

# Информатика и её применения

Том 4 Выпуск 3 Год 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

Estimation of self-healing time for digital systems under transient faults <b>S. L. Frenkel and A. V. Pechinkin</b>	2
Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами <b>А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, Я. А. Сатин, С. Я. Шоргин</b>	9
Байесовские модели массового обслуживания и надежности: характеристики среднего числа заявок в системе $M M 1 \infty$ <b>А. А. Кудрявцев, С. Я. Шоргин</b>	16
Сети массового обслуживания с наименьшей длиной очереди <b>С. С. Матвеева, Т. В. Захарова</b>	22
Об оценивании асимптотики вероятности большого отклонения стационарной регенеративной очереди с одним прибором <b>А. В. Бородина, Е. В. Морозов</b>	29
Поиск конфликтов в политиках безопасности: модель случайных графов <b>А. А. Грушо, Н. А. Грушо, Е. Е. Тимонина</b>	38
Законы повторного логарифма для числа безошибочных блоков при помехоустойчивом кодировании <b>А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш</b>	42
О предельном поведении мощностей критериев в случае обобщенного распределения Лапласа <b>О. О. Лямин</b>	47
Некоторые аспекты выбора технологии для построения систем отображения информации ситуационного центра <b>А. А. Зацаринный, К. Г. Чупраков</b>	59
Когнитивно-лингвистические представления в системах обработки текстов <b>Е. Б. Козеренко, И. П. Кузнецов</b>	69
Typology and computer modeling of translation difficulties <b>N. Buntman, J.-L. Minel, D. Le Pesant, and I. Zatsman</b>	77
О работах заслуженного деятеля науки Российской Федерации И. Н. Сеницына в области информационных технологий и автоматизации (к 70-летию со дня рождения) <b>И. А. Соколов</b>	84
Abstracts	87
Об авторах	91
About Authors	93

# ESTIMATION OF SELF-HEALING TIME FOR DIGITAL SYSTEMS UNDER TRANSIENT FAULTS\*

S. L. Frenkel<sup>1</sup> and A. V. Pechinkin<sup>2</sup>

**Abstract:** This paper suggests a new approach to self-healing property prediction for digital systems. Self-healing refers to the system's ability to continue operating properly in the case of the failure of some of its components. This phenomenon is very considerable aspect of high-reliable systems design. The self-healing time characteristics are analyzed during design process, and the computation of probability distribution function of self-healing time needs for fair prediction of real time systems reliability. This paper considers the possible ways of estimation of time to self-healing under transient faults using a Markov model of a design behavior for reliability analysis of digital systems with some fault-tolerant properties, modeled by the well-known Finite State Machine formalism.

**Keywords:** fault-tolerant computer; self-healing fault-tolerance; transient faults; finite state machine; Markov chains

## 1 Introduction

Designers of nanotechnology-based digital systems for safety-critical applications need to take into account that the systems can be affected by radiation-induced faults, e. g. Single Event Upsets (SEU) [1]. Thus, computing systems for safety-critical applications must be *fault-tolerant* to be able to continue properly functioning despite these transient failures of their hardware or software [2–4].

*Self-healing* refers to the system's ability to continue operating properly on the event of the failure of some of its components, that is, as its ability to maintain operation over a period of time  $t$ . In other words, a system is "self-healing" if it is capable to recover from errors while remaining valid system outputs. Moreover, systems designed to be self-healing must be able to heal themselves at runtime in response to changing environmental or operational status, in order to fix errors in its components without any external interaction [5].

In spite of plethora of the self-healing specific mechanisms, one of the most usable model of the systems of interest is the FSM. Therefore, the self-healing in automata models of systems used at early design stages, is considered. For example, a concept of a partially monotonic FSM, where the transitions are computed by partially monotonic Boolean functions, is used to provide self-healing properties [6]. In particular, if a self-checking digital circuit design is considered, the different properties of logical functions may provide self-

healing properties of the circuit [6]. The architecture that supports the self-healing property of the FSM is a well-known self-checking architecture [6] that uses output of self-checking checker. Thus, further, only FSM representations of digital systems will be considered.

Since, in general, both input data and faults appear randomly, the time before a system healing is some random values.

This paper describes a probabilistic approach to analysis of self-healing properties of FSM modeled systems under some transient faults. The model of system that allows to compare correct behavior with erroneous one is a Markov chain (MC) defined on direct product of state spaces of two FSMs, describing behavior of both fault-free and faulty design [7, 8]. The goal of this modeling is to estimate the time to return to the correct behavior after hitting in some erroneous one.

## 2 Some Concepts of Fault-Tolerant Design

Let us outline some principal definitions of the fault-tolerant systems research area. A *fault* is a physical cause of incorrect behavior, e. g., a defect in a memory cell. The most popular fault model in the area of digital system testing is so-called stuck-at-zero (a variable  $u$  has constant logical zero which designated as  $u \equiv 0$ ), and stuck-at-one (correspondingly,  $u \equiv 1$ ) [2].

\*The work was performed within the Russian Academy of Sciences Presidium basic research program 3 "Fundamental problems of system programming."

<sup>1</sup>Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences, slf-ipiran@mtu-net.ru

<sup>2</sup>Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences, apechinkin@ipiran.ru

The faults may be both *permanent* (that remain in existence indefinitely if no corrective action is taken) and *transient* ones (that appear and disappear quickly).

An *error* is an undesired state or condition in a component of a target system, understood as a discrepancy between an observed or measured value or condition and a specified theoretically correct value or condition. Error is a fault consequence. Faults may or may not cause one or few errors. Errors induce *failures*. A *failure* occurs when a system is no longer able to satisfy its specification, e. g., an incorrect word is formed on its output.

Correspondingly, one should differ between manifestation latency for the faults and the errors. It is considered that designers have an *oracle* that check the correctness of its output (result of computations).

The aim of a fault-tolerant design is to avoid manifestation of the fault/error at the system designed output in order to prevent the failure behavior. Note that in accordance with [6], when a transient fault occurs, a system may transit from a fault-free behavior (“mode”) either to the erroneous mode (the output is erroneous one) or in a mode where the faulty behavior will be “silent,” that is, an inner state will be incorrect while its output stays in a correct mode. If the system is able to return from the fault-free mode after its functioning in the silent mode, this is, obviously, the self-healing. In other words, in this case, future of a system (either it will “recover” or “die”) depends of its behavior during several clocks after moving to the silent mode. This parameter of number of clocks looks promising and motivating for the self-healing characterization.

### 3 Some Architectures Which Enable Self-Healing

Let us outline some architectures of digital systems that can provide their self-healing under some transient faults. There are two main types of the faults that are being considered, the SEU and the Single Event Transient (SET). The SEU occurs when radiation affects the transistors, for example, that are part of the look up table logic of the FPGA (Field-Programmable Gate Array). Radiation can hit areas on the device (FPGA, in particular) and causes an incorrect bit value at the input or output of some blocks. The SET affects current processing of data in the circuit. Some authors remark that the SET is less damaging than the SEU mainly because it does not affect the hardware makeup of the current FPGA design [9]. A transient fault induced by the SEU may or may not be latched by a storage cell, but in case of the fault occurrence, a correct operation of the corrupted module can be restored and the current

state of the circuit can be reset. It can be achieved either due to the monotonic properties of Boolean function describing the transitions of FSM representing the given system [9] or a reconfiguration [2]. Recall that a system of logical functions  $\psi$  is partially monotonic in  $u'$  input variables if for any pair of Boolean  $m$ -tuples  $A, B$ , the condition  $\psi(A) \leq \psi(B)$  is satisfied for  $A \leq B$  [6].

Another example of a system with self-healing, based on some reconfigurations of a system under some errors provoked by a fault has been considered in [9]. As it mentioned above, this reconfiguration architecture functioning can be also described as a FSM [10]. Partial Reconfiguration and Triple Module Redundancy (TMR) are used together to create a true self-healing system design [9]. In order to do this, the full TMR implementation must be extended to provide additional status outputs to the partial reconfiguration controller.

## 4 Problem Definition and Model Description

Let  $A$  be an automaton (FSM) modeling an electronic design implemented as a device (e. g., FPGA). It is considered that this design should operate in the presence of some radiation which hits at an physical area of the device causing an incorrect bit value to the input or output of its modules but does not affect immediately any primary outputs.

Let us assume that a transient fault during the clock  $t_0$  has changed a next state  $x_0$ , where fault-free FSM must transit under an input vector  $\vec{u}$ , for the state  $x_1$ . We say that in this moment, the change of a *trajectory* of the FSM transitions, corresponding to its transition table, took a place. All future transitions will be performed according to the FSM transition functions (in accordance with Table 1 in our example). If at one of the steps after this clock ( $t_0$ ) the primary output is changed relatively to the fault-free outputs and given transitions have still not come back to the fault-free trajectory, then either alarm or correction mechanism will be started, and the FSM will be stopped or moved to a restoration mode. There is no any self-healing in this case.

Otherwise, if the FSM under the transient fault will return to the normal (fault-free) trajectory before the output is changed, it means that the self-healing took place (at least, before the next external induced transient fault).

It is considered that a self-healing system can recover from some transient faults within a finite time and can provide that no further faults occur before the system is healing again. On the other hand, systems that are not self-healing might function ate in incorrect states arbitrary long time, even if no further faults occur.

**Table 1** Transition functions of FSM

$a_t$	$a_s$	$\vec{u}(a_t, a_s)$	$\vec{v}(a_t, a_s)$
$a_1$	$a_1$	$\bar{u}_1$	$v_2v_4$
	$a_1$	$u_1\bar{u}_2$	$v_2v_3$
	$a_2$	$u_1u_2$	$v_2v_4$
$a_2$	$a_1$	$\bar{u}_2$	$v_2v_4$
	$a_1$	$u_2\bar{u}_3$	$v_1v_4$
	$a_2$	$u_1u_3$	$v_2v_4$

The authors' goal is to express the probability distribution function of the time which can be spent to self-healing under transient faults using the Markov chains (FSMs) product model [7, 8]. Let us consider some examples of the self-healing phenomenon.

Let us describe an FSM in Table 1 where columns  $a_t$  and  $a_s$  are the current and the next states;  $\vec{u}$  and  $\vec{v}$  are the input and output signals in cubic form, that is, it has free components with all possible combinations of "0" and "1" (in the 3-input FSM in Table 1, the input variables absent in the corresponding cells may take any values).

Let the initial state of the FSM be  $a_1$ , and let an input sequence be  $u_1u_2 \rightarrow u_1u_2u_3$ , which generates the transitions  $a_1 \rightarrow a_2(v_2v_4) \rightarrow a_2(v_2v_4)$ . Let the variable  $u_2$  was corrupted by an external fault effect (e. g., SEU) so that the sequence  $u_1\bar{u}_2 \rightarrow u_1u_2u_3$  appeared instead of previous one, which generate wrong transition  $a_1 \rightarrow a_1(v_2v_3) \rightarrow a_2(v_2v_4)$ , that is, the FSM transmits to the state  $a_2$  instead  $a_1$ . However, because of discrepancy of the outputs in two cases (that is, the FSM either under the transient error or not), it will be either alarm or correction mechanism started, and the FSM will be either stopped or moved in a restoration mode, that is, the self-healing does not take place. Now, let the input sequence be  $\bar{u}_1u_2 \rightarrow \bar{u}_1u_2u_3 \rightarrow u_1u_2u_3$  generating the transitions  $a_1 \rightarrow a_1(v_2v_4) \rightarrow a_1(v_2v_4) \rightarrow a_2(v_2v_4)$ , which is corrupted as  $u_1u_2 \rightarrow \bar{u}_1u_2u_3 \rightarrow u_1u_2u_3$  with transitions  $a_1 \rightarrow a_2(v_2v_4) \rightarrow a_2(v_2v_4) \rightarrow a_2(v_2v_4)$ . Since the outputs are equal, the FSM under this transient fault comes to the right state  $a_2$  if the external fault effect be disappeared to the next clock.

## 5 Self-Healing Model Based on Finite State Machine

Let an FSM, subject to external radiation mentioned above during a clock (e. g., hit of some radioactive particles), changes its correct trajectory to an incorrect one, but it returns to the correct trajectory after a number of clocks when the radiation effect is stopped. Following [7], this phenomenon will be modeled by an MC defined on the transition space of two FSMs product: one of these FSM is the original one (called as "fault-free"), but another (called as "faulty") has the transition

table of original FSM but its trajectory is corrupted during the clock-under-noise.

Let FSM be a Mealy machine, with the state set  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , the input set  $U = \{\vec{u}\} = \{u_1, \dots, u_m\}$  and the output set  $V = \{\vec{v}\} = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Functions  $\delta$  and  $\lambda$  are the multiple-output Boolean functions which are a relation between the (input state, present state) pairs and the next states ( $\delta$ ), and between the (input state, present state) pairs and the output states ( $\lambda$ ). Let the input words of the FSM be a randomly generated input vectors. Obviously that the probability of the self-healing property fulfillment depends on the distribution of input vectors (for example, see Table 1). Let us consider self-healing time computation by the FSM product model.

Let  $\{X_t, t \geq 0\}$  and  $\{Y_t, t \geq 0\}$  are the MCs describing the target behavior of a fault-free system (in accordance with the previous section), that is, functioning without effect of any transient faults ( $X_t$ ), and in the presence of some faults ( $Y_t$ ),  $S$  is the set of states of the MCs.

Let  $Z_t = \{(X_t, Y_t), t \geq 0\}$  be an MC corresponding to behavior of the MCs pairs that is an MC with space  $S^2 = S \times S$  of pairs  $(a_i, a_j)$ ,  $a_i, a_j \in S$ .

Let the states  $S$  are integers. Fixing the states numeration in some way, for example, as  $s_1 = (a_1, a_1)$ , where the "ones" are the numbers of states of  $X_t, Y_t$ ,  $s_2 = (a_1, a_2), \dots, s_n = (a_1, a_n)$ ,  $s_{n+1} = (a_2, a_1)$ ,  $s_{n^2} = (a_n, a_n)$ , the vector of the state transition probabilities of the MC after  $t$  steps may be defined as

$$\vec{p}^*(t) = (p_1^*(t), \dots, p_{n^2}^*(t)), \quad t \geq 0,$$

where the state probability vector of the MC  $Z_t$  after  $t$  clocks. This vector can be computed using the state probabilities of  $X_t$  and  $Y_t$ ,

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= (p_1(t), \dots, p_n(t)), \quad t \geq 0; \\ \vec{p}^F(t) &= (p_1^F(t), \dots, p_n^F(t)), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

with initial states probabilities of the MCs, where index "F" corresponds to the FSM under a transient fault ("faulty" FSM):

$$p_i(0) = \begin{cases} 1, & a_i = X_0, \\ 0, & a_i \neq X_0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n;$$

$$p_j^F(0) = \begin{cases} 1, & a_j = Y_0, \\ 0, & a_j \neq Y_0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

Then, the event of coincidence of the trajectories of  $X_t$  and  $Y_t$  (self-healing) may be denoted as hit of the MC  $Z_t$  in a subset  $D \subseteq S^2$  of all states  $(a_i, a_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , with the same right and left elements.

In general, the self-healing time can be expressed as

$$T = \min\{t : X_t = Y_t\} = \min\{t : Z_t \in D\}. \quad (1)$$

Let us characterize the self-healing time  $T$  by a functional  $Q(T)$  of the time. It can be interpreted as a speed of returning to a correct mode.

Equation (1) can be rewritten in different ways in dependence of the functional that will be used for the time to healing characterization (and it can be interpreted as a “loss function”).

Most simple type of the  $Q_1(t)$  is the mean time to healing, that is:

$$Q = Q_1 = \mathbf{E}(T).$$

More interesting measure is the probability  $Q_2(t_0)$  that time of returning of the FSM to its correct trajectory after fault effect disappearance is more than  $t_0$ . Let us define:

$$Q = Q_2 = Q_2(t_0) = \mathbf{Pr}\{T \geq t_0\}.$$

Note that relationship between  $Q_1$  and  $Q_2$  is

$$Q_1 = \sum_{t_0=1}^{\infty} \mathbf{Pr}\{T \geq t_0\} = \sum_{t_0=1}^{\infty} Q_2(t_0).$$

Both these times to self-healing measures are computed under assumptions that the initial states  $X_0$  and  $Y_0$  of both MCs are known. Therefore, the function  $Q_2$  can be expressed as

$$Q_2 = 1 - \mathbf{Pr}\{Z_{t_0-1} \in D\} = 1 - \sum_{z \in D} p_z^*(t_0 - 1).$$

Also, it can be easily shown that

$$Q_2 \geq \max_V |\mathbf{Pr}\{Y_{t_0-1} \in V\} - \mathbf{Pr}\{X_{t_0-1} \in V\}|$$

where  $V \subseteq S$ .

Note that the functionals  $Q_1$  and  $Q_2$  have been built without explicit consideration of equality of output values of both FSMs. Below, more general case of FSM under transient fault self-healing characterization will be considered, namely, the probability distribution function of the time to return to the FSM fault-free behavior before its output mismatching with its copy, which functionates without any transient faults.

## 6 Computation of Self-Healing Time Probability Distribution Function

Below, the time to self-healing probability distribution function will be computed as a distribution of number of steps to absorbing state of  $Z_t$ , corresponding to the event “the automaton under transient fault has returned to the fault-free trajectory before its output mismatching.”

Let us define all specific states of the MC  $Z_t$  needed to find out accurately the self-healing time. Again, let the states set of both MCs  $S_1$  and  $S_2$ ,  $|S_1| = |S_2| = n$ , are the same and their initial states  $X_0$  and  $Y_0$ ,  $Y_0 \neq X_0$ , are known. Let us define the set of  $Z_t$  states as  $S^* = \{(i, j), i, j = 1, \dots, n, j \neq i\} \cup A_0 \cup A_1$  where:

- $(i, j)$  means that fault-free automaton is in the state  $i$ , but the automaton under a transient fault is in the state  $j$ ,  $j \neq i$ ;
- $A_0$  is an absorbing state of  $Z_t$ , corresponding to the event “the automaton under transient fault has returned to the fault-free trajectory before its output would be corrupted by the transient fault effect;” and
- $A_1$  is another absorbing state corresponding to the event “faulty output appeared before the trajectory restoration.”

The number of the  $Z_t$  states is  $n(n - 1) + 2$ .

Let us consider the way of MC  $Z_t$ , transition probability matrix  $P^*$  computation. Let  $Z_t$  be in the state  $(i_1, j_1)$  when the input signal  $\vec{u}$  is applied which transfers the fault-free automat from the state  $i_1$  to the state  $i_2$ , whereas the automaton under a transient fault will transfer to the state  $j_2$ , and the output vectors of the automata are  $\vec{v}_0$  and  $\vec{v}_1$ , correspondingly. Then the following situations are possible:

- $Z_t$  is in the state  $A_1$  if  $\vec{v}_0 \neq \vec{v}_1$ ;
- $Z_t$  is in the state  $A_0$  if  $i_2 = j_2$  and  $\vec{v}_0 = \vec{v}_1$ ; and
- $Z_t$  transits to the state  $(i_2, j_2)$  if the outputs coincide ( $\vec{v}_0 = \vec{v}_1$ ), but the states do not ( $i_2 \neq j_2$ ).

The transition probability matrix of the MC  $Z_t$  is computed by the known probabilities of input vectors and transition tables of the FSM [7], considering the signals with the same input probabilities distributions  $\mathbf{Pr}\{u_i = 1\}, i = 1, \dots, m$ .

Let us denote:

- $p_{(1)}^*(t)$  is the probability that a faulty output behavior of the automaton can appear right up to the  $t$ th step before the automaton behavior will be restored;
- $p_{(0)}^*(t)$  is the probability that a faulty behavior of the automaton can appear right up to the  $t$ th step and the output both automata will coincide by this moment; and
- $p_{i,j}^*(t)$  is the probability that the MC  $Z_t$  will get in the state  $(i, j)$  ( $j \neq i$ ) thereby by the moment  $t$ , but the outputs will coincide.

Then, let us express the probability that  $Z_t$  will get in the state  $(i, j)$ .

Initial state  $\vec{p}^*(0)$  is determined by the distribution of initial states of both automata. If the fault-free automaton is at the initial moment 0 in the state  $i_0 = X_0$ , whereas

the faulty automaton will be in state  $j_0 = Y_0$ ,  $j_0 \neq i_0$ , then  $p_{i_0, j_0}^*(0) = 1$  and other components of the vectors are zero.

Matrix  $P^*$  is computed using input probabilities of Boolean functions  $u_l = u_l(a_t, a_s)$ , describing transitions from the current state  $a_t$  to the next state  $a_s$ , takes the Boolean value. This computation is performed under assumption that input variables of the FSM are independent random vectors from one time step to another and that their probability distribution is fixed so that, at any given time step, an input takes place with probability  $\Pr\{u_i = 1\} = p_k$ ,  $i = 1, \dots, m$ . For example, the FSM of Table 1 stays in the state  $a_2$  with probability  $p_1 p_3$  since this is a Boolean conjunction of the Boolean variables  $u_1$  and  $u_3$ .

The distribution  $Z_t$  in the moment  $t$

$$\vec{p}^*(t) = \vec{p}^*(t-1)P^* = \vec{p}^*(0)(P^*)^t \quad (2)$$

and the vector component, corresponding to the transition to an absorbing state  $A_0$ , represents the probability distribution of the self-healing time.

Let us denote:

- $\pi_0$  is the probability that exists an instant  $t$  when outputs of both (faulty and fault-free automata) are different (the vector  $\vec{v}_0 \neq \vec{v}_1$ );
- $\pi_1$  is the probability of the automaton “healing” that is the return to the transitions trajectory of normal functioning after an external fault effect will be disappeared and  $\vec{v}_0 = \vec{v}_1$  for any  $t$ ; and
- $\pi$  is the probability that the automaton never more come back to the normal transitions trajectory after the external fault effect will disappear.

The relationships between these probabilities are:

$$\pi_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{(0)}(t); \quad \pi_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{(1)}(t).$$

Therefore,

$$\pi = 1 - \pi_0 - \pi_1. \quad (3)$$

Let us demonstrate an example of the time to probabilities computation.

**Example.** Let us consider the automaton with two states in Table 1.

Let the transient fault be the erroneous transition to the state  $a_2$  instead of  $a_1$ .

Then corresponding MC  $Z_t$  that corresponds to the MC describing the product of two automata has four states: (1,2), (2,1),  $A_0$ , and  $A_1$  where state (1,2) describes the case when fault-free and SEU-affected automata are correspondingly in the states  $a_1$  and  $a_2$ , (2,1) means that they are in states  $a_2$  and  $a_1$ , and  $A_0$  and  $A_1$  are the absorbing states mentioned above.

In order to define the MC  $Z_t$  completely, let us compute its state transition probabilities (see Table 1).

First, the probabilities that the  $Z_t$  are in the absorbing states  $A_0$  and  $A_1$  are equal to 1.

From state (1,2) to  $A_0$ , it is possible to get only if the input vector  $\bar{u}_1 u_2 u_3$  is applied; thereby, the probability of this transition is  $q_1 p_2 p_3$  where  $p_l = \Pr\{x_l = 1\}$  and  $q_l = 1 - p_l$ ,  $l = 1, 2, 3$ . Then both automata transit to the state  $a_2$  and their outputs equal to  $v_2 v_4$ .

The only way to stay in the state (1,2) is to apply the input vector  $u_1 u_2 u_3$  (with probability  $p_1 p_2 p_3$ ). Then the fault-free automaton remains in the state  $a_1$ , whereas the automaton subjected the SEU hit will be in the state  $a_2$ , and both inputs vectors are  $v_2 v_4$ .

The transition from (1,2) to (2,1) is possible with probability  $q_1 q_2$  if the signal  $\bar{u}_1 \bar{u}_2$  will be applied, whereas the outputs are  $v_2 v_4$ .

Finally, the transition from (1,2) to  $A_1$  is possible under input signals  $u_1 \bar{u}_2$  (with probability  $p_1 q_2$ ),  $u_1 u_2 \bar{u}_3$  (with probability  $p_1 p_2 q_3$ ), and  $\bar{u}_1 u_2 \bar{u}_3$  (with probability  $q_1 p_2 q_3$ ).

Indeed, under all of possible combinations of input signals, there is a discrepancy between outputs vectors of both automata, which means the state  $A_1$ . All possible transitions (determined by corresponding input vectors) and there probabilities are given in the row “(1,2)” of Table 2.

**Table 2** Possible transitions and probabilities of input vectors

	$A_0$	(1,2)	(2,1)	$A_1$
$A_0$	1	0	0	0
(1,2)	$q_1 p_2 p_3$	$p_1 p_2 p_3$	$q_1 q_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_3$
(2,1)	$q_1 p_2 p_3$	$q_1 q_2$	$p_1 p_2 p_3$	$p_1 q_2 + p_2 q_3$
$A_1$	0	0	0	1

Analogously can be computed all transition probabilities from state (2,1).

Therefore, the probability transition matrix  $P^*$  of the MC  $Z_t$  is:

$$P^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 p_2 p_3 & p_1 p_2 p_3 & q_1 q_2 & p_1 q_2 + p_2 q_3 \\ q_1 p_2 p_3 & q_1 q_2 & p_1 p_2 p_3 & p_1 q_2 + p_2 q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note that in the matrix  $P^*$ , the following transition probabilities are equal:

- from the states  $(i, j)$  and  $(j, i)$  to  $A_0$ ;
- from the states  $(i, j)$  and  $(j, i)$  to  $A_1$ ; and
- from the states  $(i, j)$  to  $(i, j)$  and from  $(j, i)$  to  $(j, i)$ .

Let suppose the following probabilities of Boolean 1 in the input vector bits:

$$p_1 = 0,2; \quad p_2 = 0,4; \quad p_3 = 0,25$$

**Table 3** Possibilities of different states

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	...	$t = 28$
$p_{(0)}(t)$	0,000000	0,080000	0,120000	0,140000	0,150000	...	0,160000
$p_{(1)}(t)$	0,000000	0,420000	0,630000	0,735000	0,787500	...	0,840000
$\hat{p}(t)$	1,000000	0,500000	0,250000	0,125000	0,062500	...	0,000000

and the initial distribution of the MC:

$$\vec{p}^*(0) = (0, 1, 0, 0).$$

Then

$$P^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,08 & 0,02 & 0,48 & 0,42 \\ 0,08 & 0,48 & 0,02 & 0,42 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} \vec{p}^*(1) &= \vec{p}^*(0)P^* = \\ &= (0, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,08 & 0,02 & 0,48 & 0,42 \\ 0,08 & 0,48 & 0,02 & 0,42 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (0,08, 0,02, 0,48, 0,42); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}^*(2) &= \vec{p}^*(1)P^* = \\ &= (0,1200, 0,2308, 0,0192, 0,6300). \end{aligned}$$

The first row of Table 3 contains probability  $p_{(0)}(t)$  that the automaton (see Table 1) will restore the correct behavior before the fault effect will appear at its output variables. The second row contains the probability  $p_{(1)}(t)$  where the output variables are corrupted by the  $t$ th step and the third row contains the probability  $\hat{p}(t) = 1 - p_{(0)}(t) - p_{(1)}(t)$  that the state of the automaton was changed during a clock (before the moment  $t$ ) by a transient fault, but the output will remain correct.

Note that for this example, both conditional expected times to reach the state  $A_0$  and conditional expected time to reach the state  $A_1$  are equal to 2.

## 7 Concluding Remarks

In this paper, the self-healing phenomenon in digital systems in terms of product of MC describing faulty and fault-free FSMs under independent random input binary signals was analyzed. Since we deal with the FSM models, it is possible to use this self-healing probability in analysis of reliability of digital and computer systems at FSM level of their modeling that is in rather early design stages. In other words, these models can

be used in reliability analysis of a target system in hierarchical system design. They can be a base for a tool of fault-tolerant systems design, dealing with such fault tolerance aspects as fault detection latency (for permanent faults) [8] and self-healing in presence of some transient faults (Soft Upset Errors, in particular). Now, there are some preliminary results of using this approach to self-healing probability estimation for a self-checking design [6].

The authors' model (Eqs. (1)–(3)) does not take into account probability distribution of the transient faults during FSM functioning. Therefore, this aspect can be indicated as a very important issue of the future work.

## References

1. *Baumann R.* Soft errors in advanced computer systems // IEEE Design and Test, May–June, 2005. P. 258–266.
2. *Lala P.* Self-checking and fault-tolerant digital design. — Morgan Kaufmann Publs., 2000.
3. *Lala P. K., Kumar B. K.* An Architecture for self-healing digital systems // J. Electronic Testing: Theory and Applications, 2003. Vol. 19. P. 523–535.
4. *Hawthorne M., Perry D.* Architectural styles for adaptable self-healing dependable systems // ICSET05 Proceedings, May 15–21, 2005. St. Louis, Missouri, USA.
5. *Park J., Jung J., Piao Sh., Lee E.* Self-healing mechanism for reliable computing // Int. J. Multimedia Ubiquitous Engineering, 2008. Vol. 3. No. 1. P. 75–76.
6. *Levin I., Matrosova A., Ostanin S.* Survivable self-checking sequential circuits // DFTT01 Proceedings, 2001. P. 395.
7. *Shedletsky J., McCluskey E.* The error latency of fault in a sequential digital circuit // IEEE Transaction on Computers, 1976. Vol. 25, No. 6. P. 655–659.
8. *Frenkel S., Pechinkin A., Chaplygin V., Levin I.* A mathematical tool for support of fault-tolerant embedded systems design // ERCIM/DECOS Dependable Smart Systems: Research, Industrial Applications, Standardization, Certification and Education. Workshop on “Dependable Embedded Systems.” Lübeck, Germany, 2007.
9. *Custodio E., Marsland B.* Self-healing partial reconfiguration of an FPGA. Project Report, Project Number: MQP-BYK-GD07 Worcester Polytechnic Institute, April 26, 2007.
10. *Lala P. K., Kumar B. K.* On self-healing digital system design // J. Microelectronics, 2006. Vol. 37. P. 353–362.

## ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ САМОВОССТАНОВЛЕНИЯ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ ПОСЛЕ СБОЕВ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ПЕРЕХОДНЫМИ ПОМЕХАМИ

С. Л. Френкель<sup>1</sup>, А. В. Печинкин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, Slf-ipiran@mtu-net.ru

<sup>2</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, apchinkin@ipiran.ru

**Аннотация:** Рассмотрен новый подход к оценке свойств самовосстановления в цифровых системах. Данное свойство характеризует способность системы продолжать выполнять свои функции в случае сбоя в работе тех или иных компонентов, его учет может быть полезен при расчете надежности. Оценивается время до возвращения проектируемой системы в режим нормального функционирования после проявления действия внешней помехи как функция распределения вероятности (ФРВ) этого времени. Предложены возможные пути расчета ФРВ времени до самовосстановления на основе использования марковской модели поведения цифровой системы, представленной как конечный автомат и подверженной действию переходных помех.

**Ключевые слова:** отказоустойчивые компьютеры; самовосстановление и отказоустойчивость; переходные неисправности; конечные машины состояний; цепи Маркова



# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАТАСТРОФАМИ\*

А. И. Зейфман<sup>1</sup>, А. В. Коротышева<sup>2</sup>, Я. А. Сатин<sup>3</sup>, С. Я. Шоргин<sup>4</sup>

**Аннотация:** Рассмотрены модели обслуживания, описываемые процессами рождения и гибели (ПРГ) с катастрофами. Получены оценки устойчивости различных характеристик таких систем. Рассмотрен пример конкретной системы обслуживания.

**Ключевые слова:** нестационарные системы обслуживания; марковские модели с катастрофами; устойчивость; оценки; предельные характеристики; аппроксимация

## 1 Введение

Системы массового обслуживания с катастрофами изучались во многих работах современных авторов (см., например, [1–9]). Вопросы, связанные с устойчивостью неоднородных марковских цепей с непрерывным временем, впервые исследованы одним из авторов в [10] и затем более детально для нестационарных ПРГ в работах [11, 12]. В настоящей статье будет исследована устойчивость одного класса моделей, описываемых нестационарными ПРГ с катастрофами. Причем будет рассмотрен случай, когда интенсивность катастрофы не зависит от числа требований в системе и является существенной. Случай, когда устойчивость гарантируется за счет достаточно больших интенсивностей обслуживания, исследуется так же, как в работах [11, 12], а ситуация, в которой интенсивности катастроф зависят от числа требований, будет изучаться отдельно.

Пусть  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$ , — ПРГ с катастрофами, а  $\lambda_n(t)$ ,  $\mu_n(t)$  и  $\xi(t)$  — интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = \Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$ ,  $i, j \geq 0$ ,  $0 \leq s \leq t$ , переходные вероятности процесса  $X = X(t)$ , а через  $p_i(t) = \Pr \{X(t) = i\}$  — его вероятности состояний.

При выполнении естественных дополнительных условий (см., например, [13]) прямую систему Колмогорова для вероятностей состояний

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -(\lambda_0(t) + \xi(t))p_0 + \mu_1(t)p_1 + \xi(t); \\ \frac{dp_k}{dt} &= \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - (\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi(t))p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{p} + \mathbf{g}(t), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$ , где  $\mathbf{g}(t) = (\xi(t), 0, 0, \dots)^T$ ,  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$  — вектор-столбец вероятностей состояний;  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t), t \geq 0\}$  — матрица, порождаемая системой (1), при этом ее элементы определяются по формулам

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda_{i-1}(t), & \text{если } j = i - 1; \\ \mu_{i+1}(t), & \text{если } j = i + 1; \\ -(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi(t)), & \text{если } j = i; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее предполагаем, что

$$\lambda_n(t) = \nu_n \lambda(t), \quad \mu_n(t) = \eta_n \mu(t), \quad t \geq 0, \quad n \in E,$$

где  $0 \leq \eta_n \leq M$ ,  $0 \leq \nu_n \leq M$ , а «базисные» функции  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  и  $\xi(t)$  локально интегрируемы на  $[0; \infty)$  и (для простоты вычислений) ограничены, т. е.

$$\lambda(t) + \mu(t) + \xi(t) \leq L < \infty$$

почти при всех  $t \geq 0$  (см. подробное рассмотрение в [14–16]).

\*Исследование поддержано грантами РФФИ 08-07-00152 и 09-07-12032. Статья написана на основе материалов доклада, представленного на IV Международном семинаре «Прикладные задачи теории вероятностей и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем» (зимняя сессия, Аоста, Италия, январь–февраль 2010 г.).

<sup>1</sup>Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики Российской академии наук и ИСЭРТ Российской академии наук, a\_zeifman@mail.ru

<sup>2</sup>Вологодский государственный педагогический университет, a\_korotysheva@mail.ru

<sup>3</sup>Вологодский государственный педагогический университет, yacovi@mail.ru

<sup>4</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, SShorgin@ipiran.ru

Обозначим через  $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$  множество всех стохастических векторов.

Тогда

$$\|A(t)\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}(t)| \leq 2ML$$

почти при всех  $t \geq 0$ , а значит, задача Коши для уравнения (2) с начальным условием  $\mathbf{p}(0)$  имеет единственное решение

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U(t, \tau)\mathbf{g}(\tau) d\tau,$$

где  $U(t, s)$  — оператор Коши уравнения (2). При этом если  $\mathbf{p}(s) \in \Omega$ , то и  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при любом  $t \geq s$ .

Рассмотрим теперь «возмущенный» ПРГ с катастрофами  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обозначая через  $\bar{\lambda}_n(t)$ ,  $\bar{\mu}_n(t)$  и  $\bar{\xi}(t)$  его интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_n(t) &= \bar{\lambda}_n(t) - \lambda_n(t); \\ \hat{\mu}_n(t) &= \bar{\mu}_n(t) - \mu_n(t); \\ \hat{\xi}(t) &= \bar{\xi}(t) - \xi(t). \end{aligned}$$

Для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», т. е. при всех  $n$  и почти всех  $t \geq 0$  выполняются неравенства

$$|\hat{\lambda}_n(t)| \leq \varepsilon_1, \quad |\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon_2, \quad |\hat{\xi}(t)| \leq \varepsilon_3. \quad (3)$$

## 2 Устойчивость вектора состояний

Выпишем прямую систему Колмогорова, соответствующую возмущенному процессу,

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{g}}(t). \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t), \quad \hat{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{g}(t) - \bar{\mathbf{g}}(t).$$

Перепишем систему (4) в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = A(t)\bar{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{g}(t) - \hat{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) - \hat{\mathbf{g}}(t).$$

Получаем

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U(t, \tau)\mathbf{g}(\tau) d\tau;$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}(t) &= U(t)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t U(t, \tau)\mathbf{g}(\tau) d\tau - \\ &\quad - \int_0^t U(t, \tau) \left( \hat{A}(\tau)\bar{\mathbf{p}}(\tau) + \hat{\mathbf{g}}(\tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

В этом параграфе возможно рассмотрение непосредственно по норме  $l_1$ . Пусть  $\mathbf{p}(0) = \bar{\mathbf{p}}(0)$ , тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| &\leq \int_0^t \|U(t, \tau)\| \left( \|\hat{A}(\tau)\| \|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| + \right. \\ &\quad \left. + \|\hat{\mathbf{g}}(\tau)\| \right) d\tau. \end{aligned}$$

Имеем теперь

$$\|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| = 1, \quad \tau \geq 0, \quad (5)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \left( \|\hat{A}(\tau)\| \|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| + \|\hat{\mathbf{g}}(\tau)\| \right) &\leq (2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3) + \varepsilon_3 = \\ &= 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора  $A(t)$  в пространстве  $l_1$  (см. [7]), получаем

$$\gamma(A(t))_1 = \sup_i \left( a_{ii}(t) + \sum_{j \neq i} |a_{ji}(t)| \right) = -\xi(t).$$

Тогда

$$\|U(t, s)\| \leq e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau}$$

для всех  $0 \leq s \leq t$  и формулируем следующее утверждение.

**Теорема 1.** При совпадении начальных условий для исходного и возмущенного ПРГ с катастрофами для всех  $t \geq 0$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| &\leq \\ &\leq 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \int_0^t e^{-\int_{s_1}^t \xi(\tau) d\tau} ds_1. \quad (6) \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Пусть  $\xi(t) \geq \xi > 0$  почти при всех  $t \geq 0$ . Тогда вместо (6) получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\xi}.$$

**Замечание 1.** Более точные оценки отклонения можно получить, ослабив условия малости возмущений и потребовав, чтобы вместо (3) выполнялись при всех  $n$  и почти всех  $t \geq 0$  неравенства

$$\left. \begin{aligned} |\hat{\lambda}_n(t)| &\leq \varepsilon_1 \xi(t); \\ |\hat{\mu}_n(t)| &\leq \varepsilon_2 \xi(t); \\ |\hat{\xi}(t)| &\leq \varepsilon_3 \xi(t), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а кроме того, чтобы было выполнено естественное условие существенности катастроф (см. подробнее [11])

$$\int_0^{\infty} \xi(\tau) d\tau = +\infty. \quad (8)$$

### 3 Оценка для среднего

Обозначим через  $E_k(t) = E\{X(t) | X(0) = k\}$  математическое ожидание процесса в момент  $t$  при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии  $k$ . Иногда будет встречаться также несколько более общее выражение  $E_{\mathbf{p}}(t)$  — это математическое ожидание процесса в момент  $t$  при начальном распределении вероятностей состояний  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ .

Соответствующие выражения для возмущенного процесса будем обозначать через  $\bar{E}_k(t) = E\{\bar{X}(t) | \bar{X}(0) = k\}$  и  $\bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)$ .

Легко видеть, что тогда  $|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \sum_k k |p_k(t) - \bar{p}_k(t)|$ . Поэтому в качестве основного в этом пункте выберем пространство последовательностей  $l_{1E} = \{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)\} \in l_1$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1E} = \sum_k k |p_k| < \infty$ . К сожалению, в этой и связанных с ней нормах оценку типа (5) непосредственно получить не удастся, поэтому приходится выбирать другой способ дальнейших рассуждений.

Для получения более простых оценок будем предполагать, что найдутся  $\rho \in (0; 1)$  и натуральное  $k$  такие, что для всех  $n, t$  выполнено условие  $(1/k)\lambda_n(t) \leq (1 - \rho)\xi(t)$ .

Перепишем исходную систему (2) для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{A}(t)\mathbf{p}(t) + \bar{\mathbf{g}}(t) + \hat{A}(t)\mathbf{p}(t) + \hat{\mathbf{g}}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \bar{U}(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau)\bar{\mathbf{g}}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \bar{U}(t, \tau) \left( \hat{A}(\tau)\mathbf{p}(\tau) + \hat{\mathbf{g}}(\tau) \right) d\tau; \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{U}(t)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau)\bar{\mathbf{g}}(\tau) d\tau.$$

Это означает, что в *любой* норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| &\leq \\ &\leq \int_0^t \|\bar{U}(t, \tau)\| \left( \|\hat{A}(\tau)\| \|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\hat{\mathbf{g}}(\tau)\| \right) d\tau. \quad (9) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$D_k = \text{diag} \left( \underbrace{k, k, k, \dots, k}_{k+1}, k+1, k+2, \dots \right)$$

и соответствующее пространство последовательностей  $l_{1k} = \{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)\}$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1k} = \|D_k \mathbf{z}\|_1 < \infty$ . Тогда, очевидно, при любом целом неотрицательном  $k$  имеем  $\|\mathbf{z}\|_{1E} \leq \|\mathbf{z}\|_{1k}$ .

Оценивая логарифмическую норму  $\gamma(A(t))_{1k}$ , получаем

$$\begin{aligned} \gamma(A(t))_{1k} &= \gamma(D_k A(t) D_k^{-1})_1 \leq \frac{M}{k} \lambda(t) - \xi(t) \leq \\ &\leq -\rho \xi(t), \end{aligned}$$

поскольку сумма по каждому из столбцов с номерами  $0, 1, \dots, k-1$  равна  $-\xi(t)$ , а если номер столбца  $n \geq k$ , то сумма по этому столбцу есть  $((n+1)/n)\lambda_n(t) - (\lambda_n(t) + \mu_n(t) + \xi(t)) + ((n-1)/n)\mu_n(t) \leq (1/n)\lambda_n(t) - \xi(t) \leq (M/k)\lambda(t) - \xi(t)$ .

Далее

$$\begin{aligned} \|\hat{A}(t)\|_{1k} &= \|D_k \hat{A}(t) D_k^{-1}\|_1 \leq \\ &\leq \frac{2k+1}{k} \varepsilon_1 + \frac{2k-1}{k} \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

А тогда

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{A}(t))_{1k} &\leq \gamma(D_k A(t) D_k^{-1})_1 + \|\hat{A}(t)\|_{1k} \leq \\ &\leq -\rho \xi(t) + 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Оценим теперь

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t)\|_{1k} &\leq \|U(t)\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \int_0^t \|U(t, \tau)\mathbf{g}(\tau)\|_{1k} d\tau \leq \\ &\leq e^{\int_0^t (-\rho \xi(u)) du} \|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + k \int_0^t \xi(\tau) e^{\int_0^t (-\rho \xi(u)) du} d\tau \leq \\ &\leq \|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \frac{k}{\rho} < \infty \end{aligned}$$

при любом  $\mathbf{p}(0)$ , поскольку  $\|\mathbf{g}(\tau)\|_{1k} = k\xi(\tau)$ . Теперь с учетом (9) имеем

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| \leq \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1k} \leq \left( (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left( \|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \frac{k}{\rho} \right) + k\varepsilon_3 \right) \int_0^t e^{-\int_{\tau}^t (\rho\xi(u) - 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) du} d\tau. \quad (10)$$

**Теорема 2.** При совпадении начальных условий для исходного и возмущенного ПРГ с катастрофами для всех  $t \geq 0$  справедлива оценка устойчивости среднего (10).

**Следствие 2.** Пусть  $\xi(t) \geq \xi > 0$  почти при всех  $t \geq 0$ , а  $X(0) = 0$ . Тогда вместо (10) получаем

$$|E_0(t) - \bar{E}_0(t)| \leq \left( (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \frac{k}{\rho} + k\varepsilon_3 \right) \times (\rho\xi - 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^{-1}.$$

**Замечание 2.** Более точные оценки отклонения можно получить, ослабив условия малости возмущений (см. (7) и (8)).

## 4 Пример

В современных моделях, связанных с финансовой математикой, рассматриваются марковские цепи и их устойчивость (см. [17–19]).

Рассмотрим здесь простейшую нестационарную модель, описывающую число клиентов страховой компании.

А именно, пусть вначале

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}(t) &= \lambda(t) = 5 + 5 \sin 2\pi t; \\ \mu_n(t) &= \mu(t) = 5 + 5 \cos 2\pi t, \\ \xi(t) &= 1 + \sin 2\pi t, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

а все  $\varepsilon_i = \varepsilon$ .

Применяя методы, описанные в наших предыдущих работах, и строя последовательность аппроксимирующих процессов так, как это предложено в [20], получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Справедлива следующая оценка:

при  $X(0) = X_n(0) = 0$

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1 \leq 2e^{-t} + \frac{42e^{8t}}{2^{N+3}}$$

при всех  $t \geq 0$  и любом  $N$ .

**Доказательство.** Отметим прежде всего, что

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1 \leq \|\pi(t) - \mathbf{p}(t)\|_1 + \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1.$$

Воспользуемся вначале неравенством

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 &\leq e^{\int_0^t \gamma(A(\tau))_1 d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1 \leq e^{-\int_0^t (1 + \sin 2\pi\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1 \leq e^{-t} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1. \end{aligned}$$

Теперь, выбирая  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_0$ , получаем первое слагаемое правой части. Далее рассмотрим  $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1$  для получения второго слагаемого.

Будем отождествлять векторы  $(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)^T$  и  $(x_1, \dots, x_N)^T$ . Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_N(t)\mathbf{p} + \mathbf{g}(t) + (A(t) - A_N(t))\mathbf{p},$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = A_N(t)\mathbf{p}_N + \mathbf{g}(t)$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_N(t) = U_N(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_N(t, \tau)\mathbf{g}(\tau) d\tau$$

при  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_N(0)$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= U_N(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_N(t, \tau)\mathbf{g}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t U_N(t, \tau)(A(\tau) - A_N(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| &\leq \int_0^t \|U_N(t, \tau)\| \| (A(\tau) - A_N(\tau))\mathbf{p}(\tau) \| d\tau. \end{aligned}$$

Далее  $\|U_N(t, \tau)\|_1 = 1$ , а

$$\begin{aligned} (A - A_N)\mathbf{p} &= (0, \dots, 0, -\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}, \\ &\lambda_N p_N - (\lambda_{N+1} + \mu_{N+1} + \xi) p_{N+1} \\ &+ \mu_{N+2} p_{N+2}, \dots)^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(A - A_N)\mathbf{p}\| &\leq \|A\| \sum_{n \geq N} p_n = \\ &= (21 + 11 \sin 2\pi t + 10 \cos 2\pi t) \sum_{n \geq N} p_n \leq 42 \sum_{n \geq N} p_n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{d(2^n p_n)}{dt} &= \\ &= \sum_{n \geq 0} 2^n \left( 2\lambda_n - (\lambda_n + \mu_n + \xi) + \frac{\mu_n}{2} \right) p_n \leq \\ &\leq \sum_{n \geq 0} 2^n (1,5 + 4 \sin 2\pi t - 2,5 \cos 2\pi t) p_n \end{aligned}$$

и, значит,

$$\frac{d \left( \sum_{n \geq 0} 2^n p_n \right)}{dt} \leq 8 \sum_{n \geq 0} 2^n p_n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} 2^n p_n(t) &\leq e^{8t} \sum_{n \geq 0} 2^n p_n(0) = e^{8t}; \\ 2^N \sum_{n \geq N} p_n &\leq \sum_{n \geq N} 2^n p_n \leq e^{8t}, \end{aligned}$$

а тогда

$$\sum_{n \geq N} p_n \leq \frac{e^{8t}}{2^N}.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \int_0^t \left( \frac{42e^{8\tau}}{2^N} \right) d\tau \leq \frac{42e^{8t}}{2^{N+3}},$$

откуда получается второе слагаемое.

Теперь несложно проверить, что для построения предельного режима для невозмущенного процесса с точностью  $10^{-8}$  достаточно выбрать  $N = 273$ ,  $t \in [20, 21]$ .

**Теорема 4.** При  $X(0) = X_N(0) = 0$  справедлива оценка

$$|\phi(t) - E_{0,N}(t)| \leq \frac{ke^{-\rho t}}{\rho} + \frac{22e^{8t}}{2^N}$$

при всех  $t \geq 0$  и любом  $N \geq k$ .

**Доказательство.** Первое слагаемое правой части вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} |E_k(t) - E_0(t)| &\leq \|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{1E} \leq \\ &\leq \|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{1k} \leq \|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho t}, \end{aligned}$$

если предварительно выбрать  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_0$  и воспользоваться рассуждениями теоремы 2.

Оценим  $\|\pi(0)\|_{1k}$ . Имеем с учетом 1-периодичности

$$\begin{aligned} \|\pi(0)\|_{1k} &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1k} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( \|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho \int_0^t \xi(u) du} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|g(\tau)\|_{1k} e^{-\rho \int_\tau^t \xi(u) du} d\tau \right) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( \|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho t} + k \int_0^t \xi(\tau) e^{-\rho \int_\tau^t \xi(u) du} d\tau \right) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{\rho} (1 - e^{-\rho \int_0^t \xi(u) du}) \right) \leq \frac{k}{\rho}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим  $|E_0(t) - E_{0,N}(t)|$  для получения второго слагаемого. В любой норме выполняется

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| &= \\ &= \left\| \int_0^t U_N(t, \tau) (A(\tau) - A_N(\tau)) \mathbf{p}(\tau) d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_N = \begin{pmatrix} u_{00}^N & \dots & u_{0N}^N & 0 & 0 & \dots \\ u_{10}^N & \dots & u_{1N}^N & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & & & \\ u_{N0}^N & \dots & u_{NN}^N & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & \dots & & & \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (A - A_N)\mathbf{p} &= (0, \dots, 0, -\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}, \\ &\quad \lambda_N p_N - (\lambda_{N+1} + \mu_{N+1} + \xi) p_{N+1} + \\ &\quad + \mu_{N+2} p_{N+2}, \dots)^T \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} U_N (A - A_N)\mathbf{p} &= \\ &= \begin{pmatrix} u_{0N}^N (-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}) \\ u_{1N}^N (-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}) \\ \vdots \\ u_{NN}^N (-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}) \\ \lambda_N p_N - (\lambda_{N+1} + \mu_{N+1} + \xi) p_{N+1} + \mu_{N+2} p_{N+2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом неравенств  $u_{ij}^N(t, \tau) \geq 0$  (при всех  $i, j, t, \tau$ ) и равенств  $\sum_i u_{ij}^N(t, \tau) = 1$  (при всех  $j, t, \tau$ ) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|U_N(A - A_N)p\|_{1E} &= \\ &= |-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}| \sum_{n \leq N} n u_{nN}^N + \\ &+ \sum_{n \geq N} (n+1) |\lambda_n p_n - (\lambda_{n+1} + \mu_{n+1} + \xi) p_{n+1} + \\ &+ \mu_{n+2} p_{n+2}| \leq (2\lambda + 2\mu + \xi) \left( \sum_{n \geq N} n p_n + \sum_{n \geq N} p_n \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое уже оценено:  $\sum_{n \geq N} p_n \leq e^{8t}/2^N$ .

Рассмотрим первое слагаемое и оценим его аналогичным способом, учитывая, что  $2\lambda(t) - \mu(t) \leq 25$ ,

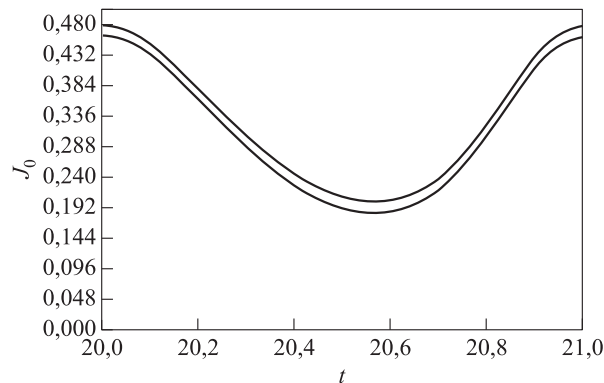
$$\begin{aligned} \frac{d(\sum_{n \geq 1} n p_n)}{dt} &\leq \\ &\leq \lambda(t) p_0 + (\lambda(t) - \mu(t)) \sum_{n \geq 1} p_n - \xi(t) \sum_{n \geq 1} n p_n \leq \\ &\leq (\lambda(t) - \mu(t)) \frac{e^{8t}}{2^N} + \lambda(t) \frac{e^{8t}}{2^N} \leq \frac{25e^{8t}}{2^N}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|U_N(A - A_N)p\|_{1E} &\leq \\ &\leq (2\lambda(t) + 2\mu(t) + \xi(t)) \frac{e^{8t}}{2^N} \left( \frac{25}{8} + 1 \right) \end{aligned}$$

и получаем

$$|E_0(t) - E_{0,n}(t)| \leq \frac{174}{2^N} \int_0^t e^{8\tau} d\tau \leq \frac{22e^{8t}}{2^N}.$$



**Рис. 1** Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(\bar{X}(t) = 0)$  для случая 1. Среднее значение по периоду приближенно равно 0,319

Для построения предельного среднего невозмущенного процесса с точностью  $10^{-8}$  выбираем  $N = 341$ ,  $t \in [26, 27]$ , положив при этом  $\rho = 0,9$ ;  $k = 50$ .

Далее, в оценках устойчивости (6) и (10) теорем 1 и 2 получаем, выбирая  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ ,

$$\|p(t) - \bar{p}(t)\| \leq 6\varepsilon \int_0^t e^{-\int_\tau^t \xi(u) du} d\tau \leq 6\varepsilon e^{1/\pi}$$

и

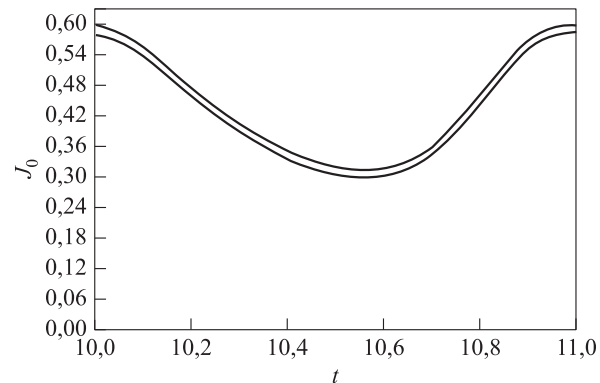
$$\begin{aligned} |E_p(t) - \bar{E}_p(t)| &\leq \\ &\leq \left( \frac{6\varepsilon k}{\rho} + k\varepsilon \right) \int_0^t e^{-\int_\tau^t (\rho\xi(u) - 6\varepsilon) du} d\tau \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon k(\rho + 6)}{\rho(\rho - 6\varepsilon)} e^{\rho/\pi} \end{aligned}$$

соответственно.

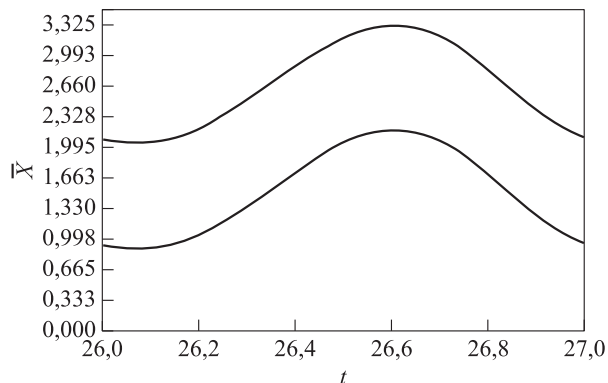
Пусть теперь при тех же интенсивностях поступления и обслуживания клиентов  $\lambda_{n-1}(t) = \lambda(t) = 5 + 5 \sin 2\pi t$ ,  $\mu_n(t) = \mu(t) = 5 + 5 \cos 2\pi t$  интенсивность катастрофы  $\xi(t) = 2 + 2 \sin 2\pi t$  вдвое больше.

Тогда тем же образом проверяется, что для получения требуемой точности предельного режима достаточно взять  $N = 127$ ,  $t \in [10, 11]$ , а для построения предельного среднего —  $N = 155$ ,  $t \in [13, 14]$ . При этом выписанные оценки устойчивости заведомо также выполнены.

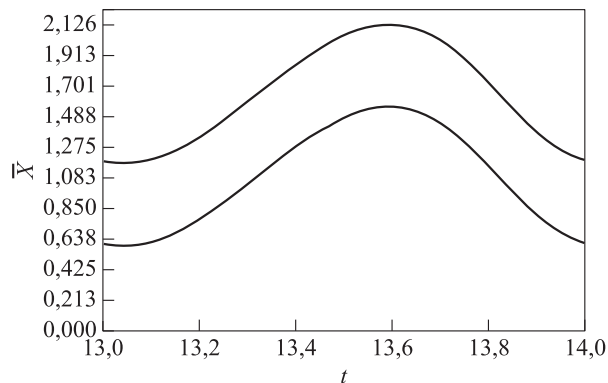
Интересно сравнить построенные ниже предельные характеристики рассмотренных примеров (рис. 1–4).



