Часть II

ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ ИНФОРМАТИКИ
В СОВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЕ
НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 521.93

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НЕГАУССОВСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА ЗЕМЛИ [1]

И.Н. Синицын

1. Введение

Согласно наблюдениям и измерениям Международной службы вращения Земли (МСВЗ) за последние 15–20 лет в движении полюса выделяются: основная компонента колебаний (свободная нутация или чандлеровское колебание полюса), амплитуда которого достигает величин $0{,}20''$–$0{,}25''$, а период 433 ± 2 звёздных суток, регулярная годичная составляющая колебаний с периодом равным одному году (365 звёздных суток) и амплитудой $\sim 0{,}07''$–$0{,}08''$ и сравнительно медленный дрейф (тренд) оси фигуры Земли. Колебания оси Земли с годичным периодом обусловлены гравитационным моментом от Солнца, движением вращающейся Земли по орбите и наличием суточных приливов. Причины и механизм возбуждения годичных колебаний принято связывать с сезонными геофизическими явлениями.

Спектральные методы анализа и обработки результатов измерений движения Земли (полюса и собственного вращения) нашли широкое применение в современной астрономии (см., например [1–5]). В [6–8] на основе небесномеханических представлений разработаны линейные и нелинейные аналитические

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-01-00270) и программы ОИТВС РАН «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» (проект 1.5).

информационные стохастические модели движения Земли. Кинетические модели для одно- и многомерных распределений, основанные на уравнениях Фоккера–Планка–Колмогорова (для гауссовских возмущений) и Пугачёва (для негауссовских возмущений), даны в [9, 10]. В [11, 12] на основе [7, 9, 10] построены спектрально-корреляционные и одно- и двумерные кинетические модели флуктуаций движения Земли. В [13] построены стохастические модели флуктуаций вращения Земли с учётом влияния Луны и планет. В [14] разработаны спектрально-корреляционные и кинетические модели стохастических флуктуаций движения Земли для аддитивных пуассоновских возмущений.

Обобщим исследования [9–14] на случай, когда негауссовские стохастические возмущения являются мультипликативными совместными гауссовскими и пуассоновскими шумами. Исследования проводятся в обеспечение создания информационных ресурсов для задач высокоточного прогноза движения полюса Земли на интервалах времени 3–5 лет.

2. Уравнения движения полюса Земли

Введём следующие обозначения и допущения [9–14].

1°. Обозначим через $Y = [Y_1\,Y_2]^{\mathrm{T}}$ вектор состояния, где $Y_1 = p_t$, $Y_2 = q_t$; p_t, q_t — проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли на связанные оси [5, 15]. Переменные Y как правило являются информационными переменными.

2°. Предположим, что осевые и центробежные моменты инерции тензора инерции $\Im = \{J_{ij}\}$ $(i, j = p, q, r)$ деформируемой Земли: $A = J_{pp}$, $B = J_{qq}$, $C = J_{rr}$, $J_{pq} = J_{qp}$, $J_{qr} = J_{rq}$, $J_{rp} = J_{pr}$ допускают на суточном интервале времени $T_* = 2\pi r_*^{-1}$ (где r_* — осевая скорость вращения Земли) представления вида

$$J_{ij} = J_{ij}^* + J'_{ij,1}\sin r_*t + J''_{ij,1}\cos r_*t + J'_{ij,2}\sin 2r_*t + J''_{ij,2}\cos 2r_*t, \tag{1}$$

причём $3, 4, \ldots$ гармониками можно пренебречь. Здесь звёздочкой отмечены постоянные составляющие моментов инерции, а одним и двумя штрихами — амплитуды гармоник.

Назовём эффективными суточными горбами осреднённые на суточном интервале $T_* = 2\pi r_*^{-1}$ следующие безразмерные разности осевых моментов инерции:

$$u_1 = \langle (C-B)A^{*-1}\cos\varphi\rangle, \quad u_2 = \langle (C-A)B^{*-1}\sin\varphi\rangle,$$
$$u_3 = \langle (B-A)C^{*-1}\sin 2\varphi\rangle, \tag{2}$$

где $\langle\ldots\rangle$ — символ осреднения по φ $(\varphi = r_* t)$, причём $u_1 \sim u_2$, $u_3 \ll u_{1,2}$.

Эффективными суточными выступами назовём следующие безразмерные величины центробежных моментов инерции осреднённые на суточном интервале $T_* = 2\pi r_*^{-1}$:

$$\begin{aligned}
u_4 &= \langle J_{qr}A^{*-1}\rangle, & u_5 &= \langle J_{qr}C^{*-1}\sin\varphi\rangle,\\
u_6 &= \langle J_{qr}A^{*-1}\cos 2\varphi\rangle, & u_7 &= \langle J_{qr}B^{*-1}\sin 2\varphi\rangle,\\
u_8 &= \langle J_{pr}B^{*-1}\rangle, & u_9 &= \langle J_{pr}C^{*-1}\cos\varphi\rangle,\\
u_{10} &= \langle J_{pr}B^{*-1}\cos 2\varphi\rangle, & u_{11} &= \langle J_{pr}A^{*-1}\sin 2\varphi\rangle,\\
u_{12} &= \langle J_{pq}C^{*-1}\rangle, & u_{13} &= \langle J_{pq}A^{*-1}\sin\varphi\rangle,\\
u_{14} &= \langle J_{pq}B^{*-1}\cos\varphi\rangle, & u_{15} &= \langle J_{pq}C^{*-1}\cos 2\varphi\rangle.
\end{aligned} \tag{3}$$

причём $u_{4,\ldots,7} \sim u_3$; $u_{8,\ldots,11} \ll u_{4,\ldots,7}$; $u_{12,\ldots,15} \ll u_{8,\ldots,11}$.

3°. Учтём моменты гравитационных сил со стороны Солнца, Луны и планет. Как показано в [13, 14], выражения для моментов гравитационных сил со стороны Солнца M_1^C $(i = 1{,}2)$ и планет M_1^{Π} $(i = 1{,}2)$ будут иметь следующий вид:

$$M_1^C = 3(u_1+u_{13})b\omega_*^2\cos\omega_* t - \frac{3}{2}u_4\omega_*^2(1-3b^2\cos^2\omega_* t) - \frac{3}{2}(u_6+u_{11})\omega_*^2(1-3b^2\cos^2\omega_* t) - u_4 r_*^2,$$

$$M_2^C = -3(u_2+u_{14})b\omega_*^2\cos\omega_* t + \frac{3}{2}u_8\omega_*^2(1-3b^2\cos^2\omega_* t) + \frac{3}{2}(u_7-u_{10})\omega_*^2(1-3b^2\cos^2\omega_* t) + u_8 r_*^2, \tag{4}$$

$$M_1^{\Pi} = 3(u_1+u_{13})\sum_{i=1}^n b_i\omega_{*i}^2\cos\omega_{*i}t - \frac{3}{2}u_4\sum_{i=1}^n\omega_{*i}^2(1-3b_i^2\cos^2\omega_{*i}t) - \frac{3}{2}(u_6+u_{11})\sum_{i=1}^n\omega_{*i}^2(1-b_i^2\cos^2\omega_{*i}t),$$

$$M_2^{\Pi} = -3(u_2+u_{14})\sum_{i=1}^n b_i\omega_{*i}^2\cos\omega_{*i}t + \frac{3}{2}u_8\sum_{i=1}^n\omega_{*i}^2(1-3b_i^2\cos^2\omega_{*i}t) + \frac{3}{2}(u_7-u_{10})\sum_{i=1}^n\omega_{*i}^2(1-b_i^2\cos^2\omega_{*i}t). \tag{5}$$

