle sthid, gl, EPR, evmet \rangle, \quad (4)$$

где $sthid$ — идентификатор субъекта или стейкхолдера; gl — цель, состояние объективной реальности, к которому стремится субъект или стейкхолдер; EPR — критерии оценки, выражающие поставленную цель gl количественно; $evmet$ — метод оценивания ситуации, формирующий значения критериев EPR на основе динамической модели предметной области $dsam$.

Микроуровневая модель проблемы (2) строится в процессе ее формулирования и идентификации структуры, которая выполняется в том числе с помощью метода $pfmt$ формирования проблемного поля (2):

$$\langle sitm, sbjm, STHM \rangle \xrightarrow{pfmt} prbfld, \quad (5)$$

где $prbfld$ — модель проблемного поля, т. е. комплекса проблем, связанных с рассматриваемой, определяемого выражением

$$prbfld = \langle PRB, R_1^{prb-prb}(prb, PRB), R_1^{prb-prb}(PRB, prb), R_2^{prb-prb}(PRB, PRB) \rangle, \quad (6)$$

где PRB — множество проблем, описываемых выражением (3); $R_1^{prb-prb}$ — отношение «быть частью» между проблемой, включающей рассматриваемую

проблему prb , а также между рассматриваемой проблемой prb и ее частями; $R_2^{prb-prb}$ — отношение «быть связанным с» между проблемами одного уровня иерархии, формируемой отношением $R_1^{prb-prb}$.

В зависимости от специфицируемой части проблемного поля могут быть выделены следующие элементы метода формирования проблемного поля $prbfld$:

$$pfmt = \langle sppimt, slpimt, sbpimt \rangle,$$

где $sppimt$ — метод выявления для рассматриваемой проблемы prb вышестоящей $prb^{sup} \in PRB \wedge R_1^{prb-prb}(prb, prb^{sup})$, формирующий ее макроуровневую модель $\overline{prb^{sup}}$; $slpimt$ — метод идентификации структуры вышестоящей проблемы prb^{sup} , формирующий макроуровневые модели проблем одного уровня иерархии $\{prb^i | prb^i \in PRB \wedge R_1^{prb-prb}(prb^i, prb^{sup})\}$ с рассматриваемой проблемой и отношения между ними $R_2^{prb-prb}$; $sbpimt$ — метод идентификации структуры рассматриваемой проблемы, формирующий модели подпроблем $\{prb^i | prb^i \in PRB \wedge R_1^{prb-prb}(prb^i, prb)\}$ рассматриваемой проблемы и отношения $R_2^{prb-prb}$ между ними, а также с рассматриваемой проблемой $R_1^{prb-prb}$.

3 Модель метода автоматической идентификации структуры проблемы

Построенная на основе традиционных подходов, рассмотренных в [7], модель $sbpimd$ метода $sbpimt$ автоматической идентификации структуры проблемы, описывающая основные его элементы, может быть представлена следующим кортежем:

$$sbpimd = \langle FML, fncm, pdm, pdsem, pdrem \rangle, \quad (7)$$

где FML — множество (библиотека) прототипных фреймовых [18] моделей; $fncm$ — метод выбора прототипной модели как кандидата для декомпозиции рассматриваемой проблемы; pdm — метод декомпозиции проблемы в соответствии с выбранной прототипной моделью; $pdsem$ — метод оценки завершенности процесса декомпозиции, в результате работы которого принимается решение о необходимости продолжения декомпозиции, успешном завершении процесса декомпозиции или невозможности дальнейшей декомпозиции; $pdrem$ — метод оценки релевантности декомпозиции первоначальной проблеме.

Прототипная фреймовая модель $fm \in FML$, описывающая число подпроблем и отношения между ними, представляется кортежем

$$fm = \langle PRB^e, R^{prb-prb} \rangle, \quad (8)$$

где PRB^e — множество пустых моделей prb^e проблемы (3), в которых заполнена только первая компонента id кортежа макроуровневой модели $\overline{prb}^e$ (1), обеспечивающая их уникальность; $R^{prb-prb}$ — множество отношений, заданных на множестве PRB^e .