**Рис. 2** Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(\bar{X}(t) = 0)$  для случая 2. Среднее значение по периоду приближенно равно 0,433



**Рис. 3** Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса (случай 1). Среднее значение по периоду — оно же двойное среднее — приближенно равно 2,100



**Рис. 4** Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса (случай 2). Среднее значение по периоду — оно же двойное среднее — приближенно равно 1,357

## Литература

1. Dudin A., Nishimura S. A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // J. Appl. Probab., 1999. Vol. 36. P. 868–881.
2. Krishna Kumar B., Arivudainambi D. Transient solution of an M/M/1 queue with catastrophes // Comput. Math. Appl., 2000. Vol. 40. P. 1233–1240.
3. Dudin A., Karolik A. BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Perform. Eval., 2001. Vol. 45. P. 19–32.
4. Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M. On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 329–347.
5. Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M. A note on birth-death processes with catastrophes // Statist. Probab. Lett., 2008. Vol. 78. P. 2248–2257.
6. Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V. Some bounds for  $M(t)/M(t)/S$  queue with catastrophes // 4th Conference (International) on Performance Evaluation Methodologies and Tools Proceedings. Athens, Greece, October 20–24, 2008.
7. Зейфман А. И., Сатин Я. А., Чегодаев А. В. О нестационарных системах обслуживания с катастрофами // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 47–54.
8. Зейфман А. И., Сатин Я. А., Коротышева А. В., Терешина Н. А. О предельных характеристиках системы обслуживания  $M(t)/M(t)/S$  с катастрофами // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 16–22.
9. Zeifman A., Satin Ya., Shorgin S., Bening V. On  $M_n(t)/M_n(t)/S$  queues with catastrophes // 4th Conference (International) on Performance Evaluation Methodologies and Tools Proceedings. Pisa, Italy, October 19–23, 2009.
10. Zeifman A. I. Stability for continuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math., 1985. Vol. 1155. P. 401–414.
11. Zeifman A. Stability of birth and death processes // J. Mathematical Sciences, 1998. Vol. 91. P. 3023–3031.
12. Андреев Д., Елесин М., Кузнецов А., Крылов Е., Зейфман А. Эргодичность и устойчивость нестационарных систем обслуживания // Теория вероятностей и математическая статистика, 2003. Т. 68. С. 1–11.
13. Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А. Марковские цепи и модели с непрерывным временем. — М.: Элекс-КМ, 2008.
14. Granovsky B., Zeifman A. The N-limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains // Appl. Stoch. Models in Business and Industry, 2000. Vol. 16. P. 235–248.
15. Granovsky B., Zeifman A. Nonstationary queues: Estimation of the rate of convergence // Queueing Syst., 2004. Vol. 46. P. 363–388.
16. Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G. Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing Syst., 2006. Vol. 52. P. 139–151.
17. Enikeeva F., Kalashnikov V., Rusaitite D. Continuity estimates for ruin probabilities // J. Scand. Actuarial, 2001. No. 1. P. 18–39.
18. Islam M. A. A birth-death process approach to constructing multistate life tables // Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series), 2003. Vol. 26. P. 101–108.
19. Ching W.-K., Ng M. K. Markov chains: Models, algorithms and applications. International ser. in operations research & management science. — N.Y.: Springer, 2006.
20. Зейфман А. И. О нестационарной модели Эрланга // Автоматика и телемеханика, 2009. Вып. 12. С. 71–80.

# БАЙЕСОВСКИЕ МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ: ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ $M|M|1|\infty^*$

А. А. Кудрявцев<sup>1</sup>, С. Я. Шоргин<sup>2</sup>

**Аннотация:** Данная работа продолжает ряд статей, посвященных байесовским моделям массового обслуживания и надежности. В работе рассматриваются вероятностные характеристики среднего числа заявок в системе  $M|M|1|\infty$  в условиях рандомизации параметров входящего потока и обслуживания. Обсуждается интерпретация получаемых результатов с учетом возможной несобственности распределения среднего числа заявок.

**Ключевые слова:** байесовский подход; системы массового обслуживания; надежность; смешанные распределения; моделирование; несобственное распределение; «дефектное» распределение

## 1 Основные предположения и обозначения

Подробное изложение основ байесовского подхода к моделированию систем массового обслуживания (СМО) и ненадежных восстанавливаемых систем, а также результаты вычисления основных вероятностных характеристик коэффициентов загрузки и готовности системы  $M|M|1|0$ , входные параметры которой не известны исследователю в точности (известно лишь их априорное распределение), можно найти в работах [1–6].

Основным предположением в рамках данного подхода для моделей  $M|M|1$  является рандомизация интенсивностей входящего потока  $\lambda$  и обслуживания  $\mu$ . При этом, естественно, становится случайной и загрузка рассматриваемой системы  $\rho = \lambda/\mu$ , от значения которой, в частности, зависит наличие стационарного режима у рассматриваемой системы. Кроме того, величина  $\rho$  входит во многие формулы, описывающие характеристики разнообразных СМО. В статье рассматривается одна из таких характеристик, а именно среднее число заявок в системе  $M|M|1|\infty$

$$N = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

В дальнейшем изложении будем предполагать, что входные параметры системы стохастически не-

зависимы и имеют вырожденное ( $D$ ), равномерное ( $R$ ), экспоненциальное ( $M$ ), Эрланга ( $E$ ) распределение. В скобках будем указывать соответствующие параметры распределения, например обозначение  $D(a)$  будет соответствовать вырожденному в точке  $a$  распределению.

## 2 Функция распределения и плотность

Будем обозначать функции распределения случайных величин  $\rho$  и  $N$  соответственно

$$\left. \begin{aligned} F_\rho(x) &= P(\rho < x); \\ F_N(x) &= P(N < x) = F_\rho\left(\frac{x}{1+x}\right), \quad x > 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

Обозначим через  $f_\rho(x)$  и  $f_N(x)$  соответствующие плотности. Очевидно,

$$f_N(x) = \frac{1}{(1+x)^2} f_\rho\left(\frac{x}{1+x}\right), \quad x > 0. \quad (2)$$

Для удобства дальнейшего изложения приведем таблицу функций распределения коэффициента загрузки  $\rho$  при различных распределениях интенсивностей входящего потока  $\lambda$  и обслуживания  $\mu$ . Представленные результаты опубликованы авторами в работах [3, 5, 6]. (Для представления функции

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 08-07-00152-а, 08-01-00567-а и 09-07-12032-офи-м. Статья написана на основе материалов доклада, представленного на IV Международном семинаре «Прикладные задачи теории вероятностей и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем» (зимняя сессия, Аоста, Италия, январь–февраль 2010 г.).

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, nubigena@hotmail.com

<sup>2</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru



**Таблица 1** Функция распределения коэффициента загрузки  $\rho$

$\lambda$	$\mu$	$F_\rho(x), x > 0$
$D(\lambda)$	$M(\alpha)$	$e^{-\alpha\lambda/x}$
$D(\lambda)$	$E(n, \alpha)$	$e^{-\alpha\lambda/x} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\alpha\lambda)^m}{x^m m!}$
$M(\theta)$	$D(\mu)$	$1 - e^{-\mu\theta x}$
$M(\theta)$	$M(\alpha)$	$\frac{\theta x}{\alpha + \theta x}$
$M(\theta)$	$E(n, \alpha)$	$1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \theta x}\right)^n$
$E(k, \theta)$	$D(\mu)$	$1 - e^{-\mu\theta x} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\mu\theta x)^m}{m!}$
$E(k, \theta)$	$M(\alpha)$	$\left(\frac{\theta x}{\alpha + \theta x}\right)^k$
$E(k, \theta), k \geq 2$	$E(n, \alpha), n \geq 2$	$\left(\frac{\theta x}{\alpha + \theta x}\right)^{n+k-1} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\theta x}\right)^m$

распределения Эрланга с параметрами  $k$  и  $\mu\theta$  в случае, когда  $\lambda$  имеет распределение  $E(k, \theta)$ , а  $\mu - D(\mu)$ , использована формула 3.351.1 из [7].

Как известно (см., например, [8]), при классической постановке задачи величину  $N$  имеет смысл рассматривать только в случае  $\rho < 1$  (в противном случае  $N = \infty$ ). При байесовском подходе нельзя однозначно сказать, какое значение примет величина  $\rho$ , а следовательно, априори нельзя сделать и точных выводов о том, будет ли система переполняться. Вполне естественно, что основную роль в прогнозах, касающихся среднего числа заявок  $N$ , будет играть величина

$$\delta = P(\rho \geq 1) = 1 - F_\rho(1). \quad (3)$$

При этом, если не выполнено условие  $P(\lambda < \mu) = 1$ , величина  $\delta$  будет положительной. В этом случае функция распределения рандомизированного среднего числа заявок в системе будет отделена от единицы на величину  $\delta$ . Другими словами,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_N(x) = 1 - \delta. \quad (4)$$

При рассмотрении распределений, обладающих свойством (4), возможны два подхода. Согласно первому (см., например, [9]) предполагается, что случайная величина  $N$  может принимать бесконечное значение с положительной вероятностью. В этом случае  $N$  называется расширенной случайной величиной. Согласно второму подходу (см. [10]) делается предположение, что «масса» распределения случайной величины  $N$  строго меньше

единицы. При этом само распределение называется несобственным или «дефектным», но предположений о возможном бесконечном значении соответствующей случайной величины, по сути, не делается. Заметим, что для исследователя зачастую более удобен второй подход к данной проблеме, поскольку, например, математическое ожидание расширенной случайной величины всегда равняется бесконечности, в то время как математическое ожидание «дефектной» случайной величины, рассматриваемое как координата центра масс системы, масса которой меньше единицы, может быть конечным числом.

Следуя терминологии [10], назовем величину  $\delta$ , определенную в (3), «дефектом» системы.

Приведем значения величины «дефекта»  $\delta$  для байесовских СМО при различных предположениях об априорных распределениях интенсивностей  $\lambda$  и  $\mu$ . Применяя формулу (3) к выражениям из табл. 1, получим результаты, показанные в табл. 2.

Аналогично, зная вид функции распределения коэффициента загрузки  $\rho$  и воспользовавшись формулами (1) и (2), несложно получить выражения для функции распределения и плотности случайной величины  $N$ . Не будем останавливаться здесь на результатах, полученных для распределений  $\lambda$  и  $\mu$ , заданных в табл. 1, поскольку они не существенны для дальнейшего изложения и получаются тривиальной заменой переменных.

Далее приведем важный пример системы с нулевым «дефектом». В силу постулируемой независимости случайных величин  $\lambda$  и  $\mu$  обеспечить

**Таблица 2** Значения величины «дефекта»  $\delta$

$\lambda$	$\mu$	$\delta$
$D(\lambda)$	$M(\alpha)$	$1 - e^{-\alpha\lambda}$
$D(\lambda)$	$E(n, \alpha)$	$1 - e^{-\alpha\lambda} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\alpha\lambda)^m}{m!}$
$M(\theta)$	$D(\mu)$	$e^{-\mu\theta}$
$M(\theta)$	$M(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\alpha + \theta}$
$M(\theta)$	$E(n, \alpha)$	$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \theta}\right)^n$
$E(k, \theta)$	$D(\mu)$	$e^{-\mu\theta} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\mu\theta)^m}{m!}$
$E(k, \theta)$	$M(\alpha)$	$1 - \left(\frac{\theta}{\alpha + \theta}\right)^k$
$E(k, \theta), k \geq 2$	$E(n, \alpha), n \geq 2$	$1 - \frac{\theta^{k+1}(\theta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{(\theta - \alpha)(\theta + \alpha)^{n+k-1}}, \alpha \neq \theta$ $1 - \frac{n}{2^{n+k-1}}, \alpha = \theta$

выполнение условия  $P(\lambda < \mu) = 1$  может лишь определенное взаимное расположение носителей соответствующих распределений.

Пусть случайные величины  $\lambda$  и  $\mu$  имеют равномерные распределения  $R(a_\lambda, b_\lambda)$  и  $R(a_\mu, b_\mu)$ , соответственно, причем  $0 < a_\lambda < b_\lambda < a_\mu < b_\mu$ . Очевидно, что «дефект»  $\delta$  такой системы равняется нулю.

В работе [3] были приведены формулы для функции распределения и плотности коэффициента загрузки  $\rho$  для случая  $a_\lambda/a_\mu < b_\lambda/b_\mu$ . Воспользуемся этими результатами и формулами (1) и (2). Обозначим

$$c_\lambda = (b_\lambda - a_\lambda)^{-1} \text{ и } c_\mu = (b_\mu - a_\mu)^{-1}.$$

После несложных арифметических преобразований получаем

$$F_N(x) = 0, \text{ если } x < a_\lambda/(b_\mu - a_\lambda);$$

$$F_N(x) = \frac{c_\lambda c_\mu}{2} \left( b_\mu \sqrt{\frac{x}{1+x}} - a_\lambda \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right)^2$$

если  $\frac{a_\lambda}{b_\mu - a_\lambda} \leq x \leq \frac{a_\lambda}{a_\mu - a_\lambda}$ ;

$$F_N(x) = c_\lambda \left( \frac{(b_\mu + a_\mu)x}{2(1+x)} - a_\lambda \right),$$

если  $\frac{a_\lambda}{a_\mu - a_\lambda} \leq x \leq \frac{b_\lambda}{b_\mu - b_\lambda}$ ;

$$F_N(x) = c_\lambda c_\mu \left( \frac{b_\lambda(1+x)}{x} - a_\mu \right) \times$$

$$\times \left( \frac{b_\lambda}{2} + \frac{a_\mu x}{2(1+x)} - a_\lambda \right) + c_\mu \left( b_\mu - \frac{b_\lambda(1+x)}{x} \right),$$

если  $\frac{b_\lambda}{b_\mu - b_\lambda} \leq x \leq \frac{b_\lambda}{a_\mu - b_\lambda}$ ;

$$F_N(x) = 1, \text{ если } x > b_\lambda/(a_\mu - b_\lambda).$$

Соответствующая плотность будет иметь вид:

$$f_N(x) = 0, \text{ если } x < a_\lambda/(b_\mu - a_\lambda) \text{ и } x > b_\lambda/(a_\mu - b_\lambda);$$

$$f_N(x) = \frac{c_\lambda c_\mu}{2} \left( \frac{b_\mu^2}{(1+x)^2} - \frac{a_\lambda^2}{x^2} \right),$$

если  $\frac{a_\lambda}{b_\mu - a_\lambda} \leq x \leq \frac{a_\lambda}{a_\mu - a_\lambda}$ ;

$$f_N(x) = \frac{c_\lambda(b_\mu + a_\mu)}{2(1+x)^2},$$

если  $\frac{a_\lambda}{a_\mu - a_\lambda} \leq x \leq \frac{b_\lambda}{b_\mu - b_\lambda}$ ;

$$f_N(x) = \frac{c_\lambda c_\mu(2b_\lambda a_\lambda - b_\lambda^2)}{2x^2} - \frac{c_\lambda c_\mu a_\mu^2}{2(1+x)^2} + \frac{c_\mu b_\lambda}{x^2},$$

если  $\frac{b_\lambda}{b_\mu - b_\lambda} \leq x \leq \frac{b_\lambda}{a_\mu - b_\lambda}$ .

Аналогичные результаты можно получить для случая  $a_\lambda/a_\mu \geq b_\lambda/b_\mu$ .

### 3 Моментные характеристики

Как упоминалось в разд. 2, вопрос о существовании математического ожидания среднего числа заявок  $N$  существенным образом зависит от величины «дефекта» системы  $\delta$ . В случае  $\delta > 0$  математическое ожидание, понимаемое в классическом смысле, всегда равняется бесконечности.

Однако можно рассмотреть аналог математического ожидания — координату центра масс системы, масса которой равняется  $1 - \delta$ . Обозначим эту характеристику  $\hat{E}N$ . Формально имеет место следующее определение:

$$\hat{E}N = \frac{1}{F_N(\infty)} \int_0^{\infty} x dF_N(x).$$

Заметим, что в случае нулевого «дефекта»  $\hat{E}N$  совпадает с  $EN$  и, по сути, является условным математическим ожиданием  $\hat{E}N = E(N | \rho < 1)$ .

Соотношения (1), (3) и (4) дают возможность привести цепочку тождеств, позволяющих записать  $\hat{E}N$  при помощи различных характеристик системы:

$$\begin{aligned} \hat{E}N &= \frac{1}{F_N(\infty)} \int_0^{\infty} (F_N(\infty) - F_N(x)) dx = \\ &= \frac{1}{1 - \delta} \int_0^{\infty} (1 - \delta - F_N(x)) dx = \\ &= \frac{1}{F_\rho(1)} \int_0^{\infty} \left( F_\rho(1) - F_\rho\left(\frac{x}{1+x}\right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{F_\rho(1)} \int_0^1 \frac{F_\rho(1) - F_\rho(x)}{1-x} \frac{dx}{1-x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее выражение в (5) показывает, что в абсолютно непрерывном случае для существования  $\hat{E}N$  необходимо, чтобы плотность  $f_\rho(x)$  в некоторой окрестности  $(1 - \varepsilon, 1]$  убывала к нулю при  $y \rightarrow 1$  быстрее, чем  $(1 - y)^p$  для некоторого  $p \in (0, 1)$ . Приведем пример такого распределения с положительным «дефектом».

Пусть

$$f_\rho(x) = \frac{3}{4} |1 - x|^{1/2}, \quad x \in [0, 2].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{E}N &= \frac{1}{F_\rho(1)} \int_0^{\infty} x dF_\rho\left(\frac{x}{1+x}\right) = \\ &= \frac{1}{F_\rho(1)} \int_0^1 \frac{y f_\rho(y)}{1-y} dy = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1-y}} = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y}} - \frac{3}{2} \int_0^1 \sqrt{1-y} dy = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае получена некоторая конечная моментная характеристика распределения случайной величины  $N$ , при этом математическое ожидание «дефектного» распределения  $N$  бесконечно.

Несмотря на то что подобный подход может давать дополнительную информацию о распределении среднего числа заявок  $N$ , ограничение на поведение плотности коэффициента загрузки  $\rho$  в окрестности единицы является столь существенным, что для всех распределений интенсивностей входящего потока  $\lambda$  и обслуживания  $\mu$ , приведенных в табл. 1, как несложно убедиться, будут получаться бесконечные значения для  $\hat{E}N$ . По этой причине необходимо привлечение иных методов изучения интересующего нас распределения. Об одном из таких методов речь пойдет в следующем разделе.

В заключение данного раздела рассмотрим пример «недефектного» распределения, для которого существуют классические моментные характеристики.

Пусть случайные величины  $\lambda$  и  $\mu$  имеют распределения  $R(a_\lambda, b_\lambda)$  и  $R(a_\mu, b_\mu)$  соответственно ( $0 < a_\lambda < b_\lambda < a_\mu < b_\mu$ ,  $a_\lambda/a_\mu < b_\lambda/b_\mu$ ). Воспользовавшись полученной в разд. 2 формулой для плотности  $f_N(x)$  и соотношениями

$$\int_A^B \frac{x dx}{(1+x)^2} = \ln \frac{1+B}{1+A};$$

$$\int_A^B \frac{x^2 dx}{(1+x)^2} = B + \frac{1}{1+B} - A - \frac{1}{1+A} - 2 \ln \frac{1+B}{1+A};$$

получим

$$\begin{aligned} EN &= \int_0^{\infty} x f_N(x) dx = \frac{c_\lambda c_\mu b_\mu^2}{2} \ln \frac{a_\mu(b_\mu - a_\lambda)}{b_\mu(a_\mu - a_\lambda)} - \\ &\quad - \frac{c_\lambda c_\mu a_\lambda^2}{2} \ln \frac{b_\mu - a_\lambda}{a_\mu - a_\lambda} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{c_\lambda c_\mu (b_\mu^2 - a_\mu^2)}{2} \ln \frac{b_\mu (a_\mu - a_\lambda)}{a_\mu (b_\mu - b_\lambda)} + \\
 & + \frac{c_\lambda c_\mu}{2} \left( 2b_\lambda a_\lambda - b_\lambda^2 + 2\frac{b_\lambda}{c_\lambda} \right) \ln \frac{b_\mu - b_\lambda}{a_\mu - a_\lambda} - \\
 & - \frac{c_\lambda c_\mu a_\mu^2}{2} \ln \frac{a_\mu (b_\mu - b_\lambda)}{b_\mu (a_\mu - a_\lambda)} = \\
 & = \frac{c_\lambda c_\mu}{2} [(b_\mu^2 - a_\lambda^2) \ln(b_\mu - a_\lambda) - \\
 & - (a_\mu^2 - a_\lambda^2) \ln(a_\mu - a_\lambda) + (a_\mu^2 - b_\lambda^2) \ln(a_\mu - b_\lambda) - \\
 & - (b_\mu^2 - b_\lambda^2) \ln(b_\mu - b_\lambda)] .
 \end{aligned}$$

Аналогично получаем выражение для второго момента

$$\begin{aligned}
 EN^2 &= \int_0^\infty x^2 f_N(x) dx = \\
 &= c_\lambda c_\mu \left( a_\mu^2 \ln \frac{a_\mu - a_\lambda}{a_\mu - b_\lambda} - b_\mu^2 \ln \frac{b_\mu - a_\lambda}{b_\mu - b_\lambda} \right) .
 \end{aligned}$$

Таким образом, в данном примере существуют не только математическое ожидание и дисперсия, но и моменты любого порядка.

## 4 Квантильные характеристики

Вполне традиционным методом «борьбы» с несуществующим математическим ожиданием является рассмотрение такой характеристики центра

распределения, как медианы. Заметим, что при изучении систем с положительным «дефектом» опять сталкиваемся с возможной неопределенностью этого объекта. Действительно, для собственной функции распределения квантиль любого порядка существует. Однако для «дефектных» функций распределения существенным является значение величины  $\delta$ , поскольку определены лишь квантили порядка  $q \in (0, 1 - \delta)$ . Соответствующее замечание относится и к квантильному аналогу дисперсии — интерквартильному размаху.

В табл. 3 приведены значения квантилей  $x_q$  порядка  $q \in (0, 1)$  функций распределения среднего числа заявок  $N$  для распределений интенсивностей входящего потока  $\lambda$  и обслуживания  $\mu$ , рассмотренных авторами в работах [3, 5, 6] и отображенных в табл. 1.

При нахождении медианы  $x_{1/2}$  необходимо выполнение условия  $\delta < 1/2$  (см. табл. 2), а интерквартильный размах  $x_{3/4} - x_{1/4}$  определен лишь при  $\delta < 1/4$ .

Обозначим через  $y(q, n)$  и  $z(q, k, n)$  соответственно решения уравнений

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{y^m}{m!} = qe^y ; \quad \sum_{m=0}^{n-1} z^m = q(z+1)^{n+k-1} . \quad (6)$$

Так же как и в случае с моментными характеристиками, не составляет труда найти квантили любого порядка для распределения с нулевым «дефектом». Например, если входные параметры  $\lambda$  и  $\mu$  имеют равномерные распределения, заданные

**Таблица 3** Значения квантилей  $x_q$  распределения  $N$

$\lambda$	$\mu$	$x_q, 0 < q < 1 - \delta$
$D(\lambda)$	$M(\alpha)$	$-\frac{\alpha\lambda}{\ln q + \alpha\lambda}$
$D(\lambda)$	$E(n, \alpha)$	$\frac{\alpha\lambda}{y(q, n) - \alpha\lambda}$ (см. (6))
$M(\theta)$	$D(\mu)$	$-\frac{\ln(1-q)}{\mu\theta + \ln(1-q)}$
$M(\theta)$	$M(\alpha)$	$\frac{\alpha q}{\theta - (\theta + \alpha)q}$
$M(\theta)$	$E(n, \alpha)$	$\frac{\alpha((1-q)^{-1/n} - 1)}{\theta - \alpha((1-q)^{-1/n} - 1)}$
$E(k, \theta)$	$D(\mu)$	$\frac{y(1-q, k)}{\mu\theta y(1-q, k)}$ (см. (6))
$E(k, \theta)$	$M(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\theta q^{-1/k} - \theta - \alpha}$
$E(k, \theta), k \geq 2$	$E(n, \alpha), n \geq 2$	$\frac{\alpha}{\theta z(q, k, n) - \alpha}$ (см. (6))

в разд. 2, квантиль порядка  $q$  для распределения  $N$  находится из решения уравнения  $F_N(x) = q$ . Так, при

$$\frac{a_\lambda(b_\mu - a_\mu)}{2a_\mu(b_\lambda - a_\lambda)} \leq q \leq \frac{b_\mu b_\lambda + a_\mu b_\lambda - 2a_\lambda b_\mu}{2b_\mu(b_\lambda - a_\lambda)}$$

квантиль порядка  $q$  равняется

$$x_q = \frac{2a_\lambda(1 - q) + 2b_\lambda q}{b_\mu + a_\mu - 2a_\lambda(1 - q) - 2b_\lambda q}.$$

Аналогично находятся квантили при

$$0 < q < \frac{a_\lambda(b_\mu - a_\mu)}{2a_\mu(b_\lambda - a_\lambda)}$$

и

$$\frac{b_\mu b_\lambda + a_\mu b_\lambda - 2a_\lambda b_\mu}{2b_\mu(b_\lambda - a_\lambda)} < q < 1.$$

## Литература

1. Шоргин С. Я. О байесовских моделях массового обслуживания // II Научная сессия Института проблем информатики РАН: Тез. докл. — М.: ИПИ РАН, 2005. С. 120–121.
2. D'Apice C., Manzo R., Shorgin S. Some Bayesian queueing and reliability models // Electronic J. Reliability: Theory & Applications, 2006. Vol. 1. No. 4.
3. Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовский подход к анализу систем массового обслуживания и показателей надежности // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. Вып. 2. С. 76–82.
4. Kudryavtsev A., Shorgin S., Shorgin V., Chentsov V. Bayesian queueing and reliability models // Systems and means of informatics: Spec. issue: Mathematical and computer modeling in applied problems. — М.: IPI RAN, 2008. P. 40–53.
5. Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: экспоненциально-эрланговский случай // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 44–48.
6. Кудрявцев А. А., Шоргин В. С., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: общий эрланговский случай // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 4. С. 30–34.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. 529 с.
9. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980. 576 с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. Т. 2. 752 с.

# СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НАИМЕНЬШЕЙ ДЛИНОЙ ОЧЕРЕДИ

С. С. Матвеева<sup>1</sup>, Т. В. Захарова<sup>2</sup>

**Аннотация:** Статья посвящена исследованию свойств оптимальных размещений по критерию средней суммарной длины очереди в пространстве для систем с дисциплиной обслуживания FIFO. Рассматривается поток однородных требований, различающихся лишь моментами поступления в систему. Станции представляют собой системы массового обслуживания типа  $M|G|1$ . В статье дается описание свойств оптимальных размещений, показаны алгоритмы построения асимптотически оптимальных размещений, минимизирующих критерий оптимальности.

**Ключевые слова:** асимптотически оптимальное размещение; средняя суммарная длина очереди; критерий оптимальности

## 1 Введение

В статье рассмотрена сеть массового обслуживания, для которой ищется размещение станций обслуживания, минимизирующее среднюю суммарную длину очереди. Обслуживание заявок в ней производится территориально распределенными объектами. В связи с этим возникают задачи нахождения оптимального или близкого к оптимальному размещения станций обслуживания. На практике задачи подобного рода довольно актуальны. Среди них задача размещения автозаправочных станций для увеличения прибыльности их функционирования, задачи минимизации транспортных расходов или времени. Спецификой изучаемого класса систем является необходимость использования информации о положении обслуживающих приборов, положении и числе поступающих вызовов, а при некоторых дисциплинах обслуживания — и других характеристик. В данном случае рассматривается модель, в которой станции обслуживания могут быть расположены в произвольных точках некоторого пространства, а вызовы являются реализацией некоторой случайной величины, у которой известна плотность распределения. Расстояние между точками пространства определяется чебышевской нормой. Сами станции функционируют как независимые системы массового обслуживания типа  $M|G|1$  с дисциплиной обслуживания FIFO.

Точные формулы для решений задач подобного рода удается получить лишь в исключительных ситуациях. Однако часто, применяя различные асим-

птотические методы, можно получить удовлетворительное для практики асимптотическое решение задачи. В статье приводятся алгоритмы построения асимптотически оптимальных размещений, минимизирующих критерий оптимальности, а также исследуются свойства оптимальных размещений по критерию средней суммарной длины очереди.

В работе [1] была изучена аналогичная постановка задачи, но с вызовами, распределенными на плоскости. В настоящей статье решается задача с вызовами, распределенными в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , которая обобщается на случай пространства произвольной размерности.

## 2 Постановка задачи

В пространстве  $\mathbb{R}^3$  возникают требования в случайных точках  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , независимых и одинаково распределенных с плотностью распределения  $p$ . Для обслуживания этих требований имеется  $n$  станций. Моменты поступления требований образуют пуассоновский поток с параметром  $\lambda$ . Интенсивность входящего потока  $\lambda$  изменяется с ростом числа станций  $n$ . В случае, когда нужно подчеркнуть эту зависимость, параметр входящего потока будем обозначать  $\lambda(n)$ .

**Определение 1.** *Размещением  $n$  станций обслуживания в пространстве  $\mathbb{R}^3$  назовем множество точек пространства  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , в которых они расположены.*

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики, petkin@mail.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики, lsa@cs.msu.su

Обозначать размещение станций будем символом  $x$ , т. е.  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Станцию обслуживания и точку пространства, где она расположена, будем обозначать одним и тем же символом.

**Определение 2.** *Зоной влияния станции  $x_i$  назовем множество  $C_i$  тех точек пространства, для которых эта станция является ближайшей:*

$$C_i = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v - x_i\| \leq \|v - x_j\|, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Расстояние  $\|u - v\|$  между точками  $u$  и  $v$  пространства  $\mathbb{R}^3$  задается чебышевской нормой:

$$\|u - v\| = \max_{1 \leq i \leq 3} |u_i - v_i|, \\ u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3).$$

Станции обслуживают заявки только из своих зон влияния. Обслуживание осуществляется прибором,двигающимся только по прямой и с постоянной скоростью. При поступлении заявки прибор со станции перемещается в точку вызова, заявка обслуживается некоторое случайное время  $\eta$ , затем прибор возвращается обратно на станцию. Дисциплина обслуживания следующая: если в момент поступления вызова прибор занят, то поступающий вызов ставится в очередь. После освобождения прибора на обслуживание поступает первая заявка из очереди.