Здесь принято, что ω_*, ω_{*i} — постоянные, определяемые гравитационными и фокальными параметрами Земли, Луны $(i = 1)$, а также других планет $(i = 2, 3, \ldots, n)$; b — известный коэффициент $(0.4 \leqslant b \leqslant (4/3)\pi^{-1})$ [15], $b_1 \approx b$, $b_{2,\ldots,n} \ll b_1$; моменты выписаны с точностью до квадратов и произведений относительно $u = [u_1, \ldots, u_{15}]^{\mathrm{T}}$, p_t, q_t, а также осреднённых на T_* скоростей изменения осевых и центробежных моментов инерции.

4°. Обобщая [13, 14], примем во внимание мультипликативные флуктуационно-диссипативные моменты сил $M_i^{\text{ФД}}$ $(i = 1{,}2)$, допускающие следующие общие дифференциальные представления [17]:

$$M_i^{\text{ФД}}dt = M_{i1}^{\text{ФД}}(p_t,q_t,t)dt + (M_{i2}^{\text{ФД}})^{\mathrm{T}}(p_t,q_t,t)dW + \int_{R_0} M_{i3}^{\text{ФД}}(p_t,q_t,t,u)P^0(dt,du) \quad (i=1{,}2). \tag{6}$$

Здесь индекс T — символ транспонирования; $M_{i1}^{\text{ФД}} = M_{i1}^{\text{ФД}}(p_t,q_t,t)$ — скалярные регулярные составляющие; $M_{i2}^{\text{ФД}} = M_{i2}^{\text{ФД}}(p_t,q_t,t)$ — векторные гауссовские нерегулярные мультипликативные составляющие, размерность $M_{i2}^{\text{ФД}} = n_W \times 1$, $M_{i3}^{\text{ФД}} = M_{i3}^{\text{ФД}}(p_t,q_t,t,u)$ — скалярные пуассоновские составляющие; $W = W(t)$ — винеровский шум с нулевым математическим ожиданием, $MW = 0$, и интенсивностью $\nu = \nu(t)$, размерность W равна $n_W \times 1$; $\int_\Delta dP^0(t,A)$ — центрированная пуассоновская мера, определяемая формулой [17]:

$$\int_\Delta dP^0(t,A) = \int_\Delta dP(t,A) - \int_\Delta \nu_P(t,A)\,dt, \tag{7}$$

а $\int\limits_{\Delta} dP(t,A)$ — число скачков пуассоновского шума $P(t,A)$ в интервале времени $\Delta=(t_1,t_2)$; $\nu_P(t,A)$ — интенсивность $P(t,A)$; A — некоторое борелевское множество пространства $R_0=R_0^{(n_P)}$ с выколотым началом; u — вспомогательный параметр в (6), размерность u равна $n_P\times 1$.

С учётом допущений 1°–4° уравнения движения полюса Земли могут быть записаны в форме следующих скалярных уравнений Ито:

$$dp_t+Nq_tdt=M_1^{\text{СПФД}}dt+(M_{12}^{\text{ФД}})^{\text{T}}dW+\int\limits_{R_0}M_{13}^{\text{ФД}}P^0(dt,du),$$

$$dq_t-Np_tdt=M_2^{\text{СПФД}}dt+(M_{22}^{\text{ФД}})^{\text{T}}dW+\int\limits_{R}M_{23}^{\text{ФД}}P^0(dt,du)\qquad(8)$$

или в векторной форме

$$dY=\varphi dt+\psi' dW+\int\limits_{R_0}\psi'' P^0(dt,du).\qquad(9)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$M_i^{\text{СПФД}}=M_i^{\text{С}}+M_i^{\text{П}}+M_i^{\text{ФД}}\quad(i=1,2),\quad Y=[p_t\,q_t]^{\text{T}},$$

$$\varphi=\begin{bmatrix}-Nq_t+M_1^{\text{СПФД}}\\ Np_t+M_2^{\text{СПФД}}\end{bmatrix},\qquad(10)$$

$$\psi'=\begin{bmatrix}(M_{12}^{\text{ФД}})^{\text{T}}\\ (M_{22}^{\text{ФД}})^{\text{T}}\end{bmatrix},\quad \psi''=\begin{bmatrix}M_{13}^{\text{ФД}}\\ M_{23}^{\text{ФД}}\end{bmatrix},$$

N — чандлеровская частота, $N=(C^*-B^*)A^{*-1}\omega_*$.

В качестве начальных условий примем случайные величины

$$Y_0=[p_0\,q_0]^{\text{T}},\quad p_0=p_{t_0},\quad q_0=q_{t_0}\qquad(11)$$

с известными плотностями распределения.

Уравнение (9) представляет собой двумерное векторное нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение Ито, поэтому в дальнейшем будем пользоваться правилами стохастического анализа Ито [17].

В частном случае линейной диссипации

$$M_1^{\text{Д}}=-D_1p_t,\quad M_2^{\text{Д}}=-D_2q_t,$$

когда гауссовские и пуассоновские шумы входят аддитивно, т. е. когда

$$M_{i2}^{\text{ФД}}=M_{i2}^{\text{ФД}}(0{,}0,t),\quad M_{i3}^{\text{ФД}}=M_{i3}^{\text{ФД}}(0{,}0,t,u),$$

уравнение (9) вместе с (11) допускают запись:

$$\dot Y=\varphi^{\text{С}}(Y,t)+\varphi^{\text{П}}(Y,t)+\varphi^{\text{Д}}(Y,t)+V,\quad Y(t_0)=Y_0.\qquad(12)$$

Здесь

$$Y=[p_t\,q_t]^{\text{T}},\quad Y_0=[p_0\,q_0]^{\text{T}},\quad V=[V_{1t}\,V_{2t}]^{\text{T}},$$

$$V_{it}=M_{i2}^{\text{ФД}}(0{,}0,t)^{\text{T}}\dot W+\int\limits_{R_0}M_{i3}^{\text{ФД}}(0{,}0,t,u)\dot P^0(t,du)\quad(i=1,2),\qquad(13)$$

$$\varphi^{\text{СД}}=\varphi^{\text{СД}}(Y,t)=[\varphi_1^{\text{СД}}\,\varphi_2^{\text{СД}}]^{\text{T}},$$

$$\varphi_1^{\text{СД}}=-D_1p_t-Nq_t+\mathfrak{P}_{10}+\mathfrak{P}_{11}\cos\omega_*t+\mathfrak{P}_{12}\cos 2\omega_*t,$$

$$\varphi_2^{\text{СД}}=-D_2q_t+Np_t+\mathfrak{Q}_{10}+\mathfrak{Q}_{11}\cos\omega_*t+\mathfrak{Q}_{12}\cos 2\omega_*t,\qquad(14)$$