Элементы (слоты) прототипной фреймовой модели $fm \in FML$ (8) — множества PRB^e и $R^{prb-prb}$ — составляются таким образом, чтобы модель описывала декомпозицию проблем определенного класса минимально возможным способом. Это означает, что при удалении любого элемента из множеств PRB^e и $R^{prb-prb}$ теряется полнота декомпозиции и она перестает определять проблему или класс проблем, для которых предназначена [23].

Метод fmc_m выбора прототипной фреймовой модели как кандидата для декомпозиции рассматриваемой проблемы представляется выражением

$$fmc_m = \langle fml, fco, fmp \rangle,$$

где fml — перебор моделей в соответствии с частичным порядком на множестве FML , заданным функцией fmp ; fco — функция формирования значения критерия оптимальности прототипных фреймовых моделей, задаваемая разработчиками ГиИМАС, в которой выполняется автоматическая идентификация структуры проблемы; fmp — функция формирования частично упорядоченного множества прототипных фреймовых моделей

$$FMO = \left(FML, \overset{fmp}{\preceq} \right),$$

где $\overset{fmp}{\preceq}$ — отношение порядка на множестве FML , задаваемое выражением

$$fm_p \overset{fmp}{\preceq} fm_q \Leftrightarrow fco(fm_p) \leq fco(fm_q).$$

Метод pdm декомпозиции проблемы в соответствии с прототипной моделью предназначен для построения очередного уровня иерархии проблемного поля $prbld$ (6) и может быть представлен кортежем

$$pdm = \langle spei, mamf, mimf, bprf, slrf \rangle, \quad (9)$$

где $spei$ — функция идентификации в исходной проблеме частей, для которых справедливы отношения $R^{prb-prb}$ из выбранной прототипной фреймовой модели fm , в результате чего идентифицированные части проблемы ставятся в соответствие

элементам множества PRB^e ; $mamf$ — функция формирования макроуровневых моделей $\overline{prb}^e$ подпроблем $prb^e \in PRB^e$ (8), в результате работы которой первоначально пустые макроуровневые модели подпроблем $\overline{prb}^e$ из прототипной фреймовой модели fm наполняются реальным содержанием в соответствии с частями проблемы, идентифицированными методом $spei$; $mimf$ — функция формирования микроуровневых моделей $\underline{prb}^e$ подпроблем $prb^e \in PRB^e$ (8) на основе их макроуровневых моделей $\overline{prb}^e$, построенных функцией $mamf$; $bprf$ — функция формирования отношений между элементами модели исходной проблемы prb и элементами моделей подпроблем prb^e ; $slrf$ — функция формирования отношений между элементами моделей подпроблем prb^e , описывающих взаимозависимости между ними.

Метод $pdsem$ оценки завершенности процесса декомпозиции представляется следующим выражением:

$$pdsem = \langle fec, fcpc, fdpc, sdd \rangle, \quad (10)$$

где fec — функция проверки подпроблем $prb^e \in PRB^e$ (8) на элементарность; $fcpc$ — функция проверки возможности использования в качестве основания декомпозиции другой прототипной фреймовой модели $fm \in FML$ (8); $fdpc$ — функция проверки возможности идентификации структуры неэлементарных подпроблем $prb^e \in PRB^e$ (8); sdd — принятие решения о невозможности декомпозиции.

Функция fec (10) проверки выделенных подпроблем на элементарность предполагает анализ возможностей агентов ГиИМАС, каждый из которых описывается на макроуровне следующим выражением [24]:

$$\overline{ag} = \langle id^{ag}, LANG^{ag}, PRB^{ag}, CP^{ag} \rangle,$$

где id^{ag} — идентификатор агента; $LANG^{ag}$ — множество языков передачи сообщений [25, 26], используемых агентом при взаимодействии с другими агентами системы; PRB^{ag} — множество концептуальных моделей проблем (подпроблем, элементарных задач), которые способен решить агент; CP^{ag} — управляющие параметры агента, которые позволяют оказывать влияние на его поведение.