Обозначим через  $\lambda_i$  интенсивность потока вызовов, поступающих на станцию  $x_i$ ,  $\beta_{i1}, \beta_{i2}$  — соответственно первый и второй моменты времени обслуживания на  $x_i$ .

Предполагается, что станции функционируют как независимые системы массового обслуживания типа  $M|G|1$ , тогда их средняя суммарная длина очереди  $L(x)$  при размещении  $x$  и условии, что загрузка каждой станции меньше единицы, т. е.  $\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \beta_{i1} < 1$ , определяется по формуле

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{2} \frac{\beta_{i2}}{1 - \lambda_i \beta_{i1}}.$$

Задача заключается в нахождении размещений, минимизирующих введенный критерий оптимальности  $L(x)$ .

**Определение 3.** *Размещение  $x^*$  назовем оптимальным, если  $L(x^*) \leq L(x)$  для любого размещения  $x$  такого, что  $|x| = |x^*|$ . Через  $|x|$  здесь обозначено число элементов размещения  $x$ .*

**Определение 4.** *Размещение  $x$  такое, что при  $|x| = |x^*|$  выполняется равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(x)}{L(x^*)} = 1,$$

назовем асимптотически оптимальным.

Введем еще ряд обозначений:

$$E\eta = \beta_1, \quad E\eta^2 = \beta_2;$$

$$C_1 = \iiint_O \|u\| du_1 du_2 du_3;$$

$$C_2 = \iiint_O \|u\|^2 du_1 du_2 du_3,$$

где  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $O$  — шар единичного объема с центром в нуле. Можно вычислить точные значения констант:  $C_1 = 3/8$ ;  $C_2 = 3/20$ .

Норму плотности распределения вызовов определим как

$$|p|_m = \left( \iiint p^m(u) du_1 du_2 du_3 \right)^{1/m}.$$

Число станций оптимального размещения, попадающих в множество  $A$ , обозначим  $x_A^* = x^* \cap A$  и  $\{x\}$  — последовательность размещений.

### 3 Свойства оптимальных размещений

В первой теореме описываются асимптотические свойства оптимальных размещений для исходной модели. Для краткости далее везде под интегралом понимается многомерный интеграл Лебега в соответствующем пространстве.

**Теорема 1.** *Если плотность  $p$  — ограниченная, интегрируемая по Лебегу функция,  $E|\xi|^2 < \infty$  и интенсивность входящего потока  $\lambda(n) = o(n)$ , то для всякой последовательности оптимальных размещений  $\{x^*\}$  справедливы равенства:*

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 0,5\beta_2;$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_A^*|}{n} = \int_A p(u) du,$$

где  $A$  — измеримое по Лебегу множество пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Рассмотрим модель, в которой обслуживание состоит только лишь в перемещении прибора со станции до точки, где возникло требование, и обратно. В этом случае оптимальные размещения обладают другими свойствами.

**Теорема 2.** Если плотность  $p$  ограничена,  $p^{3/4}$  интегрируема по Лебегу,  $E|\xi|^2 < \infty$  и интенсивность входящего потока требований изменяется так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(n)}{n^{4/3}} = 0,$$

то для всякой последовательности оптимальных размещений  $\{x^*\}$

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/3}}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 2C_2 |p|_{3/4}^2;$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_A^*|}{n} = |p|_{3/4}^{-3/4} \int_A p^{3/4}(u) du$

для любого измеримого по Лебегу множества  $A$  пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Результаты теоремы 1 обобщаются на пространство  $\mathbb{R}^N$ .

**Теорема 3.** Если плотность  $p$  — ограниченная, интегрируемая по Лебегу функция,  $E|\xi|^2 < \infty$  и интенсивность входящего потока  $\lambda(n) = o(n)$ , то для всякой последовательности оптимальных размещений  $\{x^*\}$  справедливы равенства

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 0,5\beta_2;$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_A^*|}{n} = \int_A p(u) du,$

где  $A$  — измеримое по Лебегу множество пространства  $\mathbb{R}^N$ .

В случае, когда  $E\eta = 0$ , результаты в пространстве  $\mathbb{R}^N$  выглядят следующим образом.

**Теорема 4.** Если плотность  $p$  ограничена,  $p^{N/(N+1)}$  интегрируема по Лебегу,  $E|\xi|^2 < \infty$  и интенсивность входящего потока требований изменяется так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(n)}{n^{(N+1)/N}} = 0,$$

то для всякой последовательности оптимальных размещений  $\{x^*\}$

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{(N+2)/N}}{\lambda^2(n)} L(x^*) = \frac{0,5N}{N+2} |p|_{N/(N+1)}^2;$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_A^*|}{n} = |p|_{N/(N+1)}^{-N/(N+1)} \int_A p^{N/(N+1)}(u) du$

для любого измеримого по Лебегу множества  $A$  пространства  $\mathbb{R}^N$ .

## 4 Доказательства для пространства $\mathbb{R}^3$

В работе [2] представлено доказательство следующих двух лемм.

**Лемма 1.** Если  $Q$  — измеримое по Лебегу подмножество метрического пространства,  $S$  — шар с центром в точке  $v$  из того же пространства, а меры Лебега множеств  $Q$  и  $S$  равны, то

$$\int_Q a(\|u - v\|) du \geq \int_S a(\|u - v\|) du$$

для любой неубывающей на  $[0, \infty)$  действительной функции  $a(u)$ .

Следующая лемма является аналогом результатов Л. Ф. Тота [3].

**Лемма 2.** Пусть  $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ , обозначает шар с центром в нуле,  $\sigma_n$  — шар с центром в нуле и мерой  $\sigma_n = (1/n) \sum_{i=1}^n S_i$ . Справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^n \int_{S_i} a(\|u\|) du \geq n \int_{\sigma_n} a(\|u\|) du$$

для любой неубывающей на  $[0, \infty)$  действительной функции  $a(u)$ .

Следующую лемму нам достаточно доказать для случая, когда плотность  $p$  — простая функция, т. е.  $p = \sum_{j=1}^r p_j \mathbf{1}_{K_j}$ , где  $K_j$  — измеримые по Лебегу непересекающиеся множества.

**Лемма 3.** Если  $E\eta = 0$ ,  $\lambda(n) = o(n^{4/3})$ , то для любой последовательности оптимальных размещений  $\{x^*\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 0.$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $\lambda^{-2}L(x^*) \geq 0$ . Оценим сверху  $L(x^*)$ . Построим размещение  $x^0$  следующим образом. Для  $K_j$  выберем приближающее его с точностью  $\varepsilon$  элементарное множество  $L_j$ . Затем  $L_j$  заменим конгруэнтными кубами объемом  $\sigma_j = K_j/m_j$ , где

$$m_j = m(1 - \delta) \frac{K_j}{r}, \quad \sum_{i=1}^r K_i$$

$m$  — некоторое натуральное число,  $0 < \delta < 1$ .



Если  $\mu(\sigma_j \cap K_j) > 0$ , то в центр  $\sigma_j$  помещается станция обслуживания. Число таких  $\sigma_j$  обозначим через  $n_j$ .  $([m\delta] + 1)$  станций разместим равномерно на множествах  $(K_j \setminus L_j) \cap K$ , где  $K$  — наименьший куб с центром в нуле, содержащий в себе носитель плотности  $p$ . Полученное размещение обозначим через  $x^0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Для оптимального размещения  $x^*$  справедливы неравенства

$$0 \leq \frac{1}{\lambda^2} L(x^*) \leq \frac{1}{\lambda^2} L(x^0) \leq \sum_{j=1}^r n_j \frac{p_j^2 \sigma_j^2 \cdot 2C_2 \sigma_j^{2/3}}{1 - \lambda p_j \sigma_j \cdot 2C_1 \sigma_j^{1/3}} + o(n^{-5/3}),$$

$$\frac{1}{\lambda^2} L(x^*) \leq O(n^{-5/3}),$$

так как  $\lambda p_j \sigma_j^{4/3} = o(1)$  и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r n_j p_j^2 \sigma_j^{8/3} &= \sum_{j=1}^r p_j^2 K_j \sigma_j^{5/3} (1 + o(1)) = \\ &= \sum_{j=1}^r p_j^2 K_j \cdot K_j^{5/3} m_j^{-5/3} (1 + o(1)) = \\ &= (1 + o(1)) \left( \sum_{j=1}^r p_j^2 K_j \right) \left( \sum_{j=1}^r K_j \right)^{5/3} n^{-5/3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 0. \quad \square$$

Пусть  $G$  — некоторый компакт на носителе плотности  $p$ ,  $D_n(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam} A_i$ ,  $A_i = \{u \in A'_i : p(u) > 0\}$ ,  $A'_i$  — зона влияния  $x_i$  на компакте  $G$ .

**Лемма 4.** Если для размещения  $\{x\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x) = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = 0.$$

**Доказательство.** Предположим, что  $\limsup_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = d > 0$ . Выберем подпоследовательность размещений такую, что для некоторой станции  $y_n$  из  $n$ -го размещения этой подпоследовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = d$ , где  $u_n, v_n \in C_n$ ;  $C_n = \{u \in C'_n : p(u) > 0\}$ ;  $C'_n$  — зона влияния станции  $y_n$  на  $G$ .

Ввиду компактности  $G$  без ограничения общности можно считать, что  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $u_n \rightarrow u_0$ ,  $v_n \rightarrow v_0$ .

Пусть  $\|u_0 - y_0\| \geq d/2$ . Это означает, что лишь конечное число размещений из выбранной подпоследовательности имеет станции в  $d/4$ -окрестности точки  $u_0$ . Через  $R$  обозначим  $d/8$ -окрестность точки  $u_0$ . Поскольку  $u_0$  является предельной точкой  $C_0$  и  $C_0$  — подмножество носителя плотности, то для некоторого  $\varepsilon > 0$

$$\int_R p(u) du > \varepsilon.$$

Оценим снизу значение критерия  $L$  на размещениях, не имеющих станций в  $d/4$ -окрестности точки  $u_0$ . Поскольку в нашем случае  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , то второй момент времени обслуживания  $i$ -й заявки

$$\beta_{i2} = \frac{4}{P(C_i)} \int_{C_i} \|u - x_i\|^2 p(u) du.$$

Так как загрузка на каждой станции обслуживания меньше 1, то

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{2} \frac{\beta_{i2}}{1 - \lambda_i \beta_{i1}} \geq 0,5 \lambda^2 \sum_{i=1}^n P^2(C_i) \beta_{i2} = \\ &= 2 \lambda^2 \sum_{i=1}^n P(C_i) \int_{C_i} \|u - x_i\|^2 p(u) du. \end{aligned}$$

Учитывая, что на множестве  $R$   $\|u - x_i\| > d/8$  для любого  $i$  на выбранном размещении, а также выпуклость функции  $f(u, v) = uv$ , имеем

$$\begin{aligned} L(x) &\geq 2 \lambda^2 \sum_{i=1}^n P(C_i) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \|u - x_i\|^2 p(u) du \geq \\ &\geq 2 \lambda^2 \frac{1}{n} \left( \frac{d}{8} \right)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{n}{\lambda^2(n)} L(x) \geq \frac{\varepsilon d^2}{32}.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x) > 0,$$

что противоречит условию леммы.

Поэтому  $d = 0$ .  $\square$

Последняя лемма показывает, что на носителе плотности распределения вызовов диаметры зон влияния на любом компакте стремятся к нулю на последовательности оптимальных размещений.

Для случая  $E\eta > 0$  также справедливы соответствующие леммы, доказательство которых сходно с доказательством лемм 3 и 4.

**Лемма 5.** Если  $E\eta > 0$ ,  $\lambda(n) = o(n)$ , то для любой последовательности оптимальных размещений  $\{x^*\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 0.$$

**Лемма 6.** Если для последовательности размещений  $\{x\}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2(n)} L(x) = 0$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = 0.$$

Доказательство теоремы 1. Для любой станции  $x_i$  с зоной влияния  $C_i$  некоторого размещения  $x$  первые два момента времени обслуживания оцениваются как

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= E((2\|\xi - x_i\| + \eta) | \xi \in C_i) \geq E\eta = \beta_1; \\ \beta_{i2} &= E((2\|\xi - x_i\| + \eta)^2 | \xi \in C_i) \geq E\eta^2 = \beta_2, \end{aligned}$$

а интенсивность потока поступающих на нее требований есть  $\lambda_i = \lambda(n)P(C_i)$ .

С учетом этого, а также выпуклости функции  $f(u, v) = u^2(1 - v)^{-1}$ , оценим снизу критерий  $L(x)$ .

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{2} \frac{\beta_{i2}}{1 - \lambda_i \beta_{i1}} \geq \\ &\geq 0,5\lambda^2\beta_2 \sum_{i=1}^n \frac{P^2(C_i)}{1 - \lambda\beta_1 P(C_i)} \geq \\ &\geq 0,5\lambda^2\beta_2 \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n P(C_i) \right)^2 \left( 1 - \lambda\beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(C_i) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) \geq 0,5\beta_2 \left( 1 - \frac{\lambda\beta_1}{n} \right)^{-1}.$$

Устремляя  $n$  к бесконечности, получим

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) \geq 0,5\beta_2.$$

Получим теперь верхнюю оценку. Предположим сначала, что плотность  $p$  — простая функция,  $p = \sum_{j=1}^r p_j \mathbf{1}_{K_j}$ , где  $K_j$  — измеримые по Лебегу непесекающиеся множества.

Для такой плотности построим асимптотически оптимальное размещение  $x$ , т. е. такое, что при  $|x| = |x^*|$  выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(x)}{L(x^*)} = 1.$$

Для этого каждое множество  $K_j$  заменим элементарным множеством  $L_j$  таким, что  $\mu(K_j \Delta L_j) < \varepsilon$ , затем  $L_j$  заместим конгруэнтными кубами, пересекающимися лишь по границе, и объемом  $\sigma_j = K_j/m_j$ , где  $m_j = m(1 - \delta)p_j K_j$ ;  $m$  — некоторое натуральное число и  $0 < \delta < 1$ .

Если  $\mu(\sigma_j \cap L_j) > 0$ , то в центр куба  $\sigma_j$  помещается станция. Пусть  $n_j$  — число таких станций. Поскольку размещение станций реализуется на компакте, можно построить наименьший куб  $K$ , который содержит в себе полностью носитель плотности  $p$ .  $([m\delta] + 1)$  станций разместим равномерно на множествах  $(K_j \setminus L_j) \cap K$ . Тем самым получим некоторое размещение  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ , для которого

$$\begin{aligned} L(x) &\leq \\ &\leq \sum_{j=1}^r n_j \frac{\lambda^2 p_j^2 \sigma_j^2}{2} \frac{\beta_2 + 4\beta_1 C_1 \sigma_j^{1/3} + 4C_2 \sigma_j^{2/3}}{1 - \lambda\beta_1 p_j \sigma_j - 2\lambda C_1 p_j \sigma_j^{4/3}} = \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^r \frac{\beta_2 p_j K_j n^{-1} + o(n^{-1})}{1 - \lambda\beta_1 n^{-1} + o(n^{-1})}. \end{aligned}$$

Устремляя  $m$ , а тем самым и  $n$  к бесконечности, получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x) \leq 0,5\beta_2.$$

Так как всегда  $L(x^*) \leq L(x)$ , то с учетом нижней оценки для  $L(x^*)$  получаем, что  $x$  — асимптотически оптимальное размещение и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 0,5\beta_2.$$

Пусть  $p$  — произвольная функция, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы. Введем простые функции  $\bar{p}_k(u)$  по правилу  $\bar{p}_k(u) = (m + 1)/k$ , если  $m/k < p(u) \leq (m + 4)/k$  для  $k \in \mathcal{N}$ ,  $m = 0, 1, \dots$

Очевидно, что  $p(u) \leq \bar{p}_k(u)$ , а для простых функций уже была получена предельная оценка сверху, поэтому справедливо следующее неравенство:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) \leq 0,5\beta_2 |\bar{p}_k|_1.$$

При  $k \rightarrow \infty$   $|\bar{p}_k|_0 \rightarrow |p|_1 = 1$ . И с учетом оценки снизу для  $L(x^*)$  получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 0,5\beta_2.$$

Докажем второй пункт теоремы 1.

Рассмотрим размещение  $x_A = x \cap A$ . Пусть  $k = |x_A|$  — число станций, попадающих в множество  $A$  при размещении  $x$ . Определим  $L(x_A)$  как  $L(x)$  для  $p\mathbf{1}_A$ .

$$\begin{aligned} L(x_A) &= \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i^2}{2} \frac{\beta_{i2}}{1 - \lambda_i \beta_{i1}} \geq \\ &\geq 0,5\lambda^2 \beta_2 \sum_{i=1}^k \frac{P^2(C_i \cap A)}{1 - \lambda \beta_1 P(C_i \cap A)} \geq \\ &\geq 0,5\lambda^2 \beta_2 \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^k P(C_i \cap A) \right)^2 \left( 1 - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \beta_1 \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(C_i \cap A) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

значит

$$\frac{k}{\lambda^2(n)} L(x_A) \geq 0,5\beta_2 P^2(A) \left( 1 - \frac{\lambda \beta_1 P(A)}{k} \right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda^2(n)} L(x_A) \geq 0,5\beta_2 P^2(A).$$

Пусть  $\gamma_1$  — предельная точка последовательности  $\{|x_A| n^{-1}\}$ .

Пусть теперь  $x$  — асимптотически оптимальное размещение для критерия  $L$ , тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^2(n)} L(x_A) \leq 0,5\beta_2 P(A).$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\gamma_1 \geq P(A).$$

Пусть  $\gamma_2$  — предельная точка последовательности  $\{|x_B| n^{-1}\}$ , где  $B = A^c$ .

Для  $\gamma_2$  аналогично доказывается соответствующее неравенство

$$\gamma_2 \geq P(B).$$

Так как

$$1 = \gamma_1 + \gamma_2 \geq P(A) + P(B) = 1,$$

то в неравенстве достигнуто равенство. Это возможно только, если

$$\gamma_1 = P(A), \quad \gamma_2 = P(B).$$

Тем самым для любого асимптотически оптимального размещения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_A|}{n} = \int_A p(u) du,$$

а, значит, это равенство верно и для оптимального размещения. Отсюда следует утверждение второго пункта теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Сначала оценивается значение критерия  $L(x)$  снизу

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/3}}{\lambda^2(n)} L(x^*) \geq 2C_2 p_{3/4}^2.$$

Для оценки сверху  $L(x^*)$  строится асимптотически оптимальное размещение  $x$ , алгоритм построения которого несколько иной.

Выберем последовательность вложенных расширяющихся кубов  $K$  с центром в нуле таких, что  $E|\xi|^2 \mathbf{1}_{K^c} = o(m^{-2})$ .

Предположим сначала, что плотность  $p$  — простая функция, определенная так же, как и ранее.

Для каждого  $K_j$  выберем элементарное множество  $L_j$ , чтобы

$$\mu(K_j \Delta L_j) < \varepsilon/K, \quad \forall j.$$

Каждое множество  $L_j$  покрываем правильной решеткой объемом  $\sigma_j = K_j/m_j$ , где

$$m_j = m(1 - \delta) \frac{p_j^{3/4} K_j}{\sum_i p_i^{3/4} K_i},$$

$m$  — некоторое натуральное число и  $0 < \delta < 1$ .

Если  $\mu(\sigma_j \cap L_j) > 0$ , то в центры таких  $\sigma_j$  помещаем станцию обслуживания. Число таким образом размещенных станций обозначим через  $n_j$ .  $([m\delta] + 1)$  станций разместим равномерно на множествах  $(K_j \setminus L_j) \cap K$ .

Общее число размещенных станций обозначим через  $n$ . Тем самым получим некоторое размещение  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ , для которого с учетом леммы 4 справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} L(x) &\leq \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^r n_j \frac{p_j^2 \sigma_j^{8/3} 4C_2}{1 - 2\lambda C_1 p_j \sigma_j^{4/3}} + \\ &\quad + p_j^2 (m\delta)^{-5/3} \varepsilon + o(m^{-5/3}) = \\ &= \lambda^2 2 C_2 (1 + o(1)) \sum_{j=1}^r \frac{p_j^{3/4} K_j}{1 + o(1)} \left( \sum_{i=1}^r p_i^{3/4} K_i \right)^{5/3} \times \\ &\quad \times (n(1 - \delta))^{-5/3} + O(\varepsilon n^{-5/3}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/3}}{\lambda^2(n)} L(x) \leq 2C_2 |p|_{3/4}^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/3}}{\lambda^2(n)} L(x^*) = 2C_2 |p|_{3/4}^2.$$

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, полученный результат можно обобщить на случай произвольной (в рамках ограничений доказываемой теоремы) плотности  $p$ .

Доказательство второго пункта проводится так же, как и в теореме 1.

## 5 Заключение

В предлагаемой работе исследованы асимптотические свойства оптимальных размещений для исходной модели, описано поведение критерия на последовательности оптимальных размещений, найдена предельная оптимальная плотность. Для наглядности подробные доказательства приведены для случая трехмерного пространства, одна-

ко полученные результаты можно обобщить на случай пространства произвольной конечной размерности. Интересно отметить, что при  $\beta_1 > 0$  предельная плотность размещений не зависит от размерности пространства и эквивалентна, в некотором смысле, плотности распределения вызовов.

Полученные результаты носят не только теоретический, но и практический характер и могут быть применены для изучения реальных систем. Найденные алгоритмы построения асимптотически оптимальных размещений допускают реализацию на программном уровне.

## Литература

1. Захарова Т. В. Размещение систем массового обслуживания, минимизирующее среднюю длину очереди // Информатика и её применения, 2008. Т. 2. Вып. 1. С. 63–66.
2. Захарова Т. В. Оптимизация расположения станций обслуживания в пространстве // Информатика и её применения, 2008. Т. 2. Вып. 2. С. 41–46.
3. Том Ф. Л. Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: ГИФМЛ, 1958.

# ОБ ОЦЕНИВАНИИ АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШОГО УКЛОНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ РЕГЕНЕРАТИВНОЙ ОЧЕРЕДИ С ОДНИМ ПРИБОРОМ\*

А. В. Бородина<sup>1</sup>, Е. В. Морозов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Оценивание классическими методами имитационного моделирования (малых) вероятностей таких нежелательных событий, как потеря/разрушение данных, переполнение буфера, конфликт сообщений в современных телекоммуникационных сетях, требует неприемлемо больших затрат времени и вычислительных ресурсов. Однако точные аналитические результаты известны лишь для сравнительно узкого класса систем и сетей обслуживания. Это вызывает необходимость развития как асимптотических методов анализа, так и ускоренных методов имитационного моделирования для оценивания вероятностей событий указанного выше типа. В данной статье недавно разработанный авторами метод ускоренного имитационного моделирования, основанный на расщеплении траекторий регенеративного процесса, применяется для оценивания вероятностей превышения стационарным процессом очереди/нагрузки высокого уровня. Это позволяет существенно упростить и ускорить построение оценки показателя экспоненты в асимптотическом представлении вероятности большого отклонения в случае, когда время обслуживания имеет конечную логарифмическую функцию моментов (так называемый легкий хвост). Приведены результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** асимптотика больших отклонений; одноканальная система обслуживания; стационарное время ожидания; метод расщепления; ускоренное оценивание

## 1 Введение

Проблема получения эффективных статистических оценок *вероятностей редких событий* хорошо известна [1, 2]. В контексте данной статьи *задача оценивания малых вероятностей* (порядка  $10^{-9}$  и меньше) связана в первую очередь с областью телекоммуникационных технологий, систем и сетей обслуживания, где такими событиями являются, например, отказ устройства, потеря данных из-за переполнения буфера, разрушение данных при попытке передачи из-за конфликта, связанного с разделением передающего канала, и т. п. Однако аналогичная проблема не менее актуальна и для многих других областей. Для оценивания малых вероятностей требуется специальный подход, поскольку аналитические результаты можно получить, как правило, лишь для ограниченного класса простых моделей, а применение классических методов имитационного моделирования (прямой метод Монте-Карло (МК) и его модификации) неэффективно. Действительно, для построения оценки  $\hat{\gamma}$  (выборочного среднего) малой вероятности  $\gamma$  с

заданной точностью с помощью метода МК требуется неприемлемо большое число наблюдений  $N$ , а значит, и время моделирования. Это связано с тем, что при фиксированном  $N$  относительная ошибка оценивания  $\Lambda(\hat{\gamma})$  неограниченно растет с уменьшением оцениваемой вероятности  $\gamma$

$$\Lambda(\hat{\gamma}) := \frac{\sqrt{D\hat{\gamma}}}{E\hat{\gamma}} = \frac{\sqrt{\gamma - \gamma^2}}{\gamma\sqrt{N}} \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma N}} \rightarrow \infty \text{ при } \gamma \rightarrow 0,$$

где  $a \sim b$  означает  $a/b \rightarrow 1$  и учтено, что  $E\hat{\gamma} = \gamma$ . В описанной ситуации альтернативой классическим методам служат методы ускоренного имитационного моделирования. Такие методы позволяют построить искомую оценку, как правило, на несколько порядков быстрее, чем классический метод МК [1, 3].

В данной статье рассматривается ускоренное оценивание параметров асимптотического представления вероятности большого отклонения процесса очереди/нагрузки в стационарной одноканальной системе в случае, когда время обслуживания имеет так называемый *легкий хвост*. Актуальность такого подхода отмечена в работе [4].

\* Работа поддерживается РФФИ, грант 10-07-00017.

<sup>1</sup> Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, borodina@krc.karelia.ru

<sup>2</sup> Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, emorozov@krc.karelia.ru

Основная цель данной статьи состоит в том, чтобы привлечь внимание специалистов по анализу и проектированию телекоммуникационных и вычислительных сетей к возможностям использования ускоренных методов для оценивания параметра асимптотического представления вероятности перегрузки системы обслуживания. Более точно, в работе используется недавно разработанный авторами метод регенеративного расщепления, который является модификацией классического метода расщепления [5–7]. Предлагаемый в данной работе подход опирается на прямое оценивание искомой вероятности без привлечения сложной техники теории больших уклонений (ТБУ). Кроме того, в случае регенерирующего процесса обслуживания получаемые оценки являются состоятельными и асимптотически нормальными [7, 8].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 кратко рассматриваются два основных подхода к ускоренному оцениванию: изменение меры (метод существенной выборки) и многоуровневое расщепление траектории моделируемого процесса. Последний подход включает собственно метод расщепления, метод имитационного моделирования RESTART (REpetitive Simulation Trials After Reaching Thresholds) [9], и модификацию метода расщепления — метод регенеративного расщепления с рандомизированными порогами, который подробно изложен в [7]. В разд. 3 рассматривается асимптотика вероятности больших уклонений стационарного процесса нагрузки/очереди в случае, когда распределение времени обслуживания имеет легкий хвост. В частности, приведен анализ системы Pareto/M/1, где интервалы входного потока имеют распределение Парето. Наконец, в разд. 4 приведены численные результаты применения метода расщепления к оцениванию показателя в асимптотическом представлении вероятности большого уклонения стационарного процесса загрузки в системах M/M/1 и Pareto/M/1.

## 2 Ускоренные методы моделирования

В данном разделе кратко обсуждаются основные методы ускоренного моделирования, применяемые для оценивания вероятностей редких событий как эффективная альтернатива прямому методу МК.

### 2.1 Метод существенной выборки

Метод существенной выборки основан на идее сделать редкое событие  $\{X \in A\}$ , где  $A$  есть некоторое фиксированное множество, более вероятным,

и тем самым ускорить процесс оценивания вероятности  $\gamma := P(X \in A)$  за счет соответствующего изменения исходного распределения  $F$  случайной величины (с.в.)  $X$  [2, 10]. В предположении существования плотности  $f(x) = dF(x)/dx$  имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= \int I(x \in A) f(x) dx = \\ &= \int I(x \in A) \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \tilde{f}(x) dx = E_{\tilde{f}}(I(X \in A)L(X)), \end{aligned}$$

где  $I$  — индикатор,  $L = f/\tilde{f}$  — отношение правдоподобия, а математическое ожидание  $E_{\tilde{f}}$  берется по новой плотности  $\tilde{f}$ . Эта плотность выбирается с целью минимизации дисперсии оценки (построенной по последовательности независимых с.в.  $X_n$ , распределенных, как  $X$ )

$$\hat{\gamma} := \hat{\gamma}_N(\tilde{f}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I(X_n \in A)L(X_n)$$

и так, чтобы  $\tilde{f}(x) > 0$  для всех  $x \in A$ , для которых  $f(x) > 0$ . Новая оценка является несмещенной,  $E_{\tilde{f}}(I(X_n \in A)L(X_n)) = \gamma$ , строго состоятельной, а ее дисперсия равна

$$D(\hat{\gamma}_N(\tilde{f})) = \frac{E_{\tilde{f}}(I(X \in A)L(X))^2 - \gamma^2}{N}.$$

Эффективность метода (сокращение дисперсии оценки и времени оценивания) существенно зависит от выбора  $\tilde{f}$  [1]. Заметим, что выбор  $\tilde{f}(x) = f(x)/\gamma$  при  $x \in A$  (и  $\tilde{f}(x) = 0$ , если  $x \notin A$ ) был бы оптимальным, однако он на практике не применим, так как параметр  $\gamma$  является искомым. Отметим, что найти хорошую плотность  $\tilde{f}$ , как правило, весьма сложно и поэтому использование данного метода не всегда приводит к уменьшению дисперсии.