$$\mathfrak{P}_{10}=-\frac{3}{2}u_4\omega_*^2\left(1-\frac{3}{2}b^2\right)-\frac{3}{2}(u_6+u_{11})\omega_*^2\left(1-\frac{b^2}{2}\right)-u_4r_*^2,$$

$$\mathfrak{Q}_{10}=\frac{3}{2}(u_7-u_{10})\omega_*^2\left(1-\frac{b^2}{2}\right)+\frac{3}{2}u_8\omega_*^2\left(1-\frac{3b^2}{2}\right)+u_8r_*^2,\qquad(15)$$

$$\mathfrak{P}_{11}=3(u_1+u_{13})b\omega_*^2,\quad \mathfrak{Q}_{11}=-3(u_2+u_{14})b\omega_*^2;$$

$$\mathfrak{P}_{12}=\frac{9}{4}u_4b^2\omega_*^2+\frac{3}{4}(u_6+u_{11})b^2\omega_*^2,\qquad(16)$$

$$\mathfrak{Q}_{12}=-\frac{3}{4}(u_7-u_{10})b^2\omega_*^2-\frac{9}{4}u_8b^2\omega_*^2,$$

$$\varphi^{\text{П}}=\varphi^{\text{П}}(Y,t)=[\varphi_1^{\text{П}}\,\varphi_2^{\text{П}}]^{\text{T}},$$

$$\varphi_1^{\text{П}}=\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{P}_{10,i}+\mathfrak{P}_{11,i}\cos\omega_{*i}t+\mathfrak{P}_{12,i}\cos 2\omega_{*i}t),$$

$$\varphi_2^{\text{П}}=\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{Q}_{10,i}+\mathfrak{Q}_{11,i}\cos\omega_{*i}t+\mathfrak{Q}_{12,i}\cos 2\omega_{*i}t),\qquad(17)$$

$$\mathfrak{P}_{10,i} = -\frac{3}{2}\,u_4\omega_{*i}^2\left(1-\frac{3}{2}\,b_i^2\right) - \frac{3}{2}\,(u_6+u_{11})\omega_{*i}^2\left(1-\frac{b_i^2}{2}\right),$$

$$\mathfrak{Q}_{10,i} = -\frac{3}{2}\,(u_7-u_{10})\omega_{*i}^2\left(1-\frac{b_i^2}{2}\right) + \frac{3}{2}\,u_8\omega_{*i}^2\left(1-\frac{3b_i^2}{2}\right), \quad (18)$$

$$\mathfrak{P}_{11,i} = 3(u_1+u_{13})b_i\omega_{*i}^2, \quad \mathfrak{Q}_{11,i} = -3(u_2+u_{14})b_i\omega_{*i}^2; \quad (19)$$

$$\mathfrak{P}_{12,i} = \frac{9}{4}\,u_4 b_i^2\omega_{*i}^2 + \frac{3}{4}\,(u_6+u_{11})b_i^2\omega_{*i}^2, \quad (20)$$

$$\mathfrak{Q}_{12,i} = -\frac{3}{4}\,(u_7-u_{10})b_i^2\omega_{*i}^2 - \frac{9}{4}\,u_8 b_i^2\omega_{*i}^2,$$

где $\dot W$ и $\dot P^0(t,du)$ — производные по времени от винеровского и центрированного пуассоновских шумов.

3. Одно- и многомерные кинетические уравнения флуктуаций движения полюса Земли

Обозначим через $g_1 = g_1(\lambda;t)$ и $f_1 = f_1(y;t)$ — соответственно одномерную характеристическую функцию и плотность. Тогда согласно [17] в силу (10) будем иметь следующие кинетические уравнения для g_1, f_1 и соответствующие начальные условия

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = M\left\{[i\lambda^{\mathrm T}\varphi(Y_t,t) + \chi(\lambda;Y_t,t)]e^{i\lambda^{\mathrm T}Y_t}\right\}, \quad (21)$$

$$g_1(\lambda_1;t_0) = g_0(\lambda), \quad (22)$$

$$f_1 = f_1(y_t;t) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu^{\mathrm T}y_t}g_1(\mu;t)\,d\mu, \quad (23)$$

$$f_1(y_0;t_0) = f_{10}(y_0), \quad (24)$$

где M — символ математического ожидания; $\lambda = [\lambda_1\,\lambda_2]^{\mathrm T}$, $\mu = [\mu_1\,\mu_2]^{\mathrm T}$;

$$\chi(\lambda;Y_t,t) = -\frac{1}{2}\,\lambda^{\mathrm T}\psi'(Y_t,t)\nu\psi'(Y_t,t)^{\mathrm T}\lambda + \\ + \int\limits_{R_0}\left\{e^{i\lambda^{\mathrm T}\psi''(Y_t,t,u)} - 1 - i\lambda^{\mathrm T}\psi''(Y_t,t,u)\right\}\nu_P(t,du);$$

Условия существования одномерных распределений можно найти в [17]. Прямые вычислительные методы решения кинетических уравнений в общем случае в настоящее время не разработаны.

Уравнения для многомерных характеристических функций вектора Y_t

$$g_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;t_1,\ldots,t_n) = M\exp\left\{i\sum_{k=1}^n \lambda_k^{\mathrm T}Y_{t_k}\right\}$$

имеют вид [17]

$$\frac{\partial g_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;t_1,\ldots,t_n)}{\partial t_n} = \\ = M\left\{[i\lambda^{\mathrm T}\varphi(Y_{t_n}t_n) + \chi(\lambda_n;Y_{t_n},t_n)]\exp\left[i\sum_{k=1}^n\lambda_k^{\mathrm T}Y_{t_k}\right]\right\}, \quad (25)$$

$$g_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;t_1,\ldots,t_{n-1},t_{n-1}) = \\ = g_{n-1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2},\lambda_{n-1}+\lambda_n;t_1,\ldots,t_{n-1}) \quad (26)$$

$$(n = 2,3,\ldots).$$

Аналогично (23) выписываются уравнения для многомерных плотностей $f_n = f_n(y_1,\ldots,y_n;t_1,\ldots,t_n)$.