Таким образом, функция fec (10) проверки выделенных подпроблем на элементарность сводится к поиску для каждой подпроблемы $prb^e \in PRB^e$ (8) соответствующей ей проблемы из множества $PRB^{himas} = \bigcup_{ag_i \in AG} PRB^{ag_i}$, где AG — множество агентов ГиИМАС. При этом любые две проблемы prb_i и prb_j считаются эквивалентными, если соблюдается условие

$$S^C(prb_i, prb_j) > psr,$$

где S^C — мера сходства концептов (6) из [27], комбинирующая лексикографическую и таксономическую меры сходства концептов; psr — определяемое в результате вычислительных экспериментов с ГиИМАС пороговое значение меры сходства концептов.

Если для каждой подпроблемы из PRB^e (8) находится соответствующая ей модель в PRB^{himas} , т. е. в составе ГиИМАС существует агент, способный ее решить, то все выделенные в ходе декомпозиции проблемы считаются элементарными, а декомпозиция завершена. В противном случае в зависимости от результата работы функций $fsrc$ и $fdpc$ выполняется декомпозиция проблемы с использованием другой прототипной фреймовой модели в качестве основания либо идентификация структуры неэлементарных подпроблем путем рекурсивного вызова метода $sbpimt$. Если одна из этих функций возвращает положительный результат, выполняется соответствующее ей действие. Если обе функции возвращают положительный результат, необходимое действие выбирается в соответствии с настройками метода. Если обе функции возвращают отрицательный результат, вызывается функция sdd , принимается решение о невозможности продолжения автоматической декомпозиции и выводится список неэлементарных подпроблем, для решения которых требуется разработать метод решения вручную.

Метод $pdrem$ (7) оценки релевантности декомпозиции первоначальной проблеме предназначен для проверки того, насколько полно совокупность выделенных подпроблем ее описывает. Данный метод описывается выражением

$$pdrem = \langle fpu, fpc \rangle,$$

где fpu — функция поэлементного объединения микроуровневых моделей $\underline{prb}^e$ (2) подпроблем $\underline{prb}^e \in PRB^e$ фреймовой модели $fm \in FML$ (8), сформированных в результате выполнения метода rdm декомпозиции проблемы (9); fpc — функция оценки пересечения микроуровневых моделей исходной проблемы $\underline{prb}$ и модели $\underline{prb}^* = fpu(PRBe)$, декомпозиция считается релевантной исходной проблеме, если они совпадают либо модель $\underline{prb}$ включена в $\underline{prb}^*$.

4 Заключение

В статье представлена концептуальная модель проблемы, описывающая ее на макро- и микроуровнях, учитывающая такие характеристики, как недоопределенность, комплексность, многослойность, динамичность и полителичность. На основе

предложенной в работе модели проблемы разрабатывается концептуальная модель метода автоматической идентификации структуры проблемы в ГиИМАС, которая строится с использованием традиционных подходов и включает в себя библиотеку прототипных фреймовых моделей. Прототипная фреймовая модель проблемы, содержащая множества пустых моделей-заготовок подпроблем и отношений между ними, выступает в качестве основы для декомпозиции рассматриваемой проблемы и наполняется содержанием в процессе ее анализа. Разработка методов идентификации структуры проблемы в рамках различных технологий искусственного интеллекта в соответствии с предложенной моделью позволит повысить степень автоматизации процессов решения практических проблем и снизить трудозатраты на их анализ и моделирование.

Литература

1. Румовская С. Б., Колесников А. В., Литвин А. А. Визуальный метаязык описания решения диагностических проблем // Системы и средства информатики, 2019. Т. 29. № 4. С. 39–49. doi: 10.14357/08696527190404. EDN: XVDQLJ.
2. Колесников А. В., Листонад С. В. Протокол гетерогенного мышления гибридной интеллектуальной многоагентной системы для решения проблемы восстановления распределительной электросети // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 2. С. 76–82. doi: 10.14357/19922264190211. EDN: MDLXEF.
3. Спиридонов В. Ф. Психология мышления: Решение задач и проблем. — М.: Генезис, 2006. 319 с. EDN: RYRZQP.
4. Нариньяни А. С. Инженерия знаний и НЕ-факторы: краткий обзор-08 // Вопросы искусственного интеллекта, 2008. № 1. С. 61–77.
5. Румовская С. Б. Подходы к подбору специалистов при организации коллективного решения проблем // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 96–103. doi: 10.14357/19922264230214. EDN: VJWNOE.
6. Листонад С. В. Жизненный цикл методологии построения рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 84–91. doi: 10.14357/19922264240112. EDN: GUAMVE.
7. Rumovskaya S., Kirikov I. Identifying the problem structure. Part 2: Methods to be used in problem-solving teams // 6th Conference (International) on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency Proceedings. — IEEE, 2024. P. 625–630. doi: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803810.