### 2.2 Стандартный метод расщепления

Впервые метод расщепления был использован в работе [11] для моделирования физических процессов деления частиц, а затем в работах [12, 13] при анализе некоторой простой цепи Маркова.

Проиллюстрируем суть метода на примере одномерного (целочисленного) случайного процесса  $X = \{X_n\}$ , определенного в пространстве  $R_+ = [0, +\infty)$  (что достаточно для приложений, рассматриваемых в данной работе). Пространство  $R_+$  делится на  $M+1$  вложенных подмножеств, границы которых обозначаются  $L_i, i = 0, \dots, M$ , и называются порогами (уровнями). Траектория  $X$  (обычно

стартующая с состояния  $X_0 = 0$ ) расщепляется при достижении некоторого уровня  $L_i$  на несколько траекторий-потомков. При достижении следующего уровня  $L_{i+1}$  каждая из этих траекторий также расщепляется и т. д. Увеличение числа траекторий приводит к повышению частоты достижения искомого редкого множества  $A = \{x : x \geq L_M := L\}$ . Правило остановки траектории зависит от того, какую вероятность нужно оценить. В стандартном методе расщепления каждая траектория: (1) либо продолжается до достижения заданного уровня  $L$  или до возвращения в 0; (2) либо обрывается при завершении процесса моделирования.

Если процесс  $X$  является регенеративным, то алгоритм метода расщепления позволяет построить оценку вероятности достижения процессом уровня  $L$  на цикле регенерации

$$\gamma_c = P(\max_{1 \leq n < \beta} X_n \geq L), \quad (1)$$

где  $\beta$  — длина цикла в предположении, что  $E\beta < \infty$ . Если  $X$  является процессом очереди, изменения которого (в моменты ухода/прихода) равны  $\pm 1$ , то в системе с неограниченным буфером потенциально возможно достижение любого (целочисленного) уровня  $L_i$ . Заметим, что для процессов обслуживания типичным моментом регенерации является достижение состояния 0.

Существуют модификации метода расщепления, в которых траектория может быть прервана при попадании на несколько уровней ниже того, с которого она стартовала. Если вероятность того, что траектория вернется на исходный уровень, упав на несколько уровней ниже, очень мала, то такое *отсечение* траектории несущественно влияет на итоговую оценку [10, 14]. Эффективность метода сильно зависит от выбора как самих уровней, так и от числа расщеплений на каждом уровне, что является основной проблемой, которую надо решать при использовании метода. В работах [3, 14, 15] получены условия оптимального выбора параметров, однако они опираются на искомое значение оцениваемой вероятности. Преимуществом метода расщепления является существенное сокращение времени получения оценки по сравнению с методом МК. Более того, в [14, 15] для марковского процесса показана несмещенность оценки  $\hat{\gamma}$ , а в работе [16] доказаны состоятельность и асимптотическая нормальность оценки  $\hat{\gamma}$  для специального класса марковских процессов, не связанных с системами обслуживания. В монографии [8] также обсуждаются общие условия, при которых оценки, полученные методом расщепления, удовлетворяют центральной предельной теореме.

## 2.3 Метод RESTART

Метод RESTART, предложенный в [9], предназначен для оценивания вероятности

$$\gamma_s = P(X \geq L) \quad (2)$$

превышения стационарной очередью  $X$  в системе обслуживания некоторого фиксированного уровня  $L$ . Основное различие между алгоритмами метода RESTART и метода расщепления состоит в том, что в первом случае все траектории, кроме одной, обрываются при пересечении (сверху вниз) уровня, с которого они стартовали при расщеплении. Далее моделируется только одна, последняя траектория (предполагается, что все траектории пронумерованы), которая расщепляется при пересечении (снизу вверх) любого уровня. В методе расщепления траектории не обрываются, однако расщепление возможно только при пересечении более высоких уровней (по сравнению с уровнем старта). Как и в методе расщепления, свойства оценок в методе RESTART при моделировании немарковских процессов изучены недостаточно.

Необходимо отметить, что метод расщепления был разработан для оценивания вероятности вида (1) и его использование в анализе систем обслуживания ограничивалось исключительно (целочисленным) процессом очереди.

## 2.4 Метод многоуровневого расщепления с рандомизированными порогами

В работах [5, 6, 17–22] предложена модификация метода расщепления, которая позволяет применить результаты теории регенерации при обосновании состоятельности и асимптотической нормальности получаемых оценок. При этом была выявлена зависимость между циклами регенерации, получаемыми путем расщепления, и исследовано ее влияние на ширину доверительного интервала. Регенеративная структура траекторий также позволяет применить стандартный метод расщепления для моделирования процесса незавершенной нагрузки, что приводит, однако, к рандомизации уровней расщепления. Более того, моделирование по циклам регенерации позволяет применить метод расщепления для оценивания стационарной вероятности вида (2) как для процесса очереди, так и для процесса нагрузки.

Данный метод проиллюстрирован ниже на примере одноканальной системы обслуживания  $GI/G/1$  с независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) временами обслуживания  $\{S_n\}$ , н.о.р.

интервалами входного потока  $\{\tau_n\}$  и в предположении стационарности  $\rho := ES/E\tau < 1$ . (Здесь и далее опущен индекс при обозначении типичного элемента последовательности н.о.р. с.в.) Рассмотрим процесс  $\{W_n, n \geq 1\}$ , где  $W_n$  — время ожидания в очереди заявки  $n$ . Последовательность  $\{W_n\}$  является марковской цепью, которая удовлетворяет рекурсии Линдли:

$$W_{n+1} = (W_n + X_n)^+, \quad X_n = S_n - \tau_n, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

При  $\rho < 1$  существует стационарное время ожидания  $W$ , т. е. слабый предел  $W_n \Rightarrow W$ . Используя технику расщепления, покажем, как построить оценку стационарной вероятности превышения (фиксированного) уровня  $x$ , т. е.

$$\gamma_s = P(W > x).$$

В отличие от (целочисленного) процесса очереди (со скачками равными  $\pm 1$ ), процесс  $W$  изменяется в момент прихода заявки  $n$  на величину времени обслуживания  $S_n$ . При моделировании марковской цепи (3) расщепление траектории можно проводить лишь в моменты поступления требований в систему. Таким образом, траектория процесса за один скачок (вверх) может пересечь сразу несколько заданных заранее уровней. Поэтому каждая траектория получает свою собственную систему уровней расщепления, что и означает их рандомизацию. Следовательно, способ построения оценки  $\gamma_s$ , используемый в стандартном методе, в данном случае неприменим.

В работах [6, 22] предложена модификация метода расщепления для моделирования процесса очереди в системе  $M/G/1$  с использованием вложенной цепи Маркова, когда расщепление происходит в моменты ухода заявок, что снова приводит к рандомизации уровней. При этом общее число циклов регенерации остается неизменным и равным  $N = R_0 \cdot \dots \cdot R_M$ , где  $R_i$  — число расщеплений на уровне  $L_i$ . Для моделирования процесса нагрузки  $\{W_n\}$  можно применить аналогичный подход, используя следующее условие расщепления.

**Условие расщепления.** Если в момент прихода заявки траектория, стартующая из области  $G_i = [L_i, L_{i+1})$ , пересекла некоторый уровень  $L_{i+k}$ , то она расщепляется на  $\prod_{j=1}^k R_{i+j}$  траекторий,  $k \geq 1, i+k \leq M$ .

Если при этом условии некоторая траектория между двумя последовательными уходами пересекает (снизу вверх) несколько заранее заданных уровней, то число потерянных траекторий компенсируется, оставляя общее количество расщеп-

лений (циклов регенерации) неизменным и равным  $N$  [6, 21, 22]. В [7] доказана состоятельность и асимптотическая нормальность построенной таким образом оценки стационарной вероятности  $\gamma_s$ .

### 3 Асимптотики для времени обслуживания с легким хвостом

Одной из наиболее актуальных задач при исследовании современных телекоммуникационных систем является оценивание качества сервиса (QoS), что часто сводится к оцениванию исключительно малых вероятностей таких нежелательных событий, как потеря или разрушение данных, отказ передающего канала, переполнение буфера и т. д. Ключевую роль при этом играют процессы очереди и времени ожидания (незавершенной нагрузки). В данном разделе приводятся основные асимптотические соотношения для указанных процессов в одноканальной системе, в которой время обслуживания имеет легкий хвост.

#### 3.1 Основные асимптотические соотношения

Хорошо известно, что если в стационарной системе  $GI/G/1$  время обслуживания  $S$  обладает легким хвостом, т. е. если производящая функция моментов  $Ee^{\theta S} < \infty$  в некоторой положительной окрестности параметра  $\theta = 0$ , то имеет место следующее асимптотическое представление для хвоста распределения стационарной нагрузки  $W$  (см., например, [23]):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log P(W > x) = -\delta, \quad (4)$$

где постоянная  $\delta > 0$ . Таким образом, асимптотика хвоста распределения  $W$  имеет экспоненциальную форму.

Для определения искомого параметра  $\delta$  используется ТБУ и рассматривается предельная нормированная логарифмическая производящая функция моментов

$$\Lambda(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Ee^{\theta \sum_{i=1}^n X_i} \quad (5)$$

в предположении, что предел существует и конечен в некоторой (положительной) окрестности  $\theta = 0$ . Тогда параметр  $\delta$  определяется как

$$\delta = \sup(\theta > 0 : \Lambda(\theta) \leq 0)$$

и является единственным положительным решением уравнения  $\Lambda(\theta) = 0$ . Таким образом, проблема



нахождения функции  $P(W > x)$  в рамках ТБУ сводится к вычислению параметра  $\delta$  с предварительным нахождением предела (5). Кроме весьма специальных случаев (скажем, систем  $M/M/1$ ,  $M/M/m$ ), данная задача не имеет аналитического решения. Это вынуждает строить оценку параметра  $\delta$  на основе оценивания функции  $\Lambda(\theta)$ . Разумеется, последняя проблема также является достаточно сложной.

Стандартный метод расщепления и его регенеративный аналог первоначально были предназначены (и использованы) для расчета стационарной вероятности переполнения системы на цикле регенерации, чему способствовала конструкция расщепления и правило остановки траекторий. В связи со сказанным уместно привести результаты работы [24], где исследована асимптотика вероятности стационарной очереди в  $m$ -канальной системе  $GI/G/m$  на цикле регенерации в предположении, что интервал входного потока  $\tau$  и время обслуживания  $S$  удовлетворяют условиям

$$\rho := \frac{ES}{E\tau} < m, \quad P(\tau > S) > 0$$

и что функция  $\Lambda_S(\theta) := \log Ee^{\theta S} < \infty$  в некоторой (положительной) окрестности  $\theta = 0$  (т. е.  $S$  имеет легкий хвост). Пусть  $\nu_n$  означает число заявок в (стационарной) очереди в момент прихода заявки  $n$  и пусть  $\beta$  — длина цикла регенерации системы. Обозначим через

$$\gamma_c(k) = P\left(\max_{1 \leq l < \beta} \nu_l \geq k\right)$$

вероятность превышения (стационарной) очередью уровня  $k$  на цикле регенерации. Пусть  $\Lambda_\tau(-\theta m) = \log Ee^{-\theta m \tau}$ . Обозначим  $\Lambda(\theta) = \log Ee^{\theta(S-m\tau)}$ . Тогда, очевидно,

$$\Lambda(\theta) = \Lambda_\tau(-\theta m) + \Lambda_S(\theta).$$

В [24] показано, что существует единственное решение  $\delta > 0$  уравнения  $\Lambda(\theta) = 0$  и что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \gamma_c(k) = \Lambda_\tau(-\delta m).$$

За исключением простейших случаев (например, системы  $M/M/m$ , см. [4]), нахождение явного решения  $\delta$  уравнения  $\Lambda(\theta) = 0$ , а тем более функции  $\Lambda_\tau(-m\delta)$ , является неразрешимой задачей. Поэтому прямое ускоренное оценивание вероятностей  $\gamma_c(k)$  на основе регенеративного расщепления с последующим оцениванием параметра  $\delta$  представляется весьма эффективным подходом.

Наблюдения за трафиком современных сетей показывают [25], что время обслуживания  $S$

часто имеет распределение с *тяжелым хвостом* (например, Парето, логнормальное, Вейбулла). Следовательно,  $S$  имеет неограниченную производящую функцию моментов  $Ee^{\theta S} = \infty$  для любого  $\theta > 0$ . Заметим, что в стационарной системе  $GI/G/1$  коэффициент загрузки  $\rho = ES/E\tau < 1$ , поэтому  $P(\tau > 0) > 0$ . Таким образом,  $Ee^{-\theta\tau} > 0$ , поэтому  $\log Ee^{-\theta\tau} > -\infty$ . Следовательно, в стационарной системе  $GI/G/1$ , где время обслуживания имеет тяжелый хвост,

$$\Lambda(\theta) = \log Ee^{\theta S} + \log Ee^{-\theta\tau} = \infty$$

и поэтому использование ТБУ невозможно. В то же время система вида  $GI/M/1$  с распределением входного потока, обладающим тяжелым хвостом, может анализироваться на основе асимптотики ТБУ. Этот вопрос будет обсужден в следующем разделе.

**Замечание 1.** В работе [5] рассматривается проблема оценивания методами ТБУ так называемой эффективной пропускной способности, тесно связанной с параметром  $\delta$ , в тандемной сети, обладающей свойством регенерации.

### 3.2 Анализ системы Pareto/ $M/1$

В этом разделе рассматривается проблема вычисления параметра асимптотики вероятности большого уклонения стационарной очереди в системе Pareto/ $M/1$ , где интервал входного потока имеет распределение Парето (с тяжелым хвостом), а время обслуживания — экспоненциально, т. е. имеет легкий хвост.

Пусть скорость обслуживания равна  $\mu = 1/ES$ , а н.о.р. интервалы входного потока распределены по закону Парето

$$1 - A(x) := P(\tau > x) = x^{-\alpha} \quad x \geq 1, \\ \alpha > 0 \quad (A(x) = 0, \quad x < 1). \quad (6)$$

Отметим, что

$$E\tau = \frac{\alpha}{\alpha - 1} < \infty, \quad \text{если } \alpha > 1;$$

$$D\tau = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} < \infty, \quad \text{если } \alpha > 2.$$

Распределение Парето возникает при моделировании трафиков современных телекоммуникационных систем, причем значение параметра  $\alpha$  часто оказывается в диапазоне  $1 < \alpha < 2$ , когда второй момент соответствующей характеристики является бесконечным [26]. Рассмотрим вложенную марковскую цепь  $\{\nu_n\}$  — последовательность чисел заявок

в системе в моменты, непосредственно предшествующие приходу заявок в систему. Более точно, эта цепь удовлетворяет рекурсии

$$\nu_{n+1} = (\nu_n + 1 - \Delta_n)^+, \quad n \geq 1, \quad (7)$$

где  $\Delta_n$  есть число заявок, обслуженных в течение  $n$ -го интервала входного потока в предположении, что в системе находится неограниченное число заявок. Данное предположение, не меняя динамики процесса очереди, позволяет рассматривать  $\{\Delta_n\}$  как н.о.р. с.в. В соответствии с методами ТБУ для вычисления параметра  $\delta$  в асимптотическом представлении необходимо найти значение производящей логарифмической функции моментов (типичного) приращения  $1 - \Delta$  случайного блуждания, формирующего рекурсию (7), т. е. функцию

$$\Lambda(\theta) = \log \mathbb{E} e^{\theta(1-\Delta)} = \theta + \log \mathbb{E} e^{-\theta\Delta},$$

и затем решить уравнение  $\Lambda(\theta) = 0$ . Очевидно, что

$$\mathbb{E} e^{-\theta\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta k} a_k,$$

где

$$a_k = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} dA(x), \quad k \geq 0.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E} e^{-\theta\Delta} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mu(1+e^{-\theta})x} dA(x) = \mathbb{E}^{-\theta_1\tau},$$

причем параметр  $\theta_1 = \mu(1 + e^{-\theta})$ . Поэтому окончательно получаем

$$\Lambda(\theta) = \theta + \log \mathbb{E}^{-\theta_1\tau}.$$

Таким образом, нахождение параметра асимптотики включает вычисление преобразования Лапласа–Стилтьеса распределения Парето интервала входного потока. В этой связи обсудим трудности вычисления данного преобразования, следуя работам [27, 28]. Так как плотность распределения Парето равна  $f(x) = \alpha x^{-\alpha-1}$ ,  $\alpha > 1$ ,  $x \geq 1$ , ( $f(x) = 0$ ,  $x < 1$ ), то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\theta\tau} &= \alpha \int_1^{\infty} x^{-\alpha-1} e^{-\theta x} dx = \\ &= \alpha \theta^{\alpha} \int_1^{\infty} x^{-\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \theta^{\alpha} \Gamma(-\alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Gamma(-\alpha)$  — полная гамма-функция.

**Замечание 2.** В работе [28] на самом деле рассматривается плотность Парето, имеющая сдвиг переменной  $x$  на значение параметра положения  $x_0$  (в нашем случае  $x_0 = 1$ ), т. е. плотность  $f(x) = \alpha/(x+x_0)^{\alpha+1}$ . В этом случае выражение (8) содержит вместо гамма-функции функцию Уитаккера

$$\begin{aligned} W_{\lambda, \mu}(x) &= \\ &= \frac{x^{\mu+1/2} e^{-x/2}}{\Gamma(\mu - \alpha + 1/2)} \int_0^{\infty} t^{\mu-\lambda-1/2} (1+t)^{\mu+\lambda-1/2} e^{-xt} dt. \end{aligned}$$

После замен  $\lambda = -(\alpha + 1)/2$ ,  $\mu = -\alpha/2$ ,  $x = \theta$  и  $x_0 = 1$  соотношение (8) принимает вид

$$\mathbb{E} e^{-\theta\tau} = \alpha \theta^{(\alpha-1)/2} e^{\theta/2} W_{-(\alpha+1)/2, -\alpha/2}(\theta).$$

Таким образом, преобразование Лапласа–Стилтьеса распределения Парето выражается через известные функции, для которых существуют подробные таблицы, например [29]. Отметим также, что вычисление этих функций возможно с помощью пакетов Maple и Mathematica. Полученный результат дает возможность в принципе находить численное значение преобразования Лапласа–Стилтьеса распределения Парето, однако не позволяет решить обсуждавшуюся выше задачу вычисления параметра  $\delta$ . Таким образом, проведенный анализ показывает, что аналитическое нахождение параметра асимптотики для системы обслуживания с входным потоком Парето невозможно. Это подтверждает важность прямого оценивания параметра асимптотики через ускоренное оценивание вероятности большого отклонения исходного процесса.

### 3.3 Оценивание параметра асимптотики методом расщепления

Поскольку найти в явном виде параметр  $\delta$  в асимптотике (4) с использованием логарифмической производящей функции моментов возможно лишь в простейших случаях (системы  $M/M/1$ ,  $M/M/m$ ), а классический метод МК является неэффективным для оценивания стационарной вероятности  $\gamma_s = P(W > b)$  при больших значениях  $b$ , то представляется естественным применить ускоренный метод расщепления для вычисления показателя экспоненты в асимптотике (4), опираясь на прямое вычисление самой вероятности  $\gamma_s$ . Возможность такого подхода была отмечена в работе [30] в связи с трудностями, возникшими при построении оценки эффективной пропускной способности на основе использования так называемого метода batch-mean [31]. Более точно, можно

использовать метод регенеративного расщепления для построения состоятельной и асимптотически нормальной оценки  $\hat{\gamma}$  вероятности  $\gamma_s$  при различных значениях порогов  $b_1 < \dots < b_n$ . Обозначим через  $\hat{\gamma}_i$  оценку вероятности  $P(W > b_i)$ . В результате получаем последовательность оценок  $\hat{\delta}_i$

$$\hat{\delta}_i = -\frac{\log \hat{\gamma}_i}{b_i} = \delta + C(b_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где слагаемое  $C(b_i) \rightarrow 0$  при  $b_i \rightarrow \infty$ . Поэтому при заданной точности оценивания  $\epsilon > 0$  искомую оценку  $\hat{\delta}$  показателя  $\delta$  можно определить, например, как

$$\hat{\delta} = \min_{k>1} \{\hat{\delta}_k : |\hat{\delta}_{k-1} - \hat{\delta}_k| < \epsilon\}. \quad (10)$$

Определение оптимальной последовательности значений  $b_i$  (например, для минимизации времени моделирования) остается открытой проблемой. Скажем, в примере из следующего раздела последовательность  $b_i$  определяется как арифметическая прогрессия с шагом  $d = 10$ . Поскольку  $\hat{\delta}_i - \delta = C(b_i) \rightarrow 0$ , то (в зависимости от конкретной задачи) оценивание достаточно, видимо, провести лишь для нескольких больших значений порога или даже для одного из них.

Подчеркнем, что предложенный метод опирается на логарифмическую асимптотику (4) и поэтому скорость сходимости  $C(b_i) \rightarrow 0$  существенно зависит от рассматриваемой модели. (В этой связи см. [4].)

## 4 Результаты численного моделирования

В этом разделе приведены результаты численного моделирования и оценивания параметра  $\delta$  при анализе асимптотики большого уклонения величины стационарной нагрузки в системах  $M/M/1$  и  $Pareto/M/1$ . Изучено влияние слагаемого  $C(b_i)$  в (9) на оценку  $\hat{\delta}_i$  параметра  $\delta$ , которая, в свою очередь, вычислялась по формуле (10).

Рассмотрим вначале систему  $M/M/1$  с коэффициентом загрузки  $\rho = \lambda/\mu < 1$ . Хвост распределения стационарного процесса нагрузки  $W$  имеет вид

$$P(W > x) = \rho e^{-(\mu-\lambda)x}, \quad x \geq 0, \quad (11)$$

и поэтому искомый параметр  $\delta = \mu - \lambda$ , а величина  $C(b_i) = -\log \rho/b_i$ . Отметим, что величину  $C(b)$  можно трактовать как *систематическую ошибку оце-*

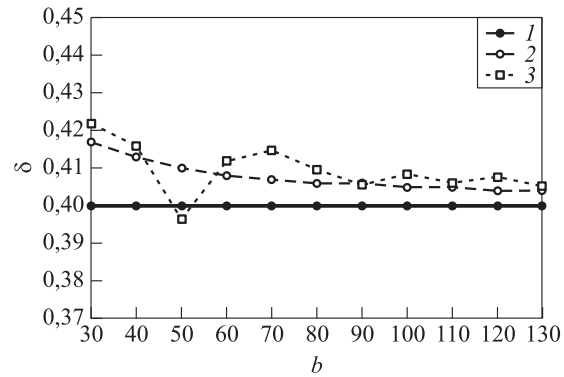


Рис. 1 Зависимость оценки параметра  $\delta$  от величины порога в системе  $M/M/1$  ( $\rho = 0,6$ ;  $\lambda = 0,6$ ;  $\mu = 1$ ): 1 —  $\delta = 0,4$ ; 2 —  $\delta_i$ ; 3 — RS

нивания параметра  $\delta$ , которая стремится к 0 с ростом величины порога. Из (9) следует, что

$$\delta_i = -\frac{\log \rho}{b_i} + \mu - \lambda, \quad i = 1, \dots, n.$$

На рис. 1 приведены результаты вычисления оценок параметра  $\delta$ , полученные путем подсчета вероятности  $P(W > b_i)$  по формуле (11) (обозначены  $\delta_i$ ), а также путем прямого оценивания этой вероятности методом регенеративного расщепления с рандомизированными порогами (RS). Параметры модели выбраны  $\mu = 1$ ,  $\rho = 0,6$ . Полученные оценки также сравниваются с известным значением  $\delta = 0,4$ . В обоих методах использованы значения порогов  $b_1 = 30$ ,  $b_i = b_{i-1} + 10$ ,  $i = 1, \dots, 11$ . Входными данными для алгоритма метода являются: параметры  $\lambda$ ,  $\mu$ , заданное число редких событий, уровень  $b_i$ , промежуточные уровни  $L_j$  (для данного уровня  $b_i$ ), число расщеплений  $R_j$  на каждом уровне  $L_j$ . Условием завершения моделирования считается достижение заданного числа редких событий, а также завершение текущего цикла регенерации. Как отмечено в разд. 2.4, траектория процесса нагрузки расщепляется лишь в моменты прихода требований в систему. Поэтому (в отличие от процесса очереди) попадание на заранее заданные уровни  $L_j$  не гарантировано и эти уровни служат лишь границами зон, внутри которых оказываются действительные (рандомизированные) уровни расщепления траектории. Подробнее см. [5, 7].

Оценка  $\hat{\delta}_i$  строилась по формуле (9), где оценка  $\hat{\gamma}_i$  вероятности  $P(W > b_i)$  вычислялась как выборочное среднее из 100 значений, полученных методом регенеративного расщепления с условием достижения не менее 1000 редких событий. Например, для порога  $b_9 = 110$  оценка  $\hat{\gamma}_9 = 3,9497 \times 10^{-20}$ ,

среднее время моделирования одного значения выборки составило 122 с (на процессоре Pentium(R) D CPU 2,8 ГГц). Отметим, что для уровня  $b_{11} = 130$  оценка вероятности  $\hat{\gamma}_{11}$  имеет порядок  $10^{-23}$  в обоих случаях (см. рис. 1). Метод регенеративного расщепления дает  $\hat{\delta}_{11} = 0,40517$ , при этом  $|\hat{\delta}_{10} - \hat{\delta}_{11}| = 0,0004$ . В то же время по формуле (11) получаем  $\delta_{11} = 0,40393$ ,  $|\delta_{10} - \delta_{11}| = 0,0003$ . Полученные результаты можно считать вполне удовлетворительными.

Методом регенеративного расщепления также проведено оценивание параметра  $\delta$  в асимптотическом представлении вероятности  $P(W > b)$  в системе Pareto/M/1 в предположении, что в формуле (6)  $\alpha = 4$ , а коэффициент загрузки системы  $\rho = 0,75$ . Результаты численного моделирования приведены в табл. 1.

**Таблица 1** Оценки вероятности  $\gamma_s$  и показателя  $\delta$  в системе Pareto/M/1

i	b	$\hat{\gamma}_i$	$\hat{\delta}_i$	$ \hat{\delta}_{i-1} - \hat{\delta}_i $
1	30	$5,4394 \cdot 10^6$	0,4041	—
2	40	$2,9336 \cdot 10^7$	0,3760	0,028
3	50	$5,7565 \cdot 10^9$	0,3795	0,003
4	60	$2,8354 \cdot 10^{11}$	0,4048	0,025
5	70	$6,3413 \cdot 10^{13}$	0,4012	0,004
6	80	$6,9826 \cdot 10^{15}$	0,4074	0,006
7	90	$3,4447 \cdot 10^{16}$	0,3956	0,012
8	100	$2,9986 \cdot 10^{18}$	0,4035	0,008
9	110	$4,0204 \cdot 10^{20}$	0,4060	0,003
10	120	$9,2678 \cdot 10^{22}$	0,4036	0,002
11	130	$2,0886 \cdot 10^{23}$	0,4017	0,002

Значения оценки  $\hat{\gamma}_i$  снова получены по выборке размера 100. Процедура моделирования останавливается после завершения текущего цикла регенерации и при достижении не менее 1000 искомым событий (достижение заданного порога  $b_i$ ). Например, для получения одного значения в выборке при вычислении  $\hat{\gamma}_{11} = 2,0886 \times 10^{-23}$  для порога  $b_{11} = 130$  в среднем была затрачена 301 с. Как видно из табл. 1, для вычисления оценки  $\hat{\delta}$ , скажем с точностью  $\epsilon = 0,002$ , можно использовать значение порога  $b_{10} = 120$ . Отметим, что, как и в системе M/M/1,  $\hat{\delta}_i - \hat{\delta}_{i-1} \rightarrow 0$  с ростом величины порога  $b_i$ , что согласуется с основным теоретическим результатом (4).

## 5 Заключение

В работе предложен метод прямого оценивания параметра асимптотического представления вероятности большого значения стационарного про-

цесса нагрузки и стационарной очереди на основе развитого ранее авторами ускоренного метода регенеративного расщепления. Такой подход может служить альтернативой более сложному методу оценивания на основе теории больших уклонений (использующему предельную производящую функцию моментов) и принципиально более эффективен, чем прямой метод Монте-Карло (с точки зрения необходимого времени моделирования). Как было установлено ранее, оценки, получаемые данным методом для регенеративных систем, являются состоятельными и асимптотически нормальными. Применение метода иллюстрируется численным моделированием систем M/M/1 и Pareto/M/1. Полученные предварительные результаты оценивания дают хорошее согласие с известным аналитическим результатом для системы M/M/1, однако представляется весьма важным дальнейшее обоснование предложенного метода.