Применительно к уравнениям (12) кинетические уравнения флуктуаций (25) допускают следующую интегродифференциальную запись:

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[i\lambda_n^{\mathrm T}\big(\varphi^{\text{СД}}(y_n,t_n) + \varphi^{\Pi}(y_n,t_n)\big) + \chi^V(\lambda_n;t)\right]\times \\ \times\exp\left\{i\sum_{l=1}^n(\lambda_l^{\mathrm T}-\mu_l^{\mathrm T})y_l\right\}\times \\ \times g_n(\mu_1,\ldots,\mu_n;t_1,\ldots,t_n)d\mu_1\ldots d\mu_n dy_1\ldots dy_n, \quad (27)$$

$$g_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;t_1,\ldots,t_{n-1},t_{n-1}) = \\ = g_{n-1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2},\lambda_{n-1}+\lambda_n;t_1,\ldots,t_{n-1}), \quad (28)$$

$$g_1(\lambda;t_0) = g_0(\lambda);$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_n} = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\lambda_n^{\mathrm{T}} (\varphi^{\text{СД}}(\eta_n, t_n) + \varphi^{\Pi}(\eta_n, t_n)) + \chi^V(\lambda_n; t) \right] \times \\ \times \exp\left\{ i \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{\mathrm{T}} (\eta_l^{\mathrm{T}} - y_l^{\mathrm{T}}) \right\} \times \\ \times f_n(\eta_1, \ldots, \eta_n; t_1, \ldots, t_n) d\eta_1 \ldots d\eta_n d\lambda_1 \ldots d\lambda_n; \quad (29)$$

$$f_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \\ = f_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}) \delta(y_n - y_{n-1}), \quad (30)$$

$$f_1(y; t_0) = f_0(y).$$

Здесь принято $y_n = [p_{t_n}\, q_{t_n}]^{\mathrm{T}}$; $\lambda_n = [\lambda_{pn}\, \lambda_{qn}]^{\mathrm{T}}$; $f_0(y)$ и $g_0(\lambda)$ — плотность и характеристическая функция начального состояния $y_0 = [p_{t0}\, q_{t0}]^{\mathrm{T}}$. Появление δ-функции в правой части уравнения объясняется тем, что при $t_n = t_{n-1}$ величина Y_{t_n} почти наверное совпадает с $Y_{t_{n-1}}$.

В (27) и (28) через $\chi^V(\xi; t) = \{\chi_j^V(\xi; t)\}$ обозначена логарифмическая производная по времени от одномерной характеристической функции пуассоновского процесса. Для скалярного простого пуассоновского процесса с единичными скачками имеем [17]:

$$\chi_j^V(\xi; t) = e^{i\xi} \quad (i = \sqrt{-1}\,,\ j = 1{,}2). \quad (31)$$

В случае общего скалярного пуассоновского процесса с интенсивностью $V_j = V_j(t)$ [17], если через $g^V(\xi)$ обозначить характеристическую функцию скачков, то

$$\chi_j^V(\xi; t) = [g_j^V(\xi) - 1]\, \nu_j^V(t) \quad (j = 1{,}2). \quad (32)$$

Прямые вычислительные методы точного решения этих кинетических уравнений требуют специальных вычислительных подходов и высокопроизводительных параллельных компьютеров.

Среди приближённых методов стохастического анализа флуктуаций движения полюса Земли на базе кинетических уравнений следует выделить общие методы: нормальной аппроксимации и статистической линеаризации [13, 14, 17], эквивалентной негауссовской аппроксимации [13, 14, 17–19], параметризации распределений с помощью моментов, квазимоментов, семиинвариантов, ортогональных разложений, а также структурной эллипсоидальной параметризации [17–19].

4. Параметризация кинетических уравнений флуктуаций

Используя метод параметризации одно- и n-мерных распределений посредством согласованных ортогональных разложений [17], представим одномерную кинетическую модель ($n = 1$) и многомерную модель ($n > 1$) соответственно в виде

$$f_1(y; t) \approx \widetilde{w}_1(y) \left[1 + \sum_{l=3}^{n_*} \sum_{|\mu|=l} c_\mu p_\mu(y) \right]; \quad (33)$$

$$f_n(y_1, \ldots, y_n; t_1, \ldots, t_n) \approx \\ \approx \widetilde{w}_n(y_1, \ldots, y_n) \left[1 + \sum_{l=3}^{n_*} \sum_{|\mu_1| + \ldots + |\mu_n| = l} c_{\mu_1, \ldots, \mu_n} p_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(y_1, \ldots, y_n) \right] \quad (34)$$

Здесь $\widetilde{w}_n = \widetilde{w}_n(y_1, \ldots, y_n)$ — известная эталонная согласованная последовательность плотностей при ($n \geqslant 1$), имеющих те же моменты первого и второго порядков, что и f_n, вследствие чего $\widetilde{w}_n$ зависят от следующих параметров: математического ожидания m_t, ковариационной матрицы K_t, ковариационной функции $K(t', t'')$ вектора Y при $t', t'' = t_1, \ldots, t_n$; $\{p_\mu(y), q_\mu(y)\}$ — известная система ортогональных полиномов; $\{p_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(y_1, \ldots, y_n), q_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(y_1, \ldots, y_n)\}$ — известная согласованная последовательность ортогональных полиномов; n_* — число членов в разложениях (33) и (34). Для параметров m_t, K_t, $c_{\mu t}$, $K(t', t'')$, $c_{\mu_1 \mu_2}, \ldots, c_{\mu_1, \ldots, \mu_n}$, входящих в (33) и (34), имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае нелинейных относительно m_t, K_t и коэффициентов c_μ, $c_{\mu_1, \ldots, \mu_n}$ согласованных ортогональных разложений.

В частности, в рамках гауссовского приближения (нормальной аппроксимации [17]) при гауссовской эталонной плотности двумерная нелинейная кинетическая модель в силу (9) и (12) описывается уравнениями с заменой $\nu = \{\nu_j\}$ на $\nu = \{\nu_j^V\}$:

$$f_1 = f_1(y, m_t, K_t; t) = \left[(2\pi)^2 |K_t| \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} (y - m_t)^{\mathrm{T}} K_t^{-1} (y - m_t) \right\},$$

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left\{ i\lambda^{\mathrm{T}} m_t - \frac{1}{2} \lambda^{\mathrm{T}} K_t \lambda \right\};$$

$$f_2 = f_2(y_1, y_2, m_{t_1}, m_{t_2}, K_{t_1}, K_{t_2}, K(t_1,t_2); t_1, t_2) =$$
$$= \left[(2\pi)^2 |\overline{K}_2|\right]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\overline{y}_2^{\mathrm{T}} - \overline{m}_2^{\mathrm{T}})\overline{K}_2^{-1}(\overline{y}_2 - \overline{m}_2)\right\},$$
$$g_{t_1,t_2}(\overline{\lambda}) = \exp\left\{i\overline{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{m}_2 - \frac{1}{2}\overline{\lambda}^{\mathrm{T}}\overline{K}_2\overline{\lambda}\right\};$$
$$\overline{y}_2 = [y_{t_1}^{\mathrm{T}}\, y_{t_2}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad \overline{m}_2 = [m_{t_1}^{\mathrm{T}}\, m_{t_2}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad \overline{\lambda} = [\lambda_1^{\mathrm{T}}\, \lambda_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$\overline{K}_2 = \begin{bmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{bmatrix}, \tag{35}$$

$$\dot m_t = M_N\varphi, \quad m_{t_0} = m_0, \tag{36}$$

$$\dot K_t = M_N\varphi(Y_t - m_t)^{\mathrm{T}} + (Y_t - m_t)\varphi^{\mathrm{T}} + \psi'\nu\psi'^{\mathrm{T}} + \int_{R_0}\psi''\psi''^{\mathrm{T}}\nu_P(t,du),$$
$$K_{t_0} = K_0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2} = M_N\left[(Y_{t_1} - m_{t_1})\varphi^{\text{СД}}(Y_{t_2},t_2)^{\mathrm{T}}\right],$$
$$K(t_1,t_1) = K(t_1), \tag{38}$$

$$\dot m_t = M_N\left[\varphi^{\text{СД}}(Y,t) + \varphi^{\Pi}(Y,t)\right], \quad m_{t_0} = m_0; \tag{39}$$

$$\dot K_t = M_N\Big\{\left[\varphi^{\text{СД}}(Y,t) + \varphi^{\Pi}(Y,t)\right](Y^{\mathrm{T}} - m_t^{\mathrm{T}}) +$$
$$+ (Y - m_t)\left[\varphi^{\text{СД}}(Y,t)^{\mathrm{T}} + \varphi^{\Pi}(Y,t)\right]^{\mathrm{T}} + \nu^V\Big\},$$
$$K_{t_0} = K_0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2} = M_N\left\{(Y_{t_1} - m_{t_1})\left[\varphi^{\text{СД}}(Y_{t_2},t_2)^{\mathrm{T}} + \varphi^{\Pi}(Y_{t_2},t_2)^{\mathrm{T}}\right]\right\},$$
$$K(t_1,t_1) = K(t_1). \tag{41}$$