8. *Листопад С. В., Кириков И. А.* Анализ подходов к идентификации структуры проблемы в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 3. С. 35–47. doi: 10.14357/08696527240304. EDN: RSLMXC.
9. *Sarkar S., Dong A., Gero J. S.* A problem decomposition method for conceptual design // Research into design: Supporting multiple facets of product development / Ed. A. Chakrabarti. — Singapore: Research Publishing Services, 2009. P. 59–66.
10. *Khare V. R., Yao X., Sendhoff B., Jin Y., Wersing H.* Co-evolutionary modular neural networks for automatic problem decomposition // Congress on Evolutionary Computation Proceedings. — IEEE, 2005. Vol. 3. P. 2691–2698. doi: 10.1109/CEC.2005.1555032.
11. *El-Abd M.* A cooperative approach to The Artificial Bee Colony algorithm // Congress on Evolutionary Computation Proceedings. — IEEE, 2010. Art. 5586007. 5 p. doi: 10.1109/CEC.2010.5586007.
12. *Листопад С. В., Кириков И. А.* Разрешение конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 54–60. doi: 10.14357/19922264220108. EDN: VHRAQC.
13. *Барашов Е. Б., Егоркин А. В., Лемтюжникова Д. В., Посыткин М. А.* Анализ эффективности алгоритма редукции в решении задачи об упаковке в контейнеры // Системы и средства информатики, 2023. Т. 33. № 3. С. 61–75. doi: 10.14357/08696527230305. EDN: QDUAMY.
14. *Ortiz S.* What is Auto-GPT? Everything to know about the next powerful AI tool. 2023. <https://www.zdnet.com/article/what-is-auto-gpt-everything-to-know-about-the-next-powerful-ai-tool>.
15. *Егорова А. Ю., Зацман И. М., Романенко В. О.* Машинный перевод с помощью ChatGPT: мониторинг воспроизводимости результатов // Системы и средства информатики, 2023. Т. 33. № 3. С. 117–128. doi: 10.14357/08696527230310. EDN: LTOWWN.
16. *Босов А. В., Иванов А. В.* О применении генеративных моделей в системе электронного обучения математическим дисциплинам // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 72–81. doi: 10.14357/19922264240210. EDN: UWKQLN.
17. *Park J. S., O'Brien J., Cai C. J., Morris M. R., Liang P., Bernstein M. S.* Generative agents: Interactive simulacra of human behavior // 36th Annual Symposium on User Interface Software and Technology Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2023. Art. 2. 22 p.
18. *Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Основы системного анализа. — Томск: НТЛ, 1997. 396 с.
19. *Герасимов Б. Н.* Технологии исследования и решения проблем // Экономика и бизнес: теория и практика, 2016. № 10. С. 17–24. EDN: XAHRIT.
20. *Ивин А. А.* Искусство правильно мыслить. — М.: Просвещение, 1990. 240 с. EDN: TJMMWP.
21. *Тарасенко Ф. П.* Прикладной системный анализ. — М.: Кнорус, 2010. 224 с. EDN: QMUKWJ.
22. *Rumovskaya S.* Revisiting the «Problem» and its structure // 4th Conference (International) on Technology Enhanced Learning in Higher Education Proceedings. — IEEE, 2024. P. 219–223. doi: 10.1109/tele62556.2024.10605656.
23. *Козлов А. Н.* Интеллектуальные информационные системы. — Пермь: ПГСХА, 2013. 278 с. EDN: UCKGER.
24. *Листопад С. В.* Моделирование рефлексивных процессов в коллективах специалистов, решающих проблемы за круглым столом // Моделирование неравновесных, адаптивных и управляемых систем: Мат-лы XXVI Всероссийского семинара. — Красноярск: ИБМ СО РАН, 2023. С. 57–66. EDN: HVOUCO.
25. *FIPA ACL message structure specification.* <http://www.fipa.org/specs/fipa00061/index.html>.
26. *Finin T., Fritzson R., McKay D., McEntire R.* KQML as an agent communication language // 3rd Conference (International) on Information and Knowledge Management Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 1994. P. 456–463. doi: 10.1145/191246.191322.
27. *Kirikov I. A., Listopad S. V.* Measuring protocol consistency in cohesive hybrid intelligent multi-agent systems // Open semantic technologies for intelligent system / Eds. V. Golenkov, V. Krasnoprosin, V. Golovko, D. Shunkevich. — Communications in computer and information science ser. — Cham: Springer, 2022. Vol. 1625. P. 39–58. doi: 10.1007/978-3-031-15882-7_3.