## Литература

1. Heidelberg P. Fast simulation of rare events in queuing and reliability models // Performance Evaluation of Computers and Communications Systems. Lecture Notes in Computer Sci., 1993. Vol. 729. P. 165–202.
2. Asmussen S. Applied probability and queues. 2nd ed. — NY: Springer, 2003.
3. Glasserman P., Heidelberg P., Shahabuddin P., Zajic T. A look at multilevel splitting // Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods. Lecture Notes in Statistics, 1996. Vol. 127. P. 99–108.
4. Морозов Е. В. Асимптотики вероятности больших уклонений стационарной очереди // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 23–34.
5. Бородина А. В., Морозов Е. В. Ускоренное регенеративное моделирование вероятности перегрузки односторонней очереди // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2007. Т. 14. Вып. 3. С. 385–397.
6. Бородина А. В., Морозов Е. В. Ускоренное состоятельное оценивание вероятности большой загрузки в системах M/G/1, GI/G/1 // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. — Пермь: Пермский университет, 2007. С. 124–140.
7. Бородина А. В. Регенеративная модификация метода расщепления для оценивания вероятности перегрузки в системах обслуживания: Дис. . . канд. ф.-м. н. — ПетрГУ, 2008.
8. Asmussen S., Glynn P. Stochastic simulation: Algorithms and analysis. — N.Y.: Springer, 2007.
9. Villen-Altamirano M., Villen-Altamirano J. RESTART: A method for accelerating rare event simulations // Queueing, Performance and Control in ATM: 13th Teletraffic Congress (International) Proceedings, 1991. P. 71–76.

10. *Ермаков С. М., Мелас В. Б.* Математический эксперимент с моделями сложных стохастических систем. — СПб.: СПбГУ, 1993. 270 с.
11. *Kahn H., Harris T. E.* Estimation of particle transmission by random sampling // National Bureau of Standards Applied Mathematics Ser., 1951.
12. *Bayes A. J.* Statistical techniques for simulation models // The Australian Computer J., 1970. Vol. 2. No. 4. P. 180–184.
13. *Bayes A. J.* A minimum variance technique for simulation models // J. Association for Computing Machinery, 1972. Vol. 19. P. 734–741.
14. *Glasserman P., Heidelberger P., Shahabuddin P., Zajic T.* Splitting for rare event simulation: analysis of simple cases // 1996 Winter Simulation Conference Proceedings, 1996. P. 302–308.
15. *Garvels M.* The splitting method in rare event simulation. PhD Thesis. — The University of Twente, The Netherlands, 2000.
16. *Cerou T., Guyader A.* Adaptive multilevel splitting for rare event analysis // INRIA, Oct. 2005. Research Report No. 5710.
17. *Бородина А. В., Морозов Е. В.* Доверительное оценивание вероятности переполнения буфера на основе ускоренного регенеративного моделирования системы  $M/M/1$  // Тр. ИПМИ КарНЦ РАН, 2006. Т. 7. С. 125–135.
18. *Borodina A., Morozov E.* Simulation of rare events with speed-up techniques: Splitting and RESTART // Finnish Data Processing Week at the Petrozavodsk State University (FDPW'2005) Proceedings, 2006. Vol. 7. P. 152–173.
19. *Borodina A.* Rare events regenerative estimation of queues based on splitting // Distributed Computer and Communication Networks: Theory and Application (DCCN'2007): International Workshop Proceedings. — Moscow: ИТР RAS, 2007. Vol. 1. P. 50–55.
20. *Бородина А. В.* Влияние зависимости циклов, полученных методом расщепления, при доверительном оценивании вероятности перегрузки в системе  $M/G/1$  // Тр. ИПМИ КарНЦ РАН, 2007. Т. 8. С. 76–83.
21. *Borodina A. V., Morozov E. V.* Speed-up consistent estimation of a high workload probability in  $M/G/1$  queue // Trans. of XXVI Seminar ((International) “Stability Problems for Stochastic Models.” Nahariya, Israel, 2007. Vol. I. P. 36–42.
22. *Borodina A., Morozov E.* A regenerative modification of the multilevel splitting // 7th Workshop (International) on Rare Event Simulation (RESIM 2008) Proceedings. September 24–26. Renn, 2008. P. 276–282.
23. *Glynn P., Witt W.* Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue // J. Appl. Probab., 1994. P. 131–156.
24. *Sadowsky J.* Large deviations theory and efficient simulation of excessive backlogs in a  $GI/GI/m$  queue // IEEE Trans. on Automatic Control, 1991. Vol. 36. No. 12. P. 1383–1394.
25. *Willinger W., Taqqu M., Sherman R., Wilson D.* Self-similarity through high-variability: Statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level // IEEE/ACM Trans. on Networking, 1997. Vol. 5. No. 1. P. 71–86.
26. *Crovella M. E., Bestavros A.* Self-similarity in World Wide Web traffic: evidence and possible causes // IEEE/ACM Trans. on Networking, 1997. Vol. 5. No. 6. P. 835–847.
27. *Starobinski D., Sidi M.* Modeling and analysis of power-tail distributions via classical teletraffic methods // Queueing Systems, 2000. Vol. 36. P. 243–267.
28. *Nadarajah S., Kotz S.* On the Laplace transform of the Pareto distribution // Queueing Systems, 2006. Vol. 54. P. 243–244.
29. *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Table of integrals, series, and products. 6th ed. — San Diego: Academic Press, 2000.
30. *Бородина А., Дюденко И., Морозов Е.* Ускоренное оценивание вероятности переполнения регенеративной очереди // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009. Вып. 4. Т. 16. С. 577–593.
31. *Steiger N. M., Wilson J. R.* An improved batch means procedure for simulation output analysis // Management Science, INFORMS, 2002. Vol. 48. No. 12. P. 1569–1586.

# ПОИСК КОНФЛИКТОВ В ПОЛИТИКАХ БЕЗОПАСНОСТИ: МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ\*

А. А. Грушо<sup>1</sup>, Н. А. Грушо<sup>2</sup>, Е. Е. Тимонина<sup>3</sup>

**Аннотация:** Анализ рисков требует хотя бы приблизительной оценки вероятностей проблемных ситуаций при внедрении политики безопасности (ПБ). Такие оценки можно получить при анализе конфликтов в ПБ с помощью моделей случайных графов. Рассмотрены два примера конфликтов в ПБ и построены модели случайных графов для их исследования. Результаты анализа позволили оценить влияние некоторых параметров случайных графов на вероятность существования конфликтов и на сложность алгоритмов поиска конфликтов в реальных политиках безопасности.

**Ключевые слова:** политика безопасности; угрозы информационной безопасности; математические модели анализа политики безопасности

## 1 Введение

Защита компьютерных систем (КС), как известно, строится на основе ПБ [1–4]. Значительная часть ПБ — это правила ограничения доступа субъектов к объектам [1]. Дискреционная ПБ предполагает, что у каждого объекта существует собственник, который определяет права доступа к своему объекту. Права субъектов  $S$  к объектам  $O$  записываются в виде матрицы контроля доступов (ACL — Access Control List) [2, 3]. Матрица ACL может быть преобразована в ходе работы компьютерной системы [2, 3]. Например, предоставление собственником права читать (*grant read*) позволяет создать копию, которой можно распоряжаться как собственностью. Отсюда возникла возможность непрямого разрешения [5, 6] или неконтролируемого распространения прав доступа, т. е. появилась брешь в информационной безопасности, хотя правила ПБ соблюдаются. О таких ситуациях можно говорить как о конфликтах в ПБ. Поиск конфликтов предполагает исследование множества всех потенциальных доступов во всех множествах состояний КС. Необходима интегральная картина доступности любых субъектов к любым объектам. Такая картина в реальности очень сложна, но определенное представление о ней можно по-

лучить, заменив реальные доступы стохастическим процессом.

## 2 Конфликты неконтролируемого распространения прав доступа

Аналізу моделей дискреционной ПБ посвящено много работ [7–10]. Для того чтобы проанализировать проблемы поиска конфликтов в дискреционной ПБ, авторы обратились к одной из самых первых моделей. В [2] приведено описание известной ранее математической модели распространения прав доступа с помощью операций *take* ( $t$ ), *grant* ( $g$ ) и *create* в КС, где все объекты являются субъектами. В этой классической модели под безопасностью понимается невозможность для произвольного фиксированного субъекта  $P$  получить доступ  $\alpha$  к произвольному фиксированному объекту  $X$  путем преобразования текущей матрицы доступа  $A$  некоторой последовательностью команд в матрицу  $A'$ , где указанный доступ разрешен. Если в матрице доступа  $A$  оставить только команды преобразования (например,  $t$  и/или  $g$ ), то полученной матрице  $G$  можно поставить в соответствие ориен-

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00480. Статья написана на основе материалов доклада, представленного на IV Международном семинаре «Прикладные задачи теории вероятностей и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем» (зимняя сессия, Аоста, Италия, январь–февраль 2010 г.).

<sup>1</sup>Российский государственный гуманитарный университет, Институт информационных наук и технологий безопасности; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, grusho@yandex.ru

<sup>2</sup>Российский государственный гуманитарный университет, Институт информационных наук и технологий безопасности, grusho@yandex.ru

<sup>3</sup>Российский государственный гуманитарный университет, Институт информационных наук и технологий безопасности, eltimon@yandex.ru

тированный граф, где матрица смежности получается из  $G$  заменой допустимых команд на 1, причем эти команды можно рассматривать как метки на дугах графа.

В предположениях этой модели доказаны необходимые и достаточные условия, когда субъект  $y$ , не имея прав доступа  $\alpha$  к субъекту  $x$ , может их получить, используя правила  $t$  и  $g$ . Незаконное получение прав доступа субъектов к объектам в КС — наиболее известный конфликт в дискреционной ПБ.

В работе [11] для проблемы поиска конфликтов при распространении прав доступа к файлам и операционной системе доказаны неразрешимость и в определенных условиях — NP-полнота. В настоящее время эта проблема актуальна в распределенных КС [6, 10].

В более общем случае следует рассматривать наборы множеств субъектов  $A_1, \dots, A_k$  и  $B_1, \dots, B_r$  таких, что некоторая  $(0, 1)$  матрица  $D$  размера  $k \times r$  определяет запреты на доступы субъектов из множеств  $A_1, \dots, A_k$  к субъектам из множеств  $B_1, \dots, B_r$ . В первоначальной матрице ACL таких доступов нет, но это не значит, что не может возникнуть конфликтов в ходе работы КС. Поскольку наборы таких классов субъектов могут быть произвольными, то возникает задача о классификации всех субъектов по доступности друг к другу. Например, как устроено множество субъектов, доступных для любых других, при каких условиях такое множество может существовать и какова его мощность? Как устроены множества субъектов, из которых, используя допустимые правила, можно достигнуть заданного субъекта? В этих общих задачах не всегда нужна конкретика, только общие соображения о том, чего можно ожидать в самых общих предположениях.

Представляют интерес различные приближенные решения задачи поиска конфликтов при распространении прав доступов в условиях, когда число субъектов велико и возможны асимптотические оценки.

В данном разделе рассматривается модель случайного распределения прав изменения матриц ACL. Задача поиска конфликтов в этом случае сводится к поиску путей в случайном графе, который определяется исходя из допущений о непрямом разрешении доступов. Иногда такой подход позволяет оценить трудоемкость поиска конфликтов при использовании различных алгоритмов и указать условия эффективности такого поиска.

Пусть время дискретно и в каждый момент задана матрица ACL. Рассмотрим три способа распространения прав доступов. Предположим, что некоторые субъекты могут брать у других их пра-

ва. Оставим в матрице ACL только субъекты и из всех прав оставим только  $t$ . Заменим  $t$  на 1, получим матрицу смежности ориентированного графа. Таким образом получили последовательность  $t$ -графов. Аналогично строится ориентированный граф, если допустить существование только правила  $g$ , т. е. возможность любого субъекта передавать свои права. Если использовать оба правила ( $t, g$ ), то, как показано ранее (см., например, [2]), распространение прав связано с существованием неориентированных путей в графе, получаемом заменой  $t$  или  $g$  на 1 в матрице ACL и выбрасыванием остальных прав. Необходимо заметить, что подобные графовые модели строятся для других задач компьютерной безопасности. Например, при анализе скрытых каналов или при анализе потенциальных деревьев атак.

Рассмотрим графы с  $N$  вершинами и проблему распространения прав доступов с помощью команды *take*. Для удобства расчетов будем считать, что число исходящих дуг вершины  $x$  равно  $d(x)$ . Рассмотрим задачу при простейшем ограничении  $d(x) = m \geq 2$ . Это значит, что каждая вершина может взять права в точности у  $m$  других вершин. Получение  $x$  запрещенных прав у некоторой вершины  $y$  означает существование ориентированного пути из  $x$  в  $y$ . Предположим, что каждая дуга попадает в любую вершину с вероятностью  $1/N$  независимо от других дуг (петли допускаются исключительно для удобства использования известных результатов). Таким образом определенные случайные ориентированные графы анализировались в работе [12]. Оказывается, что такой случайный ориентированный граф при  $N \rightarrow \infty$ ,  $m = \text{const} \geq 2$  с вероятностью, стремящейся к 1, имеет единственную компоненту сильной связности размера  $(\theta_0/m)N + o(N)$ , где  $\theta_0$  — положительный корень уравнения

$$1 - \frac{\theta}{m} - e^{-\theta} = 0, \quad \frac{\theta_0}{m} > \frac{1}{2}, \quad m \geq 2.$$

Любая вершина орграфа имеет ориентированный путь в эту компоненту, длина которого меньше  $f_N$ , где  $f_N$  — произвольная положительная функция,  $f_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$ . Отсюда можно сделать следующие выводы.

1. Если вершина, у которой необходимо взять нужные права, находится в компоненте сильной связности, то для любой вершины это будет возможно с вероятностью, стремящейся к 1.
2. Некоторые вершины могут быть недоступны сразу для всех других. Число таких вершин с вероятностью, стремящейся к 1, имеет порядок  $(1 - (\theta_0/m))N + o(N)$ . Можно показать, что

максимальная длина подхода к этим вершинам имеет порядок не более чем  $c_0 \ln N$ , где  $c_0 > 1$ . Отсюда следует, что алгоритм проверки защищенности объекта должен вычислять субъекты, способные достичь данный, за  $k c_0 \ln N$  шагов с вероятностью, стремящейся к 1. Тогда можно принять состоятельное (т. е. вероятность ошибки стремится к 0) решение о недоступности объекта из некоторого множества опасных с вероятностью, стремящейся к 1. Такой подход представляет упрощение решения с использованием вероятностных характеристик, т. е. он предлагает упрощение алгоритма поиска всех вершин, имеющих ориентированный путь в данную вершину (с вероятностью, стремящейся к 1). Если это множество строится за более чем  $(1 - \theta_0/m)N$  шагов, то оно (с вероятностью, стремящейся к 1) совпадает с множеством всех объектов. Таким образом, сложность алгоритма поиска конфликта существенно меньше сложности тотального алгоритма построения всех путей в данную вершину.

Для  $g$ -графа и  $m \geq 2$  результаты, относящиеся к структуре случайного графа, интерпретируются аналогично. Вершина может быть доступной для всех других (если ее выбор случаен, то вероятность этого события  $\theta_0/m$ ). Или же она доступна для не более чем  $(1 - \theta_0/m)N$  вершин с вероятностью  $(1 - \theta_0/m)$ . Причем эта доступность (длина пути) не превосходит  $c_0 N$  шагов.

Картина резко меняется при  $m = 1$ . В этой ситуации случайный граф  $t$ -доступа или  $g$ -доступа представляет собой случайное отображение множества всех субъектов в себя. Структуру таких случайных графов исследовал В. Е. Степанов [13]. В таких графах порядка  $(1/2) \ln n$  компонент, в каждой из которых ровно один ориентированный цикл (компонента сильной связности) и из всех других вершин компоненты связности существуют ориентированные пути, максимальная длина которых имеет порядок  $\sqrt{n}$ , в точки цикла этой компоненты. Размер максимальных компонент имеет порядок  $\epsilon n$ ,  $\epsilon < 1$ , а размер минимальных — константа. Всего число точек, принадлежащих циклам, имеет порядок  $\sqrt{n}$ .

В интерпретации поиска конфликтов в  $t$ - или  $g$ -графах получается следующая картина. Если субъекты, пытающиеся получить доступ, и субъекты, у которых доступ первых запрещен, находятся в разных компонентах связности, то конфликта ПБ нет в  $t$ ,  $g$  или  $(t, g)$  доступах. В одной компоненте для всех субъектов доступны субъекты, соответствующие циклическим точкам. Число циклических точек в любой компоненте ограничено величиной порядка  $\sqrt{n}$ . Для максимальных компонент

это пренебрежимо меньше числа всех точек в компоненте. Значит, упрощенного алгоритма поиска запрета на доступ в данном случае нет. Вместе с тем вероятность, что одна случайно выбранная точка будет доступна из другой случайно выбранной точки, стремится к 0.

Рассмотрим случай, когда передача прав возможна, но маловероятна. Построим следующую вероятностную модель случайного графа, описывающего этот случай. Для всех вершин  $x$  исходящие степени  $d(x)$  определяются следующим вероятностным законом

$$P(d(x) = 0) = p.$$

Все вершины можно считать упорядоченными. Тогда вероятность дуги  $(xy)$  равна  $(1 - p)(1/N - 1)$  независимо от появления остальных дуг, а для любого  $k$  вероятность существования фиксированной ориентированной цепочки длины  $k$  равна  $((1 - p)/(N - 1))^{k-1}$ .

Применяя неравенство Маркова, получаем оценку вероятности существования в графе хотя бы одной ориентированной цепочки длины  $k$

$$N(N - 1) \dots (N - k + 1)((1 - p)/(N - 1))^{k-1}.$$

При  $1 - p = o(1/N)$  вероятность появления любой цепочки длины  $k \geq 2$  стремится к 0, т. е. с вероятностью, стремящейся к 1, распространения прав не будет.

### 3 Конфликты неэффективности аудита

Рассмотрим еще один класс конфликтов в политиках безопасности. Начиная с класса  $C_2$  стандарта TCSEC (Trusted Computer System Evaluation Criteria) [1], в ПБ требуется отслеживание действий пользователей в КС. По результатам отслеживания определяются нарушения ПБ. Несмотря на очевидность процедуры отслеживания, быстро выясняется ее неадекватность в некоторых ситуациях.

Приведем следующий пример. Пусть два пользователя  $U_1$  и  $U_2$  имеют легальный доступ к конфиденциальному содержанию объекта  $O$ . Предположим, что некто опубликовал конфиденциальное содержание объекта  $O$ . По данным отслеживания к объекту легально имеют доступ оба пользователя  $U_1$  и  $U_2$ . Однако достоверного выявления виновного эти данные не обеспечивают. Возможность однозначно определить нарушителя безопасности основана на предположении, что только один (случайный) пользователь из двух легальных реально имел доступ к  $O$ .



Обобщим этот пример и построим для него модель случайных графов. Пусть  $S$  — множество субъектов,  $|S| = M$ ,  $O$  — множество объектов,  $|O| = N$ , дуга от субъекта  $S$  к объекту  $O$  означает доступ заданного вида, внесенный в журнал отслеживания действий пользователей. Распределение на дугах случайного графа следующее. Каждый субъект может не обращаться к объектам с вероятностью  $p$  и может обращаться к любому объекту с вероятностью  $(1-p)/N$  независимо от других обращений (дуг). Очевидно, что конфликтная ситуация, состоящая в отсутствии однозначно определенной ответственности для данного объекта, наступает с вероятностью

$$P = \left( (1-p) \frac{1}{N} \right)^2.$$

Отсюда следует, что при  $N \rightarrow \infty$  с вероятностью, стремящейся к 1, в системе не возникает конфликтов с ПБ для данных двух субъектов относительно любого объекта. Конфликта не следует ожидать для любой пары субъектов, если

$$Q = \frac{(1-p)^2}{N} \binom{M}{2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad M \rightarrow \infty.$$

Эта величина является оценкой вероятности конфликта.

Отсюда легко построить упрощенный критерий проверки возможности появления конфликта в данных аудита в течение времени  $T$ . Если суммарное число субъектов, не обратившихся к объектам за время  $T$ , равно  $\nu$ , то оценка  $p = \nu/M$ . Тогда при малых  $Q$  возникновение конфликта ответственности маловероятно. В противном случае необходимо находить дополнительные механизмы обеспечения ответственности.

## 4 Заключение

Некоторые задачи анализа ПБ являются очень трудоемкими. В связи с этим на практике такие задачи просто не рассматриваются. Вместе с тем, анализ рисков требует хотя бы приблизительной оценки вероятностей проблемных ситуаций при внедрении ПБ. Такие оценки можно получить при анализе конфликтов в ПБ с помощью моделей случайных графов. Более того, с помощью моделей случайных графов удастся определить значения наблюдаемых параметров, при которых вероятности появления конфликтов малы или трудоемкость обнаружения конфликтов является маленькой. В этой

работе рассмотрены два примера конфликтов в ПБ и построены модели случайных графов для их исследования. Результаты анализа позволили оценить влияние некоторых параметров случайных графов на вероятность существования конфликтов и на сложность алгоритмов поиска конфликтов в реальных ПБ.

## Литература

1. Department of Defence Trusted Computer System Evaluation Criteria. — DoD, 1985.
2. Грушо А. А., Тимонина Е. Е. Теоретические основы компьютерной безопасности. — М.: Яхтсмен, 1996.
3. Pieprzyk G., Hardjono Th., Seberry J. Fundamentals of computer security. — Springer, 2003.
4. Whitman M. E., Mattotd H. J. Management of information security. 2nd ed. — Thomson Course Technology, 2008.
5. Graham G., Denning P. Protection: Principles and practices // AFIPS Spring Joint Computer Conference Proceedings, 1972. P. 417–429.
6. Щербаков А. Ю. Введение в теорию и практику компьютерной безопасности. — М.: Издатель Молгачева С. В., 2003.
7. Moffet G. D., Sloman M. S. The representation of policies as system objects // ACM Conference on Organizational Computing Systems Proceedings. Atlanta, GA. November 1991. P. 171–184.
8. Abadi M., Barrows M., Lampson B., Plotkin G. A calculus for access control in distributed systems // ACM Transactions on Programming Languages and Systems, 1993. Vol. 15. No. 4. P. 706–734.
9. Gail-Joon Ahn, Sandhu R. The RSL99 language for role-based separation of duty constraints // ACM Workshop on Role-Based Access Control, 1999. P. 43–54.
10. Ryutov T., Neuman C. The set and function approach to modeling authorization in distributed systems // Workshop (International) on Methods, Models, and Architectures for Network Security Proceedings, MMM-ACNS 2001, St. Petersburg // Information Assurance in Computer Networks. LNCS 2052. — Springer, 2001. P. 189–206.
11. Harrison M., Ruzzo W., Ullman J. Protection in operating systems // Communications of the ACM, 1976. Vol. 19. No. 8. P. 461–471.
12. Грушо А. А. О предельных распределениях некоторых характеристик случайных автоматных графов // Математические заметки, 1973. Т. 14. Вып. 1. С. 133–141.
13. Степанов В. Е. Предельные распределения некоторых характеристик случайных отображений // Теория вероятностей и ее применения, 1969. Т. 14. Вып. 4. С. 639–653.

# ЗАКОНЫ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ЧИСЛА БЕЗОШИБОЧНЫХ БЛОКОВ ПРИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОМ КОДИРОВАНИИ

А. Н. Чупрунов<sup>1</sup>, И. Фазекаш<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются сообщения, состоящие из блоков. Каждый блок кодируется помехоустойчивым кодом, который может исправить не более  $r$  ошибок. При этом предполагается, что число ошибок в блоке — неотрицательная целочисленная случайная величина. Эти случайные величины независимы и одинаково распределены. Кроме того, предполагается, что число ошибок в сообщении принадлежит некоторому конечному подмножеству множества неотрицательных чисел. Получены аналоги закона повторного логарифма для случайной величины — числа безошибочных блоков в сообщении.

**Ключевые слова:** обобщенная схема размещения; условная вероятность; условное математическое ожидание; экспоненциальное неравенство; закон повторного логарифма; код БЧХ

## 1 Введение и основные результаты

Будем рассматривать код, который позволяет исправить не более  $r$  ошибок типа замещения. Частным случаем такого кода является код Боуза–Чоудхури–Хоквингхема (БЧХ) (см. о кодах БЧХ, например, в [1]). Работа посвящена изучению асимптотического поведения случайной величины  $S_N$  — числа безошибочных блоков в сообщении, состоящем из  $N$  блоков, причем каждый блок подвергается помехоустойчивому кодированию, а число ошибок в сообщении принадлежит некоторому конечному множеству. Будем предполагать, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ .

Рассмотрим сообщение, состоящее из  $N$  блоков. Пусть случайная величина  $\xi_{Nj}$  — число ошибок в  $j$ -м блоке. Будем предполагать, что  $\xi_{Nj}$ ,  $1 \leq j \leq N$ , — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины распределенные так же, как случайная величина  $\xi$ . Кроме того, будем считать, что число ошибок в сообщении принадлежит некоторому конечному подмножеству  $M$  множества неотрицательных целых чисел. Тогда число безошибочных блоков в сообщении — случайная величина

$$S_{MN} = \sum_{i=1}^N I_{MNi},$$

где  $I_{MNi}$  — индикатор события  $A_{MNi}$ , состоящего в том, что  $i$ -й блок сообщения имеет не более  $r$  ошибок. Заметим, что событие

$$A_{MNi} = \{ \xi_{Ni} \leq r \mid \xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \in M \} = \{ \xi_{Ni} \leq r \mid A \},$$

где событие

$$A = A_{MN} = \{ \xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \in M \} = \cup_{k \in M} A_k,$$

а события

$$A_k = A_{kN} = \{ \xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} = k \}.$$

Будем предполагать, что распределение случайной величины  $\xi$  зависит от параметра  $\theta$ . Пусть существует последовательность неотрицательных чисел  $b_0, b_1, \dots$  такая, что радиус сходимости  $R$  ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!}$$

положителен. Тогда случайная величина  $\xi = \xi(\theta)$ ,  $0 < \theta < R$  распределена по следующему закону:

$$p_k = p_k(\theta) = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Будем предполагать, что выполняется условие  $A_1$ , т. е.  $b_0 > 0, b_1 > 0$ .

Если множество  $M$  состоит из одного элемента, то события  $A_{MN}$  являются событиями обобщенной схемы размещения и их вероятности не зависят

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, achuprunov@mail.ru

<sup>2</sup>Дабреценский университет, fazekas.istvan@inf.unideb.hu

от  $\theta$ . Обобщенная схема размещения была введена В. Ф. Колчиным в [2] (см. также монографию [3]).

Условие  $A_1$  и случайные величины  $\xi(\theta)$  были введены в [4]. В [4–6] получены предельные теоремы для сумм независимых случайных величин  $\xi_{Ni}(\theta)$ . В частности, в [4] показано, что математическое ожидание

$$m = m(\theta) = \mathbf{E}\xi = \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)}$$

и дисперсия

$$\sigma^2 = \sigma^2(\theta) = \mathbf{D}^2\xi = \frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)} - \frac{\theta^2 (B'(\theta))^2}{(B(\theta))^2}.$$

Поэтому дисперсия

$$\sigma^2(\theta) = \theta m'(\theta). \quad (1)$$

Пусть  $0 < \theta' < \theta'' < R$ . Если  $\sigma^2(\theta) = 0$  для некоторого  $\theta \in [\theta', \theta'']$ , то случайная величина  $\xi(\theta)$  — константа. Но так как  $b_0 > 0$ ,  $b_1 > 0$ , случайная величина  $\xi(\theta)$  константой не является. Поэтому  $\sigma^2(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta', \theta'']$  — положительная непрерывная функция. Следовательно,

$$0 < C_1 = \inf_{\theta \in [\theta', \theta'']} \sigma^2(\theta) \leq \sup_{\theta \in [\theta', \theta'']} \sigma^2(\theta) = C_2 < \infty. \quad (2)$$

Условия (1) и (2) влекут

$$0 < \frac{C_1}{\theta''} = \inf_{\theta \in [\theta', \theta'']} m'(\theta) \leq \sup_{\theta \in [\theta', \theta'']} m'(\theta) = \frac{C_2}{\theta'} < \infty.$$

Таким образом,  $m(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta', \theta'']$ , — положительная непрерывная строго возрастающая функция. Обозначим через  $m^{-1}$  ее обратную функцию,  $m(R) = \lim_{\theta \rightarrow R-0} m(\theta)$ . Будем обозначать через  $\xi_1(\theta), \dots, \xi_N(\theta)$  независимые копии случайной величины  $\xi = \xi(\theta)$ .

Обозначим  $n'_M = \sup\{n : n \in M\}$ ,  $\alpha_{MN} = n'_M/N$ . Будем предполагать, что  $\alpha_{MN} < m(R)$ . Пусть  $\theta_{MN} = m^{-1}(\alpha_{MN})$ . Тогда случайная величина  $T = (1/\sqrt{N}) \sum_{i=1}^N I_{\{\xi_{Ni}(\theta_{MN}) \leq r\}}$  имеет дисперсию  $\sigma_{MN}^2 = p_{\leq r}(\theta_{MN})(1 - p_{\leq r}(\theta_{MN}))$ , где  $p_{\leq r}(\theta_{MN}) = \sum_{k=0}^r p_k(\theta_{MN})$ . Будем использовать следующую оценку для дисперсии случайной величины  $T$ . Пусть  $\theta' \leq \theta_{MN} \leq \theta''$ . Тогда

$$\sigma_{MN}^2 \geq \frac{\sum_{k=0}^r b_k(\theta')^k}{B(\theta'')} \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} b_k(\theta')^k}{B(\theta'')} = C_3 > 0. \quad (3)$$

Основными результатами статьи являются следующие аналоги закона повторного логарифма для числа безошибочных блоков — случайной величины  $S_{MN}(\theta_{MN})$ .