Здесь индекс N у знака математического ожидания означает, что оно вычисляется для эквивалентного нормального (гауссовского) распределения с неизвестными параметрами m_t, K_t, $K(t_1,t_2)$. Зная одно- и двумерные нормальные (гауссовские) распределения в рамках метода нормальной аппроксимации вычисляются старшие распределения f_n и g_n $(n > 2)$.

5. Линейные дифференциальные корреляционные и спектрально-корреляционные модели флуктуаций при аддитивных негауссовских возмущениях

Положим в уравнениях (12)

$$\varphi = [\varphi_1\, \varphi_2]^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_i = M_i^C + M_i^{\Pi} + M_i^{\text{Д}} \quad (i = 1{,}2), \tag{42}$$

$$M_1^{\text{Д}} = -D_1 p_t, \quad M_2^{\text{Д}} = -D_2 q_t; \tag{43}$$

$$V_{it} = \sum_{j=1}^{n_W} M_{i2j}^{\text{ФД}}(0{,}0,t)\dot W_{\mathrm{j}} + \int_{R_0} M_{i3}^{\text{ФД}}(0{,}0,t,u)\dot P^0(t,du) \quad (i = 1{,}2). \tag{44}$$

Здесь D_i $(i = 1{,}2)$ — коэффициенты линейной диссипации; моменты M_1^C и M_1^{Π} определены в (4) и (5).

Тогда уравнения (12) принимают следующий вид соответственно для математических ожиданий $m_t^{p,q}$:

$$\dot m_t^p = -D_1 m_t^p - N m_t^q - u_4 r_*^2 + \mathfrak{P}_{10} + \mathfrak{P}_{11}\cos\omega_* t + \mathfrak{P}_{12}\cos 2\omega_* t +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{P}_{10,i} + \mathfrak{P}_{11,i}\cos\omega_{*i}t + \mathfrak{P}_{12,i}\cos 2\omega_{*i}t),$$
$$m_{t_0}^p = m_0^p,$$

$$\dot m_t^q = -D_2 m_t^q + N m_t^p + u_8 r_*^2 + \mathfrak{Q}_{10} + \mathfrak{Q}_{11}\cos\omega_* t + \mathfrak{Q}_{12}\cos 2\omega_* t +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{Q}_{10,i} + \mathfrak{Q}_{11,i}\cos\omega_{*i}t + \mathfrak{Q}_{12,i}\cos 2\omega_{*i}t), \tag{45}$$
$$m_{t_0}^q = m_0^q$$

и для центрированных составляющих p_t^0, q_t^0:

$$\dot p_t^0 = -D_1 p_t^0 - N q_t^0 + V_{1t}, \quad p_{t_0}^0 = p_0^0,$$
$$\dot q_t^0 = -D_2 q_t^0 + N p_t^0 + V_{2t}, \quad q_{t_0}^0 = q_0^0. \tag{46}$$

В силу линейности уравнений (46) имеют место следующие уравнения для ковариационной матрицы K_t и матрицы ковариационных функций $K_{t_1t_2}$ [17]:

$$\dot K_t = \varphi_1 K_t + K_t\varphi_1^{\mathrm{T}} + \nu^V, \quad K_{t_0} = K_0, \tag{47}$$

$$\frac{\partial K_{t_1t_2}}{\partial t_2} = K_{t_1t_2}\varphi_1(t_2)^{\mathrm{T}}, \quad K_{t_1t_1} = K_{t_1} \quad \text{при } t_1 < t_2; \qquad K_{t_1t_2} = K^{\mathrm{T}}_{t_2t_1} \quad \text{при } t_2 < t_1. \tag{48}$$

Используя уравнения (47) и (48), приходим к следующим выражениям для дисперсий $D_t^{p,q}$ и ковариации K_t^{pq}:

$$\begin{aligned} \dot D_t^p &= -2(D_1D_t^p + NK_t^{pq}) + \nu_1^V, \\ \dot D_t^q &= 2(-D_2D_t^q + NK_t^{pq}) + \nu_2^V, \\ \dot K_t^{pq} &= -(D_1+D_2)K_t^{pq} + N(D_t^p - D_t^q) \end{aligned} \tag{49}$$

и для ковариационных функций $K^{ij}_{t_1t_2}$ $(i,j=p,q)$ при $t_1<t_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^{pp}_{t_1t_2}}{\partial t_2} &= -D_1K^{pp}_{t_1t_2} - NK^{pq}_{t_1t_2}, \\ \frac{\partial K^{pq}_{t_1t_2}}{\partial t_2} &= -D_2K^{pq}_{t_1t_2} + NK^{pp}_{t_1t_2}, \\ \frac{\partial K^{qp}_{t_1t_2}}{\partial t_2} &= -D_1K^{qp}_{t_1t_2} - NK^{pq}_{t_1t_2}, \\ \frac{\partial K^{qq}_{t_1t_2}}{\partial t_2} &= -D_2K^{qq}_{t_1t_2} + N_*K^{qp}_{t_1t_2} \end{aligned} \tag{50}$$

при начальных условиях: $K^{ii}_{t_1t_2} = D^i_{t_1}$, $K^{ij}_{t_1t_2} = K^{ij}_{t_1}$ $(i,j=p,q)$.