Поступила в редакцию 16.01.2025

Принята к публикации 15.05.2025

CONCEPTUAL MODEL FOR PROBLEM STRUCTURE IDENTIFICATION IN HYBRID INTELLIGENT MULTIAGENT SYSTEMS

S. V. Listopad and I. A. Kirikov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper is aimed at developing research in the field of automatic solving of practical problems, the complexity of which is due to the vagueness of their definition and weak formalization; at the time of the problem occurrence, there is often no clear understanding of its essence and boundaries, which requires additional efforts to identify and describe them. One of the traditional approaches to manual and automated solution of practical problems, which is their decomposition into parts that can be solved by existing methods, requires significant time and labor resources. In this paper, based on traditional approaches to problem decomposition, a conceptual model of the method of automatic identification of its structure based on prototype frame models is built for use in hybrid intelligent multiagent systems to reduce labor costs at the initial stage of the solution.

Keywords: problem; conceptual model; decomposition; reduction; team of specialists; hybrid intelligent multiagent system

DOI: 10.14357/19922264250209

EDN: EFHCPM

References

1. Rumovskaya, S. B., A. V. Kolesnikov, and A. A. Litvin. 2019. Vizual'nyy metayazyk opisaniya resheniya diagnosticheskikh problem [Visual metalanguage for description of solution of diagnostic problems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 29(4):39–49. doi: 10.14357/08696527190404. EDN: XVDQLJ.
2. Kolesnikov, A. V., and S. V. Listopad. 2019. Protokol geterogennogo myshleniya gibridnoy intellektual'noy mnogoagentnoy sistemy dlya resheniya problemy vosstanovleniya raspredelitel'noy elektroseti [Heterogeneous thinking protocol of hybrid intelligent multiagent system for solving distributional power grid recovery problem]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(2):76–82. doi: 10.14357/19922264190211. EDN: MDLXEF.
3. Spiridonov, V. F. 2006. *Psikhologiya myshleniya: Reshenie zadach i problem* [The psychology of mind: Solving of tasks and problems]. Moscow: Genesis. 319 p. EDN: RYZZQP.
4. Narinyani, A. S. 2008. Inzheneriya znaniy i NE-factory: kratkiy obzor-08 [Knowledge engineering and nonfactors: A brief overview-08]. *Voprosy iskusstvennogo intellekta* [Artificial Intelligence Issues] 1:61–77.
5. Rumovskaya, S. B. 2023. Podkhody k podboru spetsialistov pri organizatsii kolektivnogo resheniya problem [Selection of specialists in the organization of collective solving problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):96–103. doi: 10.14357/19922264230214. EDN: VJWNOE.
6. Listopad, S. V. 2024. Zhiznennyy tsikl metodologii postroeniya refleksivno-aktivnykh sistem iskusstvennykh geterogennykh intellektual'nykh agentov [Life cycle of methodology for constructing reflexive-active systems of artificial heterogeneous intelligent agents]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):84–91. doi: 10.14357/19922264240112. EDN: GUAMVE.
7. Rumovskaya, S., and I. Kirikov. 2024. Identifying the problem structure. Part 2: Methods to be used in problem-solving teams. *6th Conference (International) on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency Proceedings*. IEEE. 625–630. doi: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803810.
8. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2024. Analiz podkhodov k identifikatsii struktury problemy v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Analysis of approaches to problem structure identification in hybrid intelligent multiagent systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(3):35–47. doi: 10.14357/08696527240304. EDN: RSLMXC.
9. Sarkar, S., A. Dong, and J. S. Gero. 2009. A problem decomposition method for conceptual design. *Research into design: Supporting multiple facets of product development*. Ed. A. Chakrabarti. Singapore: Research Publishing Services. 59–66.
10. Khare, V. R., Xin Yao, B. Sendhoff, Yaochu Jin, and H. Wersing. 2005. Co-evolutionary modular neural networks for automatic problem decomposition. *Congress on Evolutionary Computation Proceedings*. IEEE. 3:2691–2698. doi: 10.1109/CEC.2005.1555032.
11. El-Abd, M. 2010. A cooperative approach to the artificial bee colony algorithm. *Congress on Evolutionary Computation Proceedings*. IEEE. Art. 5586007. 5 p. doi: 10.1109/CEC.2010.5586007.
12. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2022. Razreshenie konfliktov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Conflict resolution in hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform.*