**Теорема 1.** Пусть  $0 < \alpha' < \alpha'' < m(R)$ . Пусть  $M_N$  — такая последовательность конечных подмножеств множества неотрицательных чисел, что  $\alpha' \leq \alpha_{M_N N} \leq \alpha''$ . Обозначим  $S_N = S_{M_N N}(\theta_{M_N N})$ ,  $\sigma_N^2 = \sigma_{M_N N}^2$ . Тогда

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|S_N - \mathbf{E}S_N|}{\sqrt{N \ln(N)} \sigma_N} \leq 2\sqrt{6} \quad (4)$$

почти наверное.

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \alpha' < \alpha'' < m(R)$ . Пусть  $M_n$  — последовательность конечных подмножеств множества неотрицательных чисел. Обозначим  $S_{nN} = S_{M_n N}(\theta_{M_n N})$ ,  $\sigma_{nN}^2 = \sigma_{M_n N}^2$ . Тогда

$$\limsup_{N, n \rightarrow \infty, \alpha' < \alpha_{nN} < \alpha''} \frac{|S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN}|}{\sqrt{N \ln(N)} \sigma_{nN}} \leq 2\sqrt{10} \quad (5)$$

почти наверное.

## 2 ЛЕММЫ

Пусть  $A \in \mathcal{A}$  — такое фиксированное событие, что  $\mathbf{P}(A) > 0$ . Напомним, что условная вероятность  $\mathbf{P}^A$  определяется формулой

$$\mathbf{P}^A(B) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}, \quad B \in \mathcal{A}.$$

Будем обозначать через  $\mathbf{E}^A$  математическое ожидание относительно вероятности  $\mathbf{P}^A$ .

Легко видеть, что для любой случайной величины  $S$  и для любого  $p > 0$  справедливо неравенство  $\mathbf{E}^A|S|^p \leq (1/\mathbf{P}(A))\mathbf{E}|S|^p$ . Следующая лемма показывает, что аналогичное неравенство верно для центрарованных абсолютных моментов случайной величины  $S$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Тогда

$$\mathbf{E}^A|S - \mathbf{E}^A S|^p \leq 2^p \frac{\mathbf{E}|S - \mathbf{E}S|^p}{\mathbf{P}(A)}. \quad (6)$$

Лемма 2.1 доказана в [7].

Будем обозначать через  $r_i$ ,  $i \in \mathbf{N}$ , функции Радемахера,  $\mathbf{E}^r$  — математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры, определенной случайными величинами  $r_{i,\gamma}$  — гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией.

Воспользуемся неравенством Хинчина, в котором константа имеет наиболее точный вид.

**Лемма 2.2.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Пусть  $c_i \in \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Тогда

$$\mathbf{E}_r \left| \sum_{i=1}^n c_i r_i \right|^p \leq \sqrt{2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right) e^{-p/2} p^{p/2} \left( \sum_{i=1}^n (c_i)^2 \right)^{p/2}. \quad (7)$$

**Доказательство.** В [8] доказано неравенство Хинчина с неулучшаемой константой

$$\mathbf{E}_r \left| \sum_{i=1}^n c_i r_i \right|^p \leq \mathbf{E} |\gamma|^p \left( \sum_{i=1}^n (c_i)^2 \right)^{p/2}. \quad (8)$$

Применяя оценку для гамма-функции  $\Gamma(p)$ , полученную в [9], имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\gamma|^p &= \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{2^{p/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-p/2-1/2} \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{p/2+1/2} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2\pi}{(p/2+1/2)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2} 2^{p/2} e^{-p/2-1/2} \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{p/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2} e^{-p/2} e^{-1/2} (p+1)^{p/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2} e^{-p/2} e^{-1/2} \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p/2} p^{p/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) \leq \\ &\leq \sqrt{2} e^{-p/2} e^{-1/2} e^{1/2} p^{p/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right). \quad (9) \end{aligned}$$

Используя (9) в (8), получаем (7). Лемма доказана.

**Лемма 2.3.** Пусть  $\eta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , — независимые случайные величины с математическими ожиданиями  $a_i$  и дисперсиями  $\sigma_i^2$  такие, что  $0 \leq \eta_i \leq 1$ . Обозначим

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Пусть  $p \geq 2$ . Тогда

$$a^p \leq \mathbf{E} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right)^p \leq a^p (1 + B), \quad (10)$$

где

$$B = \frac{\sigma^2}{2} f_2 \left( \frac{p}{a\sqrt{n}} \right),$$

а функция

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^2 (2\mathbf{E}(\gamma^2 \exp(x|\gamma|)) - 1) = \\ &= 4x^2 \left( e^{x^2/2} (x^3 + 3x) \Phi(x) + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \right), \end{aligned}$$

где  $\Phi$  — функция распределения случайной величины  $\gamma$ .

**Доказательство.** Левое неравенство в (10) следует из неравенства Иенсена. Пусть семейство  $\{\eta'_i, 1 \leq i \leq n\}$  — независимая копия семейства  $\{\eta_i, 1 \leq i \leq n\}$ . Функция  $g(x) = |a + x|^p$  имеет непрерывную вторую производную. Поэтому по формуле Тейлора имеем

$$g(x) = a^p + \frac{pa^{p-1}}{1!}x + \frac{p(p-1)|a+\theta x|^{p-2}}{2!}x^2,$$

где  $\theta \in (-1, 1)$ . Отсюда при  $x = \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{n}$  получается равенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right|^p &= a^p + \frac{p(p-1)}{2} \mathbf{E} \times \\ &\times \left| a' + \theta \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{n} \right|^{p-2} \left( \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{n} \right)^2 = \\ &= a^p (1 + B'), \end{aligned}$$

где  $\theta = \theta(\omega)$ ,  $-1 \leq \theta \leq 1$ . Так как  $1 + x \leq e^x$ ,  $0 \leq x < \infty$ , и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta'_i)^2}{n} \right|^{(k+2)/2} &\leq \\ &\leq \mathbf{E} \left( \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta'_i)^2}{n} \right) = 2\sigma^2, \end{aligned}$$

используя (7), получаем

$$\begin{aligned} B' &\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbf{E} \left( 1 + \left| \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{na} \right| \right)^{p-2} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{na} \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbf{E} \exp \left( (p-2) \left| \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{na} \right| \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{na} \right)^2 \leq \\
 & \leq \frac{p(p-1)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (p-2)^k \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{na} \right|^{k+2} \leq \\
 & \leq \frac{1}{2} \frac{p(p-1)}{a^2 n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{p-2}{a\sqrt{n}} \right)^k \times \\
 & \quad \times \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - a_i)}{\sqrt{n}} \right|^{k+2} \leq \\
 & \leq \frac{1}{2} \frac{p(p-1)}{a^2 n} \left( \sigma^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{p-2}{a\sqrt{n}} \right)^k \times \right. \\
 & \quad \left. \times \mathbf{E} |\gamma|^{k+2} \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta'_i)^2}{n} \right|^{(k+2)/2} \right) \leq \\
 & \leq \frac{\sigma^2}{2} \frac{p(p-1)}{a^2 n} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{p-2}{a\sqrt{n}} \right)^k \mathbf{E} |\gamma|^{k+2} \right) = \\
 & = \frac{\sigma^2}{2} \frac{p(p-1)}{a^2 n} \times \\
 & \quad \times \left( 1 + 2 \left( \mathbf{E} \left( \gamma^2 \exp \left( \frac{p-2}{a\sqrt{n}} |\gamma| \right) \right) - 1 \right) \right) \leq B.
 \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Пусть  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  — независимые события,  $p_i = \mathbf{P}(A_i)$ ,  $I_i$  — индикаторы событий  $A_i$ ,  $\sigma_i^2 = p_i(1-p_i)$  — дисперсии индикатора  $I_i$ . Будем предполагать, что  $0 < p_i < 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Рассмотрим случайную величину

$$\mu = \sum_{i=1}^n I_i.$$

Тогда  $\sigma^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$  — дисперсия случайной величины  $(1/\sqrt{n})\mu$ .

Основной результат этого параграфа — следующее экспоненциальное неравенство.

**Лемма 2.4.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^A \left\{ \frac{|\mu - \mathbf{E}^A \mu|}{\sqrt{n}\sigma} \geq \varepsilon \right\} & \leq \frac{\sqrt{2}}{\mathbf{P}(A)} \left( 1 + O \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \right) \times \\
 & \times \left( 1 + \frac{1}{8} f_2 \left( \frac{\varepsilon^2}{32\sigma^2 \sqrt{n}} \right) \right) e^{-\varepsilon^2/16}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть семейство  $\{I'_i, 1 \leq i \leq n\}$  — независимая копия семейства  $\{I_i, 1 \leq i \leq n\}$ . Будем предполагать, что  $\{I_i, 1 \leq$

$i \leq n\}$ ,  $\{I'_i, 1 \leq i \leq n\}$  и  $\{r_i, 1 \leq i \leq n\}$  — независимые семейства. Так как  $0 < \sigma^2 \leq 1/4$ , то  $\sigma^2(1-2\sigma^2) \leq 1/2$ . Поэтому, используя леммы 2.1–2.3 и неравенство Иенсена, получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^A \left\{ \frac{|\mu - \mathbf{E}^A \mu|}{\sqrt{n}\sigma} \geq \varepsilon \right\} & \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \mathbf{E}^A \left| \frac{\mu - \mathbf{E}^A \mu}{\sqrt{n}\sigma} \right|^p \leq \\
 & \leq \frac{2^p}{\varepsilon^p \mathbf{P}(A)} \mathbf{E} \left| \frac{\mu - \mathbf{E} \mu}{\sqrt{n}\sigma} \right|^p \leq \\
 & \leq \frac{2^p}{\varepsilon^p \mathbf{P}(A)} \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n (I_i - p_i)}{\sqrt{n}\sigma} \right|^p \leq \\
 & \leq \frac{2^p}{\varepsilon^p \mathbf{P}(A)} \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n (I_i - I'_i)}{\sqrt{n}\sigma} \right|^p = \\
 & = \frac{2^p}{\varepsilon^p \mathbf{P}(A)} \mathbf{E}_r \mathbf{E} \left| \frac{\sum_{i=1}^n r_i (I_i - I'_i)}{\sqrt{n}\sigma} \right|^p \leq \frac{\sqrt{2} 2^p}{\varepsilon^p \mathbf{P}(A) \sigma^p} \times \\
 & \times \left( 1 + O \left( \frac{1}{p} \right) \right) e^{-p/2} p^{p/2} \mathbf{E} \left( \frac{\sum_{i=1}^n (I_i - I'_i)^2}{n} \right)^{p/2} \leq \\
 & \leq \frac{\sqrt{2} 2^p}{\varepsilon^p \mathbf{P}(A) \sigma^p} \left( 1 + O \left( \frac{1}{p} \right) \right) e^{-p/2} p^{p/2} 2^{p/2} \sigma^p \mathbf{E} \times \\
 & \quad \times \left( 1 + \sigma^2(1-2\sigma^2) f_2 \left( \frac{p}{4\sigma^2 \sqrt{n}} \right) \right) \leq \\
 & \leq \frac{\sqrt{2} 2^p}{\varepsilon^p \mathbf{P}(A) \sigma^p} \left( 1 + O \left( \frac{1}{p} \right) \right) e^{-p/2} p^{p/2} 2^{p/2} \sigma^p \mathbf{E} \times \\
 & \quad \times \left( 1 + \frac{1}{8} f_2 \left( \frac{p}{4\sigma^2 \sqrt{n}} \right) \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

При  $p = \varepsilon^2/8$  из (12) следует (11).

Пусть  $\theta' = m^{-1}(\alpha')$ ,  $\theta'' = m^{-1}(\alpha'')$ . Заметим, что  $\theta' \leq \theta \leq \theta''$  тогда и только тогда, когда  $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha''$ .

**Лемма 2.5.** Пусть  $0 < \alpha' < \alpha'' < m(R)$ . Пусть  $\alpha = n'_M/N$ ,  $\theta = m^{-1}(\alpha)$ . Существует  $N_0 \in \mathbf{N}$  со свойством: если  $n, N \in \mathbf{N}$  такие, что  $N > N_0$ , а  $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha''$ , то

$$\mathbf{P}(A_{MN}) > \frac{1}{4\sqrt{C_1}\sqrt{N}}. \quad (13)$$

**Доказательство.** В силу теоремы 4 из [4] существует  $N_0 \in \mathbf{N}$  такое, что если  $N > N_0$  и  $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha''$ , то

$$\begin{aligned}
 & \sigma(\theta) \sqrt{N} \mathbf{P}(A_{n'_M N}) - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(n - m(\theta)N)^2}{2\sigma^2(\theta)N} \right\} > \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.
 \end{aligned}$$

Так как  $m(\theta) = \alpha$ , имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(n - m(\theta)N)^2}{2\sigma^2(\theta)N} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому

$$\sigma(\theta)\sqrt{N}\mathbf{P}(A_{nMN}) \geq \sigma(\theta)\sqrt{N}\mathbf{P}(A_{n'_mN}) > \frac{1}{4}. \quad (14)$$

Из (14) и (2) следует (13). Лемма доказана.

### 3 Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Выберем  $N_0 \geq 2$  такое, что справедливо утверждение леммы 2.5. Пусть  $t > 2\sqrt{6}$ . Тогда  $t^2/16 - 1/2 > 1$ . Поэтому, используя лемму 2.4, лемму 2.5 и (3), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{|S_k - \mathbf{E}S_k|}{\sqrt{k \ln(k)}\sigma_k} \geq t \right\} = \\ & = \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{|S_k - \mathbf{E}S_k|}{\sqrt{k}\sigma_k} \geq \sqrt{\ln(k)}t \right\} \leq \\ & \leq \sqrt{2} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} 4\sqrt{C_1}\sqrt{k} \left( 1 + O\left(\frac{1}{t^2 \ln(k)}\right) \right) \times \\ & \times \left( 1 + f_2\left(\frac{t^2 \ln(k)}{32C_3\sqrt{k}}\right) \right) e^{-(\sqrt{\ln(k)}t)^2/16} \leq \\ & \leq 4\sqrt{2}\sqrt{C_1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \left( 1 + O\left(\frac{1}{t^2 \ln(k)}\right) \right) \times \\ & \times \left( 1 + f_2\left(\frac{t^2 \ln(k)}{32C_3\sqrt{k}}\right) \right) k^{-t^2/16+1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех  $t > 2\sqrt{6}$  по лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|S_k - \mathbf{E}S_k|}{\sqrt{k \ln(k)}\sigma_k} \leq t \quad (15)$$

почти наверное. Из (15) следует (4). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Выберем  $N_0 \geq 2$  такое, что справедливо утверждение леммы 2.5. Пусть  $t > 2\sqrt{10}$ . Тогда  $t^2/16 - 1 - 1/2 > 1$ . Поэтому, используя леммы 2.4 и 2.5 и (3), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \sum_{N\alpha' \leq n \leq \alpha''N} \mathbf{P} \left\{ \frac{|S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN}|}{\sqrt{N \ln(N)}\sigma_{nN}} \geq t \right\} = \\ & = \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \sum_{N\alpha' \leq n \leq \alpha''N} \mathbf{P} \left\{ \frac{|S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN}|}{\sqrt{N}\sigma_{nN}} \geq \right. \\ & \left. \geq \sqrt{\ln(N)}t \right\} \leq \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \sum_{N\alpha' \leq n \leq \alpha''N} 4\sqrt{2}\sqrt{C_1}\sqrt{N} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( 1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \ln(N)}\right) \right) \times \\ & \times \left( 1 + f_2\left(\frac{\varepsilon^2 \ln N}{32C_3\sqrt{N}}\right) \right) e^{-(\sqrt{\ln(N)}t)^2/616} \leq \\ & \leq 4\sqrt{2}\sqrt{C_1} \sum_{N=N_0+1}^{\infty} (\alpha'' - \alpha')N \left( 1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \ln(N)}\right) \right) \times \\ & \times \left( 1 + f_2\left(\frac{\varepsilon^2 \ln N}{32C_3\sqrt{N}}\right) \right) N^{-t^2/16+1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех  $t > 2\sqrt{10}$  по лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{n, N \rightarrow \infty, \alpha' < \alpha < \alpha''} \frac{|S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN}|}{\sqrt{N \ln(N)}\sigma_{nN}} \leq t \quad (16)$$

почти наверное. Из (16) следует (5). Теорема доказана.

### Литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976. 596 с.
2. Колчин В. Ф. Один класс предельных теорем для условных распределений // Литовск. матем. сб., 1968. Т. 8. № 1. С. 53–63.
3. Колчин В. Ф. Случайные графы. — М.: Физматгиз, 2000.
4. Колчин А. В. Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискрет. матем., 2003. Т. 15. № 4. С. 143–157.
5. Колчин А. В., Колчин В. Ф. О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения // Дискрет. матем., 2006. Т. 18. № 4. С. 113–127.
6. Колчин А. В., Колчин В. Ф. Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения // Дискрет. матем., 2007. Т. 19. № 3. С. 15–21.
7. Móri T. Sharp inequalities between centered moments // J. Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2009. Vol. 10. Is. 4. Art. 99.
8. Haagerup U. The best constant in Khinchin inequality // Stud. Math., 1982. Vol. 70. P. 231–283.
9. Nemes G. New asymptotic expansion for the  $\Gamma(z)$  function // Stan's Library, 2007. Vol. II. P. 31.

# О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ МОЩНОСТЕЙ КРИТЕРИЕВ В СЛУЧАЕ ОБОБЩЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

О. О. Лямин<sup>1</sup>

**Аннотация:** В работе [1] на эвристическом уровне была получена формула для предела отклонения мощности асимптотически наиболее мощного критерия от мощности наилучшего критерия в случае обобщенного распределения Лапласа. В данной работе приводится формальное доказательство этой формулы.

**Ключевые слова:** обобщенное распределение Лапласа; функция мощности; асимптотически наиболее мощный критерий; асимптотическое разложение

## 1 Введение

Распределение Лапласа находит широкое применение в задачах моделирования больших рисков, выделения сигналов на фоне помех и других задачах математической статистики (см., например, [2–4]). Данная работа продолжает исследования, начатые в [1], и содержит строгое доказательство результатов, полученных в указанной работе на эвристическом уровне. Здесь используются те же обозначения, что и в [1].

В работе [1] была рассмотрена задача проверки гипотезы

$$H_0 : \theta = 0$$

против последовательности близких альтернатив вида

$$H_{n,1} : \theta = \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad 0 < t \leq C, \quad C > 0,$$

на основе выборки  $(X_1, \dots, X_n)$  — независимых одинаково распределенных наблюдений, имеющих распределение с плотностью вида

$$p(x, \theta) = C_{a,b} e^{-a(x-\theta)^2 - b|x-\theta|}, \quad x, \theta \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $C_{a,b}$  — константа нормировки. Предположим, что  $a > 0$ ,  $b > 0$ . В этом случае константа нормировки

$$C_{a,b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a})) \exp(b^2/(4a))},$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Для каждого фиксированного  $t \in (0, C]$  обозначим через  $\beta_n^*(t)$  мощность наилучшего критерия уровня  $\alpha \in (0, 1)$ . Такой критерий всегда существует согласно фундаментальной лемме Неймана–Пирсона и основан на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_n(t) = \sum_{i=1}^n \left( atn^{-1/2} (2X_i - tn^{-1/2}) + b (|X_i| - |X_i - tn^{-1/2}|) \right).$$

Для проверки  $H_0$  против  $H_{n,1}$  существуют критерии, основанные на отличных от  $\Lambda_n(t)$  статистиках и имеющие ту же предельную мощность, что и  $\beta_n^*(t)$ . Такие критерии называются асимптотически наиболее мощными (АНМ), причем эти критерии не зависят от  $t$ . Предположим, что статистику  $T_n$  некоторого АНМ-критерия можно монотонным преобразованием (не меняющим мощности критерия) преобразовать в статистику  $S_n(t)$  такую, что величина  $\Delta_n(t) = S_n(t) - \Lambda_n(t)$  допускает при гипотезе  $H_0$  асимптотическое разложение вида

$$\Delta_n(t) = n^{-1/2} L_n(t) + o(n^{-1/2}), \quad (2)$$

где  $L_n(t)$  — некоторая статистика. Было обнаружено (см. [5]), что в этом случае для широкого класса АНМ-критериев мощность  $\beta_n(t)$  критерия, основанного на  $S_n(t)$  (или на  $T_n$ ), отличается от  $\beta_n^*(t)$  на величину порядка  $1/n$ .

Для распределения (1) рассмотрим АНМ-критерий, основанный на статистике

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (2aX_i + b \operatorname{sign}(X_i)).$$

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, oleg.lyamin@gmail.com

Обозначим через  $\beta_n(t)$  мощность этого критерия уровня  $\alpha \in (0, 1)$ . В работе [1] было показано, что для этого критерия величина  $\Delta_n(t)$  допускает при гипотезе  $H_0$  асимптотическое разложение несколько иного, чем в (2), вида, а именно

$$\Delta_n(t) = n^{-1/4}L_n(t) + o(n^{-1/4}),$$

в связи с чем мощность критерия  $\beta_n(t)$  отличается от  $\beta_n^*(t)$  на величину порядка  $1/\sqrt{n}$ , а не  $1/n$ , как следовало ожидать. Там же на эвристическом уровне была получена формула

$$r(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\beta_n^*(t) - \beta_n(t)) = \frac{2b^2 C_{a,b} t^2}{3\sqrt{I_{a,b}}} \varphi(u_\alpha - t\sqrt{I_{a,b}}), \quad (3)$$

где  $\Phi(x)$ ,  $\varphi(x)$  — соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального закона,  $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ;  $I_{a,b}$  — фишеровская информация.

В этой работе для распределения (1) будут проверены условия теоремы 3.2.1 из [5], т. е. получено формальное доказательство формулы (3).

## 2 Основные обозначения

В соответствии с определениями работы [1] введем следующие обозначения:

$$S_n(t) = tT_n - \frac{I_{a,b}t^2}{2};$$

$$\Delta_n(t) = S_n(t) - \Lambda_n(t) = -bC_{a,b}t^2 - 2b \sum_{i=1}^n \left( X_i - \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \mathbf{1}_{[0, t/\sqrt{n}]}(X_i), \quad (4)$$

где  $\mathbf{1}_A(x)$  — индикатор множества  $A$ . В дальнейшем будем опускать аргумент  $t$  и писать просто  $\Lambda_n, S_n$  и  $\Delta_n$ . Также положим

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz.$$

Для  $\theta > 0$  и произвольного  $x \in \mathbb{R}$  определим функции

$$g_\theta(x) = C_{a,b}\theta^2 + 2(x - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x); \quad (5)$$

$$m_\theta(x) = a(2x - \theta) + b \left[ -\mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(x) + \left( \frac{2x}{\theta} - 1 \right) \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) + \mathbf{1}_{(\theta, \infty)}(x) \right]; \quad (6)$$

$$M_\theta(x) = \theta m_\theta(x); \quad (7)$$

$$d_\theta(x) = -\frac{I_{a,b}\theta}{2} + 2ax + b \operatorname{sign}(x);$$

$$D_\theta(x) = \theta d_\theta(x).$$

Обозначим  $g_n(x)$ ,  $m_n(x)$ ,  $M_n(x)$ ,  $d_n(x)$  и  $D_n(x)$  соответственно функции  $g_\theta(x)$ ,  $m_\theta(x)$ ,  $M_\theta(x)$ ,  $d_\theta(x)$  и  $D_\theta(x)$  при  $\theta = tn^{-1/2}$ .

Перепишем статистики в обозначениях введенных функций:

$$\Lambda_n = tn^{-1/2} \sum_{i=1}^n m_n(X_i) = \sum_{i=1}^n M_n(X_i); \quad (8)$$

$$S_n = tn^{-1/2} \sum_{i=1}^n d_n(X_i) = \sum_{i=1}^n D_n(X_i); \quad (9)$$

$$\Delta_n = -b \sum_{i=1}^n g_n(X_i). \quad (10)$$

Договоримся обозначать  $f_{S_n}(s)$ ,  $f_{\Lambda_n}(s)$ ,  $f_{m_\theta}(s)$ ,  $f_{M_\theta}(s)$ ,  $f_{d_\theta}(s)$ ,  $f_{D_\theta}(s)$  характеристические функции соответственно случайных величин  $S_n, \Lambda_n, m_\theta(X_1), M_\theta(X_1), d_\theta(X_1), D_\theta(X_1)$ . Смена индекса  $\theta$  на  $n$  будет обозначать, что эти функции рассматриваются при  $\theta = tn^{-1/2}$ . Заметим, что

$$f_{M_\theta}(s) = E_0 \exp \{isM_\theta(X_1)\} = E_0 \exp \{is\theta m_\theta(X_1)\} = f_{m_\theta}(\theta s),$$

$$f_{D_\theta}(s) = f_{d_\theta}(\theta s).$$

Аналогично

$$f_{M_n}(s) = f_{m_n}(tn^{-1/2}s), \quad (11)$$

$$f_{D_n}(s) = f_{d_n}(tn^{-1/2}s). \quad (12)$$

Также будем пользоваться показанным в [1] соотношением между константой нормировки и фишеровской информацией

$$I_{a,b} = 2(bC_{a,b} + a).$$

## 3 Вспомогательные результаты

**Лемма 3.1.** Для любых  $0 < t_1 < t_2$  и распределения (1) справедливы равенства

$$\sup_{t \in [t_1, t_2]} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P_{n,0}(\Lambda_n < x) - f_1(x, t) - \frac{f_2(x, t)}{\sqrt{n}} - \frac{f_3(x, t)}{n} \right| = o(n^{-1}),$$

где

$$f_1(x, t) = \Phi \left( \frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2} \right);$$



$$f_2(x, t) = \frac{b^2 C_{a,b} t}{3\sqrt{I_{a,b}}} \left( \frac{x}{tI_{a,b}} - \frac{t}{2} \right) \varphi \left( \frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2} \right);$$

$$f_3(x, t) = \frac{bC_{a,b}}{3I_{a,b}} \varphi \left( \frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2} \right) \times \left\{ \frac{t^2}{2\sqrt{I_{a,b}^3}} \left( \frac{M_1(a, b, C_{a,b})x}{t} + \frac{2M_2(a, b, C_{a,b})t}{3I_{a,b}} \right) - \frac{b^3 C_{a,b} t^2}{6} \left( \frac{x}{tI_{a,b}} - \frac{t}{2} \right)^2 \left( \frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2} \right) - \frac{M_3(a, b)t}{2\sqrt{I_{a,b}}} \left( \frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2} \right)^2 + \frac{M_3(a, b)t}{2\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{M_3(a, b)}{4I_{a,b}} \left( \frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2} \right)^3 - \frac{3M_3(a, b)}{4I_{a,b}} \left( \frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2} \right) \right\};$$

$$M_1(a, b, C_{a,b}) = 6b^2 C_{a,b}^2 + b(14a - b^2)C_{a,b} + 2a(4a - b^2);$$

$$M_2(a, b, C_{a,b}) = 18b^4 C_{a,b}^4 + b^3(66a - b^2)C_{a,b}^3 + 2ab^2(45a - b^2)C_{a,b}^2 + a^2b(54a - b^2)C_{a,b} + 12a^4;$$

$$M_3(a, b) = 3I_{a,b} - b^2.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения этой леммы применим предложение 1.1 из работы [6] для  $r = 4$ .