Для ковариационно стационарных процессов p_t^0, q_t^0 (т.е. процессов, для которых ковариационные функции p_t^0, q_t^0 зависят только от разности времён $t_2 - t_1 = \tau$) используют следующие выражения для ковариационных функций, а также спектральных

и взаимных спектральных плотностей [17]:

$$k^{p,q}(\tau) = K^{p,q}_{t,t+\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} s^{p,q}(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega, \tag{51}$$

$$s^{p,q}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k^{p,q}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \tag{52}$$

Линейные корреляционные модели флуктуаций движения Земли получаются согласно [17] на основе знания весовых функций и интенсивностей негауссовских белых шумов. В частности, для математических ожиданий, ковариационных функций и спектральных плотностей справедливы следующие формулы:

$$m_t = MY_t = \overline{w}(t-t_0)m_0 + \int_{t_0}^{t} \overline{w}(t-\tau)\left[\varphi_0^C(\tau) + \varphi_0^{\Pi}(\tau)\right]d\tau, \tag{53}$$

$$K_{t_1t_2} = MY^0_{t_1}(Y^0_{t_2})^* = \overline{w}(t_1-t_0)K_0\overline{w}(t_2-t_0)^* + \int_{t_0}^{\min(t_1,t_2)} \overline{w}(t_1-\tau)\nu^V(\tau)\overline{w}(t_2-\tau)^*\,d\tau, \tag{54}$$

$$s(\omega) = \begin{bmatrix} s^{pp}(\omega) & s^{pq}(\omega) \\ s^{qp}(\omega) & s^{qq}(\omega) \end{bmatrix} = \Phi(i\omega)\nu^V\Phi(i\omega)^*. \tag{55}$$

Здесь звёздочкой отмечена операция комплексного сопряжения,

$$\varphi_0^C(t) = \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{10} + \mathfrak{P}_{11}\cos\omega_*t + \mathfrak{P}_{12}\cos 2\omega_*t \\ \mathfrak{Q}_{10} + \mathfrak{Q}_{11}\cos\omega_*t + \mathfrak{Q}_{12}\cos 2\omega_*t \end{bmatrix}, \tag{56}$$

$$\varphi_0^{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{10,i} + \mathfrak{P}_{11,i}\cos\omega_*t + \mathfrak{P}_{12,i}\cos 2\omega_*t \\ \mathfrak{Q}_{10,i} + \mathfrak{Q}_{11,i}\cos\omega_*t + \mathfrak{Q}_{12,i}\cos 2\omega_*t \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Кроме того в (53)–(55) через $\Phi(i\omega)$, $\overline{w}(t-\tau)$, $w(t-\tau)$ обозначены передаточные функции, весовые функции и фундаментальные решения, определяемые формулами:

$$\Phi(i\omega) = -(\alpha - i\omega I_2)^{-1} = -\frac{1}{\Delta(\omega)}\begin{bmatrix} -(D_2+i\omega) & -N \\ N & -(D_1+i\omega) \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} -D_1 & -N \\ N & -D_2 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{58}$$

$$\Delta(\omega) = \omega_c^2 - \omega^2 + 2\varepsilon i\omega, \quad \omega_c^2 = N^2 + D_1 D_2 \approx N^2, \quad 2\varepsilon = D_1 + D_2;$$

$$w(t-\tau) = \begin{bmatrix} w^{pp}(t-\tau) & w^{pq}(t-\tau) \\ w^{qp}(t-\tau) & w^{qq}(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad \overline{w}(t-\tau) = w(t-\tau)1(t-\tau), \tag{59}$$

$$w^{pp}(t-\tau) = e^{-(D_1+D_2)(t-\tau)/2}\left[\frac{D_2 - D_1}{2N}\sin N_*(t-\tau) + \cos N_*(t-\tau)\right],$$

$$w^{qq}(t-\tau) = e^{-(D_1+D_2)(t-\tau)/2}\left[-\frac{D_2 - D_1}{2N}\sin N_*(t-\tau) + \cos N_*(t-\tau)\right],$$

$$w^{pq}(t-\tau) = w^{qp}(t-\tau) = -e^{-(D_1+D_2)(t-\tau)/2}\sin N_*(t-\tau),$$

при этом элементы $w(t-\tau)$ выписаны с точностью до квадратов и произведений величин $D_{1,2}N_*^{-1}$; $1(t-\tau)$ — единичная ступенчатая функция. Уравнения (49) при $D_{1,2}N^{-1} \ll 1$ и постоянных $\mu_{1,2,3}$ определяются формулами:

$$D_\infty^p = \frac{2D_1\nu_2^V - (D_2 - D_1)\nu_1^V}{2D_1(D_2 + D_1)}, \quad D_\infty^q = \frac{2D_2\nu_1^V + (D_2 - D_1)\nu_2^V}{2D_1(D_1 + D_2)}, \quad D_\infty^{pq} = \frac{\nu_1^V D_2 - \nu_2^V D_1}{N(D_1 + D_2)}; \tag{60}$$

$$s^{pp}(\omega) = \Delta_1^{-2}[\nu_1^V(D_2^2 + \omega^2) + \nu_2^V N^2],$$
$$s^{qq}(\omega) = \Delta_1^{-2}[\nu_1^V N^2 + \nu_2^V(D_1^2 + \omega^2)], \tag{61}$$
$$s^{pq}(\omega) = \Delta_1^{-2}N[-\nu_1^V(D_2 + i\omega) + \nu_2^V(D_1 + i\omega)] = \overline{s^{qp}(\omega)},$$

$$\Delta_1^2 = (N^2 + D_1D_2 - \omega^2)^2 + \omega^2(D_1 + D_2)^2 \approx (N^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(D_1 + D_2)^2.$$

При $\nu_1^V = \nu_2^V = \nu_0^V$, $D_1 = D_2 = D_0$ ковариационные функции имеют следующий вид:

$$k^{p,q}(\tau) = D_\infty^{p,q}e^{-D_0|\tau|}\cos N\tau; \tag{62}$$

Согласно [4, 5] время релаксации D_0^{-1} по оценкам различных авторов составляет 10–100 лет. Уровень средних квадратических отклонений $\sqrt{D_\infty^{p,q}}$ при этом будет $2''$–$4'' \cdot 10^{-2}$.

6. Линеаризованные дифференциальные корреляционные и спектрально-корреляционные модели флуктуаций при аддитивных негауссовских возмущениях

Предположим, что нелинейные диссипативные моменты сил $M_i^{Д} = M_i^{Д}(\mathrm{p}_t, q_t, t)$ допускают эквивалентную линеаризацию:

$$M_i^{Д}(p_t, q_t, t) \approx D_{i10}m_t^p + D_{i20}m_t^q + D_{i11}p_t^0 + D_{i21}q_t^0 \quad (i = 1,2). \tag{63}$$

Здесь коэффициенты линеаризации

$$D_{ijk} = D_{ijk}(m_t^p, m_t^q, D_t^p, D_t^q, K_t^{pq}) \quad (i,j,k = 1,2), \tag{64}$$

вычисляются по известным формулам [17]. Тогда при условиях $D_{ijk}N^{-1} \ll 1$ придём к уравнениям (45) с заменой D_1 на D_{110} и D_2 на D_{220} и уравнениям (46)–(49) с заменой D_1 на D_{111} и D_2 на D_{221}. Однако в отличие от раздела 5 в рассматриваемом случае уравнения для математических ожиданий, дисперсий и ковариации в силу (64), связаны между собой и требуют совместного решения.

Для гауссовских шумов в [20–23] линеаризованные уравнения были использованы для изучения автоколебаний и параметрических диссипативных возмущений

7. Укороченные кинетические, дифференциальные корреляционные и спектрально-корреляционные модели флуктуаций полюса Земли

Особую практическую ценность представляют собой версии общих моделей (раздел 5), когда правые части уравнений (9) достаточно малы, а линеаризованные системы уравнений для математических ожиданий и центрированных составляющих являются высокодобротными фильтрами на чандлеровской частоте N с шириной резонансного пика

$$\Delta\omega = \max_i \{D_{i10} + D_{i20}, D_{i11} + D_{i22}\}$$

и частотой среза ω_C, удовлетворяющей условию $N < \omega_C < \omega_*$.