- Appl.* 16(1):54–60. doi: 10.14357/19922264220108. EDN: VHRAQC.
13. Barashov, E. B., A. V. Egorkin, D. V. Lemtyuzhnikova, and M. A. Posypkin. 2023. Analiz effektivnosti algoritma reduksii v reshenii zadachi ob upakovke v konteynery [Efficiency of the reduction algorithms in the bin packing problem]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(3):61–75. doi: 10.14357/08696527230305. EDN: QDUAMY.
 14. Ortiz, S. 2023. What is Auto-GPT? Everything to know about the next powerful AI tool. Available at: <https://www.zdnet.com/article/what-is-auto-gpt-everything-to-know-about-the-next-powerful-ai-tool/> (accessed May 26, 2025).
 15. Egorova, A. Yu., I. M. Zatsman, and V. O. Romanenko. 2023. Mashinnyy perevod s pomoshch'yu ChatGPT: monitoring vosproizvodimosti rezul'tatov [Machine translation by ChatGPT: Monitoring of outcome reproducibility]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(3):117–128. doi: 10.14357/08696527230310. EDN: LTOWWN.
 16. Bosov, A. V., and A. V. Ivanov. 2024. O primenении generativnykh modeley v sisteme elektronnoy obucheniya matematicheskimi distsiplinami [On the application of generative models in the e-learning system of mathematical disciplines]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):72–81. doi: 10.14357/19922264240210. EDN: UWKQLN.
 17. Park, J. S., J. O'Brien, C. J. Cai, M. R. Morris, P. Liang, and M. S. Bernstein. 2023. Generative agents: Interactive simulacra of human behavior. *36th Annual Symposium on User Interface Software and Technology Proceedings*. New York, NY: ACM. Art. 2. 22 p.
 18. Peregudov, F. I., and F. P. Tarasenko. 1997. *Osnovy sistemnogo analiza* [Fundamentals of systems analysis]. Tomsk: NTL. 396 p.
 19. Gerasimov, B. N. 2016. Tekhnologii issledovaniya i resheniya problem [Technologies of research and problem-solving]. *Ekonomika i biznes: teoriya i praktika* [Economy and Business: Theory and Practice] 10:17–24. EDN: XAHKIT.
 20. Ivin, A. A. 1990. *Iskusstvo pravil'no myslit'* [The art of thinking right]. Moscow: Prosveshchenie Publ. 240 p. EDN: TJMMWP.
 21. Tarasenko, F. P. 2010. *Prikladnyy sistemnyy analiz* [Applied systems analysis]. Moscow: Knorus. 224 p. EDN: QMUKWJ.
 22. Rumovskaya, S. 2024. Revisiting the “Problem” and its structure. *4th Conference (International) on Technology Enhanced Learning in Higher Education Proceedings*. IEEE. 219–223. doi: 10.1109/TELE62556.2024.10605656.
 23. Kozlov, A. N. 2013. *Intellectual'nye informatsionnye sistemy* [Intelligent information systems]. Perm: PGSKhA. 278 p. EDN: UCKGER.
 24. Listopad, S. V. 2023. Modelirovanie refleksivnykh protsessov v kolektivakh spetsialistov, reshayushchikh problemy za kruglym stolom [Modeling reflexive processes in teams of specialists solving problems at a round table]. *Modelirovanie neravnovesnykh, adaptivnykh i upravlyaemykh sistem: Mat-ly XXVI Vserossiyskogo seminara* [Modelling of nonequilibrium, adaptive and controlled systems: 26th National Workshop]. Krasnoyarsk: IVM SO RAN. 57–66. EDN: HVOUCO.
 25. FIPA ACL message structure specification. Available at: <http://www.fipa.org/specs/fipa00061/index.html> (accessed May 26, 2025).
 26. Finin, T., R. Fritzson, D. McKay, and R. McEntire. 1994. KQML as an agent communication language. *3rd Conference (International) on Information and Knowledge Management Proceedings*. New York, NY: ACM. 456–463. doi: 10.1145/191246.191322.
 27. Kirikov, I. A., and S. V. Listopad. 2022. Measuring protocol consistency in cohesive hybrid intelligent multi-agent systems. *Open semantic technologies for intelligent system*. Eds. V. Golenkov, V. Krasnoprosin, V. Golovko, and D. Shunkevich. Communications in computer and information science ser. Cham: Springer. 1625:39–58. doi: 10.1007/978-3-031-15882-7_3.