Перейдём в уравнениях (8) от информационных переменных p_t и q_t к переменным Ван-дер-Поля a_t и $\Delta\alpha_t$, положив

$$p_t = \widetilde{p}_t + a_t \cos\alpha_t, \quad \alpha_t = Nt + \Delta\alpha_t, \quad q_t = \widetilde{q}_t + a_t \sin\alpha_t, \tag{65}$$

$$a_t^2 = (p_t - \widetilde{p}_t)^2 + (q_t - \widetilde{q}_t)^2, \quad \Delta\alpha_t = -Nt + \operatorname{arctg}\frac{q_t - \widetilde{q}_t}{p_t - \widetilde{p}_t}. \tag{66}$$

Здесь $\widetilde{p}_t$, $\widetilde{q}_t$ удовлетворяют уравнениям (8) при отсутствии флуктуационно-диссипативных возмущений ($M_i^{\text{ФД}} = 0$):

$$\dot{\widetilde{p}} + N\widetilde{q}_t = M_1^C + M_1^{\Pi}, \quad \dot{\widetilde{q}}_t - N\widetilde{p}_t = M_2^C + M_2^{\Pi}. \tag{67}$$

Далее применим обобщённую формулу Ито [17] для дифференцирования скалярной нелинейной функции $F(Y,t)$ векторного аргумента $Y = [p_t\, q_t]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned} dF(Y,t) = \Big\{ F_t(Y,t) + F_y(Y,t)^{\mathrm{T}}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\,[F_{yy}\sigma(Y,t)] \Big\}\, dt +& \\ + F_y(Y,t)^{\mathrm{T}}\psi' dW +& \\ + \int_{R_0} [F(Y+\psi'',t) - F(Y,t) - F_y(Y,t)^{\mathrm{T}}\psi'']\mu_P(dt,du) +& \\ + \int_{R_0} [F(Y+\psi'',t) - F(Y,t)]P^0(dt,du),& \end{aligned} \tag{68}$$

$$\sigma(Y,t) = \psi'(Y,t)\nu(t)\psi'(Y,t)^{\mathrm{T}}. \tag{69}$$

Здесь пуассоновские меры связаны между собой соотношением [17]:

$$\begin{aligned} P^0(dt,du) &= P(dt,du) - \mu_P(dt,du), \\ \mu_P(dt,du) &= MP(dt,du). \end{aligned} \tag{70}$$

Используя формулу (68) для нелинейных функций (66), получим соответственно уравнения a_t и $\Delta\alpha_t$:

$$\begin{aligned} da_t = A_{11}(a_t,\Delta\alpha_t,t)dt + A_{12}(a_t,\Delta\alpha_t,t)dW +& \\ + \int_{R_0} A'_{13}(a_t,\Delta\alpha_t,t,u)\mu_P(dt,du) +& \\ + \int_{R_0} A''_{13}(a_t,\Delta\alpha_t,t,u)P^0(dt,du),& \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} d\Delta\alpha_t = B_{11}(a_t,\Delta\alpha_t,t)dt + B_{12}(a_t,\Delta\alpha_t,t)dW +& \\ + \int_{R_0} B'_{13}(a_t,\Delta\alpha_t,t,u)\mu_P(dt,du) +& \\ + \int_{R_0} B''_{13}(a_t,\Delta\alpha_t,t,u)P^0(dt,du),& \end{aligned} \tag{72}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{11}(a_t,\Delta\alpha_t,t) = \varphi_1\cos\alpha_t + \varphi_2\sin\alpha_t +& \\ + \frac{1}{2a_t}(\sigma_{11}\sin^2\alpha_t - 2\sigma_{12}\sin\alpha_t\cos\alpha_t + \sigma_{22}\cos^2\alpha_t),& \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} A_{12}dW = A_{12}(a_t,\Delta\alpha_t,t)dW =& \\ = \sum_{i=1}^{n_W}\varphi'_{1i}dW_i\cos\alpha_t + \sum_{i=1}^{n_W}\psi'_{2i}dW_i\sin\alpha_t,& \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} A'_{13} = A'_{13}(a_t,\Delta\alpha_t,t,u) = \sqrt{(a_t\cos\alpha_t + \psi''_1)^2 + (a_t\sin\alpha_t + \psi''_2)} -& \\ - a_t - (\psi''_1\cos\alpha_t + \psi''_2\sin\alpha_t),& \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} A''_{13} = A''_{13}(a_t,\Delta\alpha_t,t,u) =& \\ = \sqrt{(a_t\cos\alpha_t + \psi''_1)^2 + (a_t\sin\alpha_t + \psi''_2)} - a_t,& \end{aligned} \tag{76}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \psi'\nu\psi'^{\mathrm{T}}, \tag{77}$$

$$B_{11} = B_{11}(a_t, \Delta\alpha_t, t) =$$

$$= -N - \frac{2\sin^2\alpha_t}{a_t\cos\alpha_t}\varphi_1 + \frac{2\sin\alpha_t}{a_t}\varphi_2 + \frac{1}{a_t^2}[\sigma_{11}(\mathrm{tg}^2\,\alpha_t + 2\sin^2\alpha_t) +$$

$$+ \sigma_{22}(1 - 2\sin^2\alpha_t) + \sigma_{12}\left(\frac{2\sin^3\alpha_t}{\cos\alpha_t} - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha_t - \sin\alpha_t\cos\alpha_t\right), \tag{78}$$

$$B_{12}dW = B_{12}(a_t, \Delta\alpha_t, t)dW =$$

$$= -\frac{2\sin^2\alpha_t}{a_t\cos\alpha_t}\sum_{i=1}^{n_W}\psi'_{1i}dW_i + \frac{2\sin\alpha_t}{a_t}\sum_{i=1}^{n_W}\psi'_{2i}dW_i, \tag{79}$$

$$B'_{13} = B'_{13}(a_t, \Delta\alpha_t, t, u) =$$

$$= \mathrm{arctg}\,\frac{a_t\sin\alpha_t + \psi''_2}{a_t\cos\alpha_t + \psi''_1} - \alpha_t + \frac{2\sin^2\alpha_t}{a_t\cos\alpha_t}\psi''_1 - \frac{2\sin\alpha_t}{a_t}\psi''_2, \tag{80}$$

$$B''_{13} = B''_{13}(a_t, \Delta\alpha_t, t, u) = \mathrm{arctg}\,\frac{a_t\sin\alpha_t + \psi''_2}{a_t\cos\alpha_t + \psi''_1} - \alpha_t, \tag{81}$$

Соответствующие (71) и (72) кинетические уравнения будут иметь вид уравнений раздела 5 для мультипликативных и аддитивных шумов при следующих условиях $\widehat{\varphi} = [\widehat{\varphi}_1\, \widehat{\varphi}_2]^{\mathrm{T}}$:

$$\widehat{\varphi}_1 dt = A_{11}dt + \int_{R_0} A'_{13}\mu_P(dt, du), \tag{82}$$

$$\widehat{\varphi}_2 dt = B_{11}dt + \int_{R_0} B'_{13}\mu_P(dt, du),$$

$$\psi' = \begin{bmatrix} A_{12} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad \psi'' = \begin{bmatrix} A''_{13} \\ B''_{123} \end{bmatrix}.$$

Аналогично выписываются дифференциальные корреляционные и спектрально-корреляционные уравнения раздела 5.