Received January 16, 2025

Accepted May 15, 2025

Contributors

Listopad Sergey V. (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; ser-list-post@yandex.ru

Kirikov Igor A. (b. 1955) — Candidate of Science (PhD) in technology, director, Kaliningrad Branch of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; baltbipiran@mail.ru

Битюков Павел Юрьевич (р. 2003) — студент магистратуры Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт»

Битюков Юрий Иванович (р. 1972) — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Борисов Андрей Владимирович (р. 1965) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Босов Алексей Вячеславович (р. 1969) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Грушо Александр Александрович (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Грушо Николай Александрович (р. 1982) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Забейхайло Михаил Иванович (р. 1956) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Кириков Игорь Александрович (р. 1955) — кандидат технических наук, директор Калининградского филиала Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Кривенко Михаил Петрович (р. 1946) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Куринов Юрий Николаевич (р. 2002) — студент бакалавриата кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Листопад Сергей Викторович (р. 1984) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Писковский Виктор Олегович (р. 1963) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Смелянский Руслан Леонидович (р. 1950) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой автоматизации систем вычислительных комплексов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Тимонина Елена Евгеньевна (р. 1952) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Торшин Иван Юрьевич (р. 1972) — кандидат физико-математических наук, кандидат химических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Урюпин Илья Вадимович (р. 1993) — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Шестаков Олег Владимирович (р. 1976) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры

математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Если при подготовке статьи авторы использовали инструменты на основе искусственного интеллекта, они обязаны включить эту информацию в текст статьи.

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам.
Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или L^AT_EX (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи обязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — A4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

http://www.ipiran.ru/journal/template_jiep_ssi_2024.zip

8. Статья должна содержать следующую информацию на *русском и английском языках*:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp и
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний. Если источник имеет DOI и/или EDN, то их необходимо указывать.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

Описание статьи из журнала:

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo* [Oil Industry] 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’—kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel—composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem”* [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]. 593:125–130.

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovaniye plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichstva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: iiep@frccsc.ru (Стригина Светлана Николаевна)

<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

Agreement on the transfer of rights to publish:

“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.

Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

If authors used artificial intelligence (AI)-based tools in preparing their manuscript, they must include this information in the text of the article.

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L^AT_EX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp and

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
- indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.
Important! Keywords must not be sentences; and
- Acknowledgments.

9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).

Please take into account the following examples of Russian references appearance:

Article in journal:

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Journal article in electronic format:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem”* [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]. 593:125–130.

Conference proceedings:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povysheniya neftegazootdachi”* [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]. Moscow. 267–272.

Books and other monographs:

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Dissertation and Thesis:

Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

State standards and patents:

GOST 8.586.5–2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichstva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

References in Latin transcription are presented in the original language.

References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.

10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.

11. Submissions of files by e-mail must include:

- the journal title and author’s name in the “Subject” field;
- the article title, authors’ names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the email;
- an article and additional materials have to be attached using the “attach” function; and
- an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.

12. “Informatics and Applications” journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia

Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05

e-mail: iiep@frccsc.ru (to Svetlana Strigina)

<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>