В общем случае анализ кинетических, дифференциальных корреляционных и спектрально-корреляционных моделей при условиях (82) также сложен. Как показали проведённые исследования, определённые вычислительные преимущества открываются путём построения укороченных детерминированных уравнений различных порядков для параметров распределения по

методу Булгакова [24, 25]. В качестве укороченных уравнений первого порядка можно использовать усреднённые уравнения по текущему периоду чандлеровских колебаний, положив в (82):

$$\begin{aligned} &\overline{A}_{11} = \langle A_{11}\rangle_t, \quad \overline{B}_{11} = \langle B_{11}\rangle_t,\\ &\overline{A}_{12} = \langle A_{12}\rangle_t, \quad \overline{B}_{12} = \langle B_{12}\rangle_t,\\ &\overline{A}'_{13} = \langle A'_{13}\rangle_t, \quad \overline{B}'_{13} = \langle B'_{13}\rangle_t,\\ &\overline{A}''_{13} = \langle A''_{13}\rangle_t, \quad \overline{B}''_{13} = \langle B''_{13}\rangle_t, \end{aligned} \tag{83}$$

где оператор усреднения равен [26]

$$\langle \ldots \rangle_t = \frac{1}{T_N}\int_{t-T_N}^{t} \ldots\, d\tau. \tag{84}$$

Для случая гауссовских аддитивных и мультипликативных шумов соответствующие укороченные кинетические, корреляционные и спектрально-корреляционные уравнения первого порядка получены в [20–25]. При этом изучение стационарных флуктуаций удаётся провести аналитически.

8. Заключение

Получены общие кинетические, корреляционные и спектрально-корреляционные уравнения флуктуаций полюса Земли для информационных переменных в условиях аддитивных и мультипликативных негауссовских флуктуационно-диссипативных возмущений.

Предложены эффективные вычислительные методы построения укороченных моделей флуктуаций различных порядков. Модели позволяют рассматривать как стационарные так и нестационарные режимы флуктуаций. При этом полученные модели дают возможность изучать вопросы информационной статистической эквивалентности воздействия различных аддитивных и мультипликативных возмущений.

Рассмотренные модели лежат в основе информационных ресурсов по фундаментальной проблеме «Статистическая динамика вращения Земли». Они используются для высокоточного моделирования и прогнозирования движения полюса Земли на интервалах времени 3–5 лет.

Список литературы

1. *Акуленко Л.Д.*, *Кумакшев С.А.*, *Марков Ю.Г.* Движение полюса Земли // Докл.РАН. — 2002. — Т. 382, № 2. — С. 199–205.
2. *Рыхлова Л.В.*, *Курбасова Г.С.*, *Рыбалова М.Н.* Анализ положений полюса Земли на интервале С. 1846.00 по 1987.95 гг. // Научные информации. Выпуск 69. — М.: Институт астрономии АН СССР. — 1991. — С. 3–23.
3. *Курбасова Г.С.*, *Рыхлова Л.В.* Исследования движения полюса Земли // Астрономический журнал. — 1998. — Т. 75, № 4. — С. 632–640.
4. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. — М.: Наука, 1989. — 304 с.
5. *Сидоренков Н.С.* Физика нестабильностей вращения Земли. — М.: Наука, 2002. — 384 с.
6. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Стохастическая модель движения полюса деформируемой Земли // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 2. — С. 186–192.
7. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Флуктуационно-диссипативная модель движения полюса деформируемой Земли // Докл. РАН. — 2002. — Т. 387, № 4. — С. 482–486.
8. 8 Марков Ю.Г., Синицын И.Н. Нелинейные стохастические корреляционные модели движения полюса деформируемой Земли // Астрономический журнал. — 2003. — Т. 80, № 2. — С. 186–192.
9. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Влияние параметрических флуктуационно-диссипативных сил на движение полюса Земли // Докл. РАН. — 2003. — Т. 390, № 3. — С. 343–346.
10. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Многомерные распределения флуктуаций полюса Земли // Докл. РАН. — 2003. — Т. 391, № 2. — С. 194–198.
11. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Спектрально-корреляционные модели флуктуаций вращательного движения Земли // Докл. РАН. — 2003. — Т. 393, № 5. — С. 618–623.
12. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* ДАН. Влияние параметрических флуктуационно-диссипативных сил на движение полюса Земли // Докл. РАН. — 2004. - Т.395. № 1. — С. 51–54.
13. *Марков Ю.Г.*, *Дасаев Р.Р.*, *Перепелкин В.В.*, *Синицын И.Н.*, *Синицын В.И.* Стохастические модели вращения Земли с учётом влияния Луны и Планет Космические исследования. — 2005. — Т. 43, № 1. — С.54–66.
14. *Синицын И.Н.* Стохастические модели флуктуаций движения Земли в условиях пуассоновских возмущений // Системы и средства

информатики. Спец. вып. Геоинформационные технологии / Под ред. И.А. Соколова. — М.: ИПИ РАН, 2004. — С. 39–55.

15. *Манк Н.*, *Макдональд Г.* Вращение Земли. — М.: Мир, 1964. — 384 с.
16. *Сидоренков Н.С.* Физика нестабильностей вращения Земли. — М.: Наука, 2002. — 384 с.
17. *Пугачёв В.С.*, *Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. 2-е изд. — М.: Логос, 2004. — 1000 с.
18. *Соколов И.А.*, *Синицын И.Н.*, *Синицын В.И.*, *Корепанов Э.Р.*, *Белоусов В.В.* Хоанг Тхо Ши Методы эквивалентной параметрической линеаризации нелинейных стохастических систем и их применение // Системы и средства информатики. Спец. вып. «Математические модели и методы информатики, стохастические технологии и системы». — М.: ИПИ РАН, 2005. — С. 5–29.
19. *Синицын И.Н.*, *Синицын В.И.* Эллипсоидальный анализ распределений в стохастических системах и его применение // Наукоёмкие технологии. 2006. № 7. 8. С. 123–134.
20. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Чандлеровские колебания движения полюса Земли // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407. — С. 485–488.
21. Марков Ю.Г., Синицын И.Н. Флуктуации чандлеровских колебаний полюса Земли // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 1. С. 25–27.
22. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Чандлеровские колебания полюса Земли при параметрических возмущениях // Докл. РАН. 2006. Т. 410, № 4. С. 1–3.
23. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Спектрально-корреляционная модель флуктуаций чандлеровских колебаний полюса Земли // Астрономический журнал. 2006. Т. 83, № 10. С. 950–960.
24. *Булгаков Б.В.* Колебания. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 891 с.
25. *Синицын И.Н.* Об укороченных моментных уравнениях статистической динамики движения полюса Земли // Системы и средства информатики. Спец. вып. «Математические методы информатики». — 2006 (в печати).
26. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Физматлит, 1968. — 660 с.