Покажем равномерную интегрируемость семейства случайных величин  $m_\theta^4(X_1)$  относительно  $P_0$ . По определению равномерной интегрируемости необходимо показать, что

$$\sup_\theta E_0 |m_\theta^4(X_1)| \mathbf{1}_{(c, \infty)}(|m_\theta^4(X_1)|) \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow \infty.$$

Используя (6), представим  $\mathbf{1}_{(c, \infty)}(|m_\theta^4(X_1)|)$  в следующем виде:

$$\mathbf{1}_{(c, \infty)}(|m_\theta^4(x)|) = \mathbf{1}_{(\sqrt[4]{c}, \infty)}(|m_\theta(x)|) = \mathbf{1}_{(-\infty, x_1(c)) \cup (x_2(c), \infty)}(x) \cdot \mathbf{1}_{((a\theta+b)^4, \infty)}(c) + \mathbf{1}_{(-\infty, x_3(c)) \cup (x_4(c), \infty)}(x) \cdot \mathbf{1}_{(0, (a\theta+b)^4)}(c), \quad (13)$$

где

$$x_1(c) = -\frac{\sqrt[4]{c} - a\theta - b}{2a}; \quad x_2(c) = \frac{\sqrt[4]{c} + a\theta - b}{2a};$$

$$x_3(c) = -\frac{\sqrt[4]{c} - a\theta - b}{2(a+b/\theta)}; \quad x_4(c) = \frac{\sqrt[4]{c} + a\theta + b}{2(a+b/\theta)}.$$

При больших  $c$  второе слагаемое в (13) равно нулю. Тогда для всякого  $\theta > 0$  непосредственным интегрированием получим

$$E_0 |m_\theta^4(X_1)| \mathbf{1}_{(c, \infty)}(|m_\theta^4(X_1)|) = E_0 |m_\theta^4(X_1)| \mathbf{1}_{(-\infty, x_1(c)) \cup (x_2(c), \infty)}(X_1) = P_1(x_1(c)) \exp \left\{ -\frac{(b + 2ax_1(c))^2}{4a} \right\} + C_1 \operatorname{erfc} \left( \frac{b + 2ax_1(c)}{2\sqrt{a}} \right) + P_2(x_2(c)) \exp \left\{ -\frac{(b + 2ax_2(c))^2}{4a} \right\} + C_2 \operatorname{erfc} \left( \frac{b + 2ax_2(c)}{2\sqrt{a}} \right) \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow \infty,$$

где  $C_1, C_2$  — константы, зависящие от  $a, b$  и  $\theta$ ;  $P_1(y)$  и  $P_2(y)$  — многочлены третьей степени с коэффициентами, зависящими от  $a, b$  и  $\theta$ . Первое условие предложения 1.1 из [6] доказано.

Для выполнения второго условия достаточно показать выполнение условия AC, для которого, в свою очередь, достаточно проверить условия теоремы 1.5 из [6].

Выберем  $a_1$  и  $a_2$  так, чтобы  $a_2 > a_1 > t > 0$ . Тогда условия I, II и III теоремы 1.5 очевидно выполнены. Условие IV следует из того, что для каждого  $\theta$  плотность  $p_\theta(x)$  абсолютно непрерывна на любом отрезке, не содержащем точку  $x = \theta$ , а значит для любого  $\theta \in [0, t]$  плотность  $p_\theta(x)$  абсолютно непрерывна на  $x \in [a_1, a_2]$ , так как  $a_2 > a_1 > t$ .

Обратимся к условию V. Для каждого  $\theta \in [0, t]$  функция  $p'_\theta(x)$  на отрезке  $a_2 > x > a_1 > t \geq \theta$  определена как

$$p'_\theta(x) = \frac{\sqrt{ae^{-b^2/(4a)}}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \times e^{-b(x-\theta) - a(x-\theta)^2} (-b - 2a(x-\theta)).$$

Тогда

$$\int_{a_1}^{a_2} |p'_\theta(x)|^{2+\delta} dx = \left( \frac{\sqrt{ae^{-b^2/(4a)}}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \right)^{2+\delta} \times \int_{a_1}^{a_2} e^{-(a(x-\theta)^2 + b(x-\theta))(2+\delta)} (b + 2a(x-\theta))^{2+\delta} dx \leq \left( \frac{\sqrt{ae^{-b^2/(4a)}}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \right)^{2+\delta} \times \int_{a_1}^{a_2} (b + 2a(x-\theta))^{2+\delta} dx \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left( \frac{\sqrt{a}e^{-b^2/(4a)}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \right)^{2+\delta} \times \\ &\quad \times (b + 2a(a_2 - \theta))^{2+\delta} (a_2 - a_1) \leq \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{a}e^{-b^2/(4a)}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \right)^{2+\delta} (b + 2aa_2)^{2+\delta} (a_2 - a_1). \end{aligned}$$

Все условия теоремы 1.5 из [6] выполнены, что дает возможность применить предложение 1.1, из которого непосредственно получается утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 3.2.** При  $\theta \rightarrow 0$  для функции  $g_\theta(x)$  (см. (5)) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 g_\theta(X_1) &= \mathcal{O}(\theta^3); \\ \mathbb{E}_0 g_\theta^2(X_1) &= \mathcal{O}(\theta^3); \\ \mathbb{E}_0 g_\theta^3(X_1) &= \mathcal{O}(\theta^4). \end{aligned}$$

**Доказательство.** В работе [1] была получена характеристическая функция для случайной величины  $(X_1 - \theta)\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1)$ . Из нее выводится характеристическая функция для  $g_\theta(X_1)$ , после чего задача вычисления моментов становится тривиальной.  $\square$

**Лемма 3.3.** Для статистики  $\Delta_n$  (см. (4)) при  $n \rightarrow \infty$  справедливо соотношение

$$\mathbb{E}_{n,0} |\Delta_n|^k = \mathcal{O}(n^{-k/4}),$$

где  $k$  — произвольное натуральное число.

**Доказательство.** Смотри доказательство следствия 3.1 в работе [1].  $\square$

**Лемма 3.4.** Справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n,0} \exp\{is\Lambda_n\} \Delta_n &= \\ &= -bn f_{M_n}^{n-1}(s) \mathbb{E}_0 \exp\{isM_n(X_1)\} g_n(X_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n,0} \exp\{is\Lambda_n\} \Delta_n^2 &= \\ &= b^2 n f_{M_n}^{n-1}(s) \mathbb{E}_0 \exp\{isM_n(X_1)\} g_n^2(X_1) + \\ &+ b^2 n(n-1) f_{M_n}^{n-2}(s) [\mathbb{E}_0 \exp\{isM_n(X_1)\} g_n(X_1)]^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n,0} \exp\{isS_n\} \Delta_n &= \\ &= -bn f_{D_n}^{n-1}(s) \mathbb{E}_0 \exp\{isD_n(X_1)\} g_n(X_1). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Пользуясь (8), (10), а также независимостью случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ , получаем первое утверждение

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n,0} \exp\{is\Lambda_n\} \Delta_n &= \\ &= -b \mathbb{E}_{n,0} \sum_{i=1}^n \exp\left\{is \sum_{j=1}^n M_n(X_j)\right\} g_n(X_i) = \\ &= -b \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{n,0} \exp\left\{is \sum_{j=1}^n M_n(X_j)\right\} g_n(X_i) = \\ &= -b \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{n,0} \left( \exp\{isM_n(X_i)\} g_n(X_i) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1, j \neq i}^n \exp\{isM_n(X_j)\} \right) = \\ &= -b \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{E}_0 \exp\{isM_n(X_i)\} g_n(X_i) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1, j \neq i}^n \mathbb{E}_0 \exp\{isM_n(X_j)\} \right) = \\ &= -b f_{M_n}^{n-1}(s) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_0 \exp\{isM_n(X_i)\} g_n(X_i) = \\ &= -bn f_{M_n}^{n-1}(s) \mathbb{E}_0 \exp\{isM_n(X_1)\} g_n(X_1). \end{aligned}$$

Второе утверждение доказывается по аналогии.

Чтобы доказать третье утверждение, необходимо воспользоваться представлением (9) и полностью повторить доказательство первого утверждения с заменой  $M_n$  на  $D_n$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 3.5.** При  $\theta \rightarrow 0$  для функций  $M_\theta(x)$  (см. (7)) и  $g_\theta(x)$  (см. (5)) справедливо следующее соотношение:

$$\mathbb{E}_0 |M_\theta(X_1)g_\theta(X_1)| = \mathcal{O}(\theta^{5/2}).$$

**Доказательство.** По неравенству Коши–Буняковского

$$\mathbb{E}_0 |M_\theta(X_1)g_\theta(X_1)| \leq \sqrt{\mathbb{E}_0 M_\theta^2(X_1) \mathbb{E}_0 g_\theta^2(X_1)}.$$

Используя полученную в работе [1] характеристическую функцию случайной величины  $M_\theta(X_1)$ , вычислим второй момент  $M_\theta(X_1)$ . Очевидно,

$$\mathbb{E}_0 M_\theta^2(X_1) = \mathcal{O}(\theta^2).$$

Используя лемму 3.2 для оценки  $\mathbb{E}_0 g_\theta^2(X_1)$ , получим утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 3.6.** При  $\theta \rightarrow 0$  для функций  $M_\theta(x)$  и  $g_\theta(x)$  справедливы следующие соотношения:

$$\mathbb{E}_0 \exp\{isM_\theta(X_1)\} = 1 + \frac{is(is-1)I_{a,b}\theta^2}{2} + o(\theta^2);$$

$$E_0 \exp \{isM_\theta(X_1)\} g_\theta(X_1) = \frac{bC_{a,b}(1+is)\theta^3}{3} + o(\theta^3);$$

$$E_0 \exp \{isM_\theta(X_1)\} g_\theta^2(X_1) = \frac{4C_{a,b}\theta^3}{3} + o(\theta^3).$$

**Доказательство.** Первое утверждение — разложение характеристической функции случайной величины  $M_\theta(X_1)$  в ряд — было получено в работе [1]. Второе и третье утверждения доказываются непосредственным взятием соответствующих интегралов и разложением результатов интегрирования в ряд в точке  $\theta = 0$ .  $\square$

**Лемма 3.7.** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  и произвольного действительного  $y \neq 0$

$$\int_x^\infty e^{-z^2} |\cos yz| dz < \int_x^\infty e^{-z^2} dz.$$

**Доказательство.** Фиксируем произвольное  $y \neq 0$  и рассмотрим функцию

$$u(z) = e^{-z^2} (1 - |\cos yz|).$$

Функция  $u(z)$  обращается в нуль в точках

$$z_k = \frac{\pi k}{y}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Обозначим через  $\bar{z}_1$  и  $\bar{z}_2$  произвольные точки серии  $z_k$ , лежащие правее  $x$  и следующие в серии друг за другом. Выберем  $\epsilon > 0$  так, чтобы  $\epsilon < (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)/2$ . Так как  $u(z) \geq 0$  для любого  $z$ , то по свойствам интегралов

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-z^2} dz - \int_x^\infty e^{-z^2} |\cos yz| dz &= \\ &= \int_x^\infty u(z) dz \geq \int_{\bar{z}_1+\epsilon}^{\bar{z}_2-\epsilon} u(z) dz > 0, \end{aligned}$$

так как на  $z \in (\bar{z}_1 + \epsilon, \bar{z}_2 - \epsilon)$  выполнено  $|\cos yz| < 1$ , а значит и  $u(z) > 0$ . Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  и произвольного действительного  $y \neq 0$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} |\cos yz| dz < \operatorname{erfc}(x).$$

**Лемма 3.8.** Для модуля характеристической функции  $f_{D_n}(s)$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |f_{D_n}(s)| &\leq \exp \left\{ -\frac{\epsilon_1 s^2}{n} \right\}, & |s| &\leq \sigma_1 \sqrt{n}; \\ |f_{D_n}(s)| &\leq q_d < 1, & |s| &\geq \sigma_1 \sqrt{n}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_1, \epsilon_1$  — положительные константы;  $q_d$  — положительная константа, определенная с точностью до  $a, b$ .

**Доказательство.** Рассмотрим характеристическую функцию случайной величины  $d_n(X_1)$ . По теореме 1.2 из [7] существуют положительные константы  $A_1$  и  $B_1$  такие, что

$$|f_{d_n}(s)| \leq 1 - B_1 s^2$$

для всех  $|s| \leq A_1$ . Пользуясь хорошо известной оценкой  $1 - z \leq e^{-z}$ , справедливой для любого  $z$ , получим, что для всех  $|s| \leq A_1$

$$|f_{d_n}(s)| \leq \exp \{-B_1 s^2\}.$$

Тогда из (12) имеем

$$|f_{D_n}(s)| = |f_{d_n}(tn^{-1/2}s)| \leq \exp \left\{ -\frac{B_1 t^2 s^2}{n} \right\}$$

для всех  $|s| \leq A_1 \sqrt{n}/t$ . Полагая  $\epsilon_1 = B_1 t^2$  и  $\sigma_1 = A_1/t$ , приходим к первому утверждению леммы. Покажем второе утверждение.

Для любого  $\theta > 0$  непосредственным интегрированием получаем, что

$$\begin{aligned} f_{d_\theta}(s) &= \\ &= \frac{\operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}) - i\sqrt{a}s) + \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}) + i\sqrt{a}s)}{2 \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a})) \exp \{isI_{a,b}\theta/2 + as^2\}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение, стоящее в числителе:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} - i\sqrt{a}s \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} + i\sqrt{a}s \right) &\equiv \\ &\equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a}) - i\sqrt{a}s}^\infty e^{-z^2} dz + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a}) + i\sqrt{a}s}^\infty e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})}^\infty e^{-(w^2 - 2i\sqrt{a}sw - as^2)} dw + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})}^\infty e^{-(w^2 + 2i\sqrt{a}sw - as^2)} dw = \\ &= \frac{4e^{as^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})}^\infty e^{-w^2} \cos 2\sqrt{a} sw dw. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу для  $f_{d_\theta}(s)$ , получим

$$|f_{d_\theta}(s)| = J(s) \equiv \frac{2|I(s)|}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))}, \quad (14)$$

где

$$I(s) = \int_{b/(2\sqrt{a})}^{\infty} e^{-w^2} \cos 2\sqrt{a} sw \, dw.$$

Обозначим подынтегральную функцию интеграла  $I(s)$  как  $z(w, s)$ . По признаку Вейерштрасса (теорема 7.8 из [8]) интеграл в выражении для  $I(s)$  сходится равномерно на множестве всех действительных  $s$ . Кроме того, для любого  $w_0 \geq b/(2\sqrt{a})$  функция  $z(w, s)$  равномерно на множестве  $b/(2\sqrt{a}) \leq w \leq w_0$  стремится к  $z(w, s_0)$  при  $s \rightarrow s_0$ , а значит по теореме 7.9 из [8] функция  $I(s)$  непрерывна на множестве всех действительных  $s$ . По признаку Вейерштрасса интеграл

$$\int_{b/(2\sqrt{a})}^{\infty} we^{-w^2} \sin 2\sqrt{a} sw \, dw$$

сходится равномерно на множестве всех действительных  $s$ . Отсюда согласно теореме 7.14 из [8] следует возможность дифференцирования интеграла  $I(s)$  по параметру  $s$  в любой точке  $s$ . Таким образом, для любого  $s$  взятием интеграла по частям имеем

$$\begin{aligned} I'(s) &= -2\sqrt{a} \int_{b/(2\sqrt{a})}^{\infty} we^{-w^2} \sin 2\sqrt{a} sw \, dw = \\ &= \sqrt{a} \exp\left\{-\frac{b^2}{4a}\right\} \sin bs + 2asI(s). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть  $s \neq 0$ . Тогда можно записать

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{I'(s)}{2as} - \frac{\sin bs}{2\sqrt{a} \exp\{b^2/(4a)\} s}; \\ |I(s)| &\leq \frac{|I'(s)|}{2a|s|} + \frac{1}{2\sqrt{a} \exp\{b^2/(4a)\} |s|}. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим  $|I'(s)|$ . По (15) имеем

$$|I'(s)| \leq 2\sqrt{a} \int_{b/(2\sqrt{a})}^{\infty} we^{-w^2} \, dw = \sqrt{a} \exp\left\{-\frac{b^2}{4a}\right\}.$$

Подставляя в (16), получим

$$|I(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{a} \exp\{b^2/(4a)\} |s|}.$$

Таким образом, можно утверждать, что

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} I(s) = 0. \quad (17)$$

Вернемся к (15). Очевидно, что вышеописанные свойства функции  $I(s)$  целиком переносятся на функцию  $J(s)$ . Кроме того,  $J(s) > 0$  для любого  $s$ . Так как функция  $J(s)$  четная, последнюю часть доказательства проведем только для положительных  $s$ .

Положим

$$q_d = \sup_{s \geq A_1} J(s),$$

где  $A_1$  — положительная константа, определенная при доказательстве первого утверждения леммы. Обозначим  $J_1 = J(A_1)$ . Фиксируем некоторое  $0 < \epsilon < J_1$ . По (17) найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $s > \delta$  можно утверждать, что  $J(s) < \epsilon$ . Тогда очевидно, что

$$\sup_{A_1 \leq s \leq \delta} J(s) = q_d.$$

Из непрерывности  $J(s)$  следует, что эта точная верхняя грань достигается, т. е. найдётся такое  $s_1$ , что  $A_1 \leq |s_1| \leq \delta$  и  $J(s_1) = q_d$ . Тогда по следствию к лемме 3.7  $q_d < 1$ . Тем самым доказано, что  $J(s) \leq q_d < 1$  для всех  $s \geq A_1$ .

Заметим, что в выражении (14)  $|f_{d_\theta}(s)|$  можно заменить на  $|f_{d_n}(s)|$ . При этом останется справедливой оценка

$$|f_{d_n}(s)| \leq q_d < 1 \text{ для всех } |s| \geq A_1.$$

Используя (12), перейдем к функции  $f_{D_n}(s)$ . Тогда можно утверждать, что

$$|f_{D_n}(s)| = |f_{d_n}(tn^{-1/2}s)| \leq q_d < 1$$

для всех  $|s| \geq \sigma_1 \sqrt{n}$  (где  $\sigma_1 = A_1/t$ ). Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 3.9.** Для модуля характеристической функции  $f_{M_n}(s)$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |f_{M_n}(s)| &\leq \exp\{-\epsilon_2 s^2/n\}, & |s| &\leq \sigma_2 \sqrt{n}; \\ |f_{M_n}(s)| &\leq q_h < 1, & |s| &\geq \sigma_2 \sqrt{n}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_2, \epsilon_2$  — положительные константы;  $q_h$  — положительная константа, определенная с точностью до неизвестных  $a, b, t$ .

**Доказательство.** Доказательство первого утверждения леммы аналогично доказательству первого утверждения леммы 3.8. Заметим, что в ходе доказательства вводятся некоторые положительные константы  $A_2$  и  $B_2$ , которые идентичны по смыслу (но не по значению) константам  $A_1$  и  $B_1$

из леммы 3.8. Перейдем к доказательству второго утверждения.

Для любого  $\theta > 0$  непосредственным интегрированием получаем

$$f_{m_\theta}(s) = \frac{1}{2 \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \times \\ \times \left[ (f_1 + f_2) e^{-(s+i\theta)(b+a\theta)^2/(a\theta^2)} + \right. \\ \left. + (f_3 + f_4) e^{-as(s+i\theta)} \right],$$

где

$$f_1 = \operatorname{erf} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a}\theta - is \left( \frac{b}{\sqrt{a}\theta} + \sqrt{a} \right) \right); \\ f_2 = \operatorname{erf} \left( -\frac{b}{2\sqrt{a}} + is \left( \frac{b}{\sqrt{a}\theta} + \sqrt{a} \right) \right); \\ f_3 = \operatorname{erfc} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a}\theta - is\sqrt{a} \right); \\ f_4 = \operatorname{erfc} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} + is\sqrt{a} \right).$$

Преобразуем сумму  $f_1 + f_2$  следующим образом:

$$f_1 + f_2 = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta-is(b/(\sqrt{a}\theta)+\sqrt{a})} e^{-z^2} dz + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-b/(2\sqrt{a})+is(b/(\sqrt{a}\theta)+\sqrt{a})} e^{-z^2} dz = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})-is(b/(\sqrt{a}\theta)+\sqrt{a})}^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta-is(b/(\sqrt{a}\theta)+\sqrt{a})} e^{-z^2} dz = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})}^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta} e^{-(w-is(b/(\sqrt{a}\theta)+\sqrt{a}))^2} dw = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{(s^2(a\theta+b)^2)/(a\theta^2)} \times \\ \times \int_{b/(2\sqrt{a})}^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta} e^{-w^2} e^{2is(\sqrt{a}+b/(\sqrt{a}\theta))w} dw.$$

Преобразуем сумму  $f_3 + f_4$  следующим образом:

$$f_3 + f_4 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta-is\sqrt{a}}^{\infty} e^{-z^2} dz + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})+is\sqrt{a}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \\ = \frac{4e^{as^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta}^{\infty} e^{-w^2} \cos 2s\sqrt{a}w dw + \\ + \frac{2e^{as^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{b/(2\sqrt{a})}^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta} e^{-w^2} (\cos 2s\sqrt{a}w - \\ - i \sin 2s\sqrt{a}w) dw.$$

Подставляя эти выражения в формулу для  $f_{m_\theta}(s)$  и пользуясь тем, что  $|\int f(z)dz| \leq \int |f(z)| dz$ ,  $|a+b| \leq |a|+|b|$ , получаем

$$|f_{m_\theta}(s)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \int_{b/(2\sqrt{a})}^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta} e^{-w^2} dw + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \times \\ \times \left| \int_{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}\theta}^{\infty} e^{-w^2} \cos 2s\sqrt{a}w dw \right| \leq \\ \leq J(s) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \int_{b/(2\sqrt{a})}^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}t} e^{-w^2} dw + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))} \left| \int_{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}t}^{\infty} e^{-w^2} \cos 2s\sqrt{a}w dw \right|.$$

Аналогично предыдущей лемме можно показать, что

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} J(s) = J_1 \equiv \frac{(2/\sqrt{\pi}) \int_{b/(2\sqrt{a})}^{b/(2\sqrt{a})+\sqrt{a}t} e^{-w^2} dw}{\operatorname{erfc}(b/(2\sqrt{a}))}.$$

При этом, так как  $t$  ограничено, то  $J_1 < 1$ . Очевидно также, что  $J(s) > 0$  для всех  $s$ . Так как функция  $J(s)$  четная, то в дальнейшем будем рассматривать только область  $s > 0$ .

Положим

$$q_h = \sup_{s \geq A_2} J(s),$$

где  $A_2$  — положительная константа, определенная при доказательстве первого утверждения леммы. Аналогично лемме 3.8 можно показать, что  $q_h < 1$ .

Заметим, что в оценке модуля характеристической функции очевидна возможность перехода от  $f_{m_\theta}(s)$  к  $f_{m_n}(s)$  и

$$|f_{m_n}(s)| \leq q_h < 1 \text{ для всех } |s| \geq A_2.$$

Используя (11), перейдем к функции  $f_{M_n}(s)$ . Тогда можно утверждать, что

$$|f_{M_n}(s)| = |f_{m_n}(tn^{-1/2}s)| \leq q_h < 1 \text{ для всех } |s| \geq \sigma_2\sqrt{n},$$

где  $\sigma_2 = A_2/t$ . Лемма доказана.  $\square$

Перейдем к доказательству основных результатов.

## 4 Проверка условий теоремы 3.2.1

В этом разделе проверим условия теоремы 3.2.1 из [5] и тем самым покажем справедливость установленной на эвристическом уровне формулы (3).

### 4.1 Условие 1

Положим  $\tau_n = n^{-1/4}$ . Покажем, что условие 1 выполняется с

$$\Phi_1(x) = \Phi\left(\frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2}\right), \quad \Phi_2(x) = 0.$$

При этом

$$p(x) = \Phi'_1(x) = \frac{1}{t\sqrt{I_{a,b}}}\varphi\left(\frac{x}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2}\right).$$

**Пункт (i).** Так как  $\tau_n = n^{-1/4}$ , выполнение условия 1 с такими  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  следует автоматически из леммы 3.1.

**Пункт (ii).** Выберем  $\beta$  произвольным образом, но так, чтобы  $0 < \beta < 2$ . Фиксируем произвольное  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Заметим, что для любого множества  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  справедливо следующее представление:

$$P_{n,1}(A) = E_{n,0} \exp\{\Lambda_n\} \mathbf{1}(A), \quad (18)$$

где  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра множеств в  $\mathbb{R}^n$ .

Обозначим через  $x_1$  такое  $x \leq x_0$ , на котором функция  $P_{n,0}(x \leq \Lambda_n \leq x + \tau_n^{2+\beta})$  достигает своего супремума. Очевидно, что

$$\sup_{x \in X} f(x)g(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) \sup_{x \in X} g(x), \quad (19)$$

где  $f(x), g(x) \geq 0$  — произвольные функции, а  $X$  — некоторое множество. Тогда для любого  $x \leq x_0$  в

силу представления (18), замечания (19) и непрерывности распределения случайной величины  $\Lambda_n$  при любой гипотезе по лемме 3.1 имеем

$$\begin{aligned} & \tau_n^{-2} P_{n,1} \{x \leq \Lambda_n \leq x + \tau_n^{2+\beta}\} = \\ & = \tau_n^{-2} E_{n,0} \exp\{\Lambda_n\} \mathbf{1} \{x \leq \Lambda_n \leq x + \tau_n^{2+\beta}\} \leq \\ & \leq \tau_n^{-2} \exp\{x + \tau_n^{2+\beta}\} \times \\ & \times E_{n,0} \mathbf{1} \{x \leq \Lambda_n \leq x + \tau_n^{2+\beta}\} \leq \\ & \leq \tau_n^{-2} \exp\{x_0 + \tau_n^{2+\beta}\} \times \\ & \times P_{n,0} \{x_1 \leq \Lambda_n \leq x_1 + \tau_n^{2+\beta}\} = \\ & = \tau_n^\beta \exp\{x_0 + \tau_n^{2+\beta}\} \times \\ & \times \frac{P_{n,0}(\Lambda_n < x_1 + \tau_n^{2+\beta}) - P_{n,0}(\Lambda_n < x_1)}{\tau_n^{2+\beta}} = \\ & = \tau_n^\beta \exp\{x_0 + \tau_n^{2+\beta}\} \times \\ & \times \left\{ \left[ \Phi\left(\frac{x_1 + \tau_n^{2+\beta}}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Phi\left(\frac{x_1}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2}\right) \right] \tau_n^{-2-\beta} + \right. \\ & \left. + \frac{b^2 C_{a,b} t}{3\sqrt{I_{a,b}}} \left(\frac{x_1}{t\sqrt{I_{a,b}}} - \frac{t}{2}\right) \left[ \varphi\left(\frac{x_1 + \tau_n^{2+\beta}}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \varphi\left(\frac{x_1}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2}\right) \right] \tau_n^{-\beta} + \right. \\ & \left. + o(1) \right\} = \tau_n^\beta \exp\{x_0 + \tau_n^{2+\beta}\} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{t\sqrt{I_{a,b}}} \varphi\left(\frac{x_1}{t\sqrt{I_{a,b}}} + \frac{\sqrt{I_{a,b}t}}{2}\right) + o(1) \right\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак, условие выполнено.

### 4.2 Условие 2

В силу непрерывности распределения случайной величины  $\Lambda_n$  при обеих гипотезах в качестве  $D_{n,i}$  можно выбрать  $\mathbb{R}^n$ . Тогда все случайные величины «с волной» тождественно равны соответствующим случайным величинам «без волны» и фигурирующие в записи  $S_n$  последовательности  $a_n$  и  $b_n$  равны тождественно  $t$  и  $-I_{a,b}t^2/2$  соответственно.

Положим  $\gamma_n = n^{-\nu}$ ,  $0 < \nu < 1/8$ .

**Пункт (i).** Очевиден при выбранных  $D_{n,i}$ .

**Пункт (ii).** Для индикатора  $\mathbf{1}_{(\gamma_n, \infty)}(|\Delta_n|)$  справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{1}_{(\gamma_n, \infty)}(|\Delta_n|) \leq \left(\frac{|\Delta_n|}{\gamma_n}\right)^m, \quad (20)$$

где  $m$  — произвольное неотрицательное число. Положим  $m = 1$ . Тогда, используя лемму 3.3, имеем

$$\begin{aligned} \tau_n^{-2} \gamma_n^{-1} \mathbf{E}_{n,0} \Delta_n^2 \mathbf{1}_{(\gamma_n, \infty)}(|\Delta_n|) &\leq \\ &\leq \tau_n^{-2} \gamma_n^{-2} \mathbf{E}_{n,0} |\Delta_n|^3 \leq \\ &\leq C_1 n^{2\nu+1/2-3/4} = C_1 n^{2\nu-1/4} \rightarrow 0 \\ &\text{при } n \rightarrow \infty \text{ и } 0 < \nu < \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

где  $C_1$  — положительная константа.

**Пункт (iii).** Полагая в (20)  $m = 2$ , по лемме 3.3 имеем

$$\begin{aligned} \tau_n^{-2} \mathbf{E}_{n,0} \exp\{\Lambda_n\} |\Delta_n| \mathbf{1}_{(\gamma_n, \infty)}(|\Delta_n|) &\leq \\ &\leq \tau_n^{-2} \gamma_n^{-2} \mathbf{E}_{n,0} \exp\{\Lambda_n\} |\Delta_n|^3 \leq \\ &\leq \tau_n^{-2} \gamma_n^{-2} \sqrt{\mathbf{E}_{n,0} \exp\{2\Lambda_n\} \mathbf{E}_{n,0} |\Delta_n|^6} \leq \\ &\leq n^{2\nu+1/2} \sqrt{C_2 n^{-3/2}} = \\ &= \sqrt{C_2} n^{2\nu+1/2} n^{-3/4} = \sqrt{C_2} n^{2\nu-1/4} \rightarrow 0 \\ &\text{при } n \rightarrow \infty \text{ и } 0 < \nu < \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

где  $C_2$  — положительная константа. Здесь использовано легко проверяемое соотношение

$$\mathbf{E}_{n,0} \exp\{2\Lambda_n\} = \mathcal{O}(1).$$

### 4.3 Условие 3

Выберем последовательности  $\Psi(n)$  и  $\bar{\Psi}(n)$  такими:

$$\Psi(n) = n^{\nu/4}; \quad (21)$$

$$\bar{\Psi}(n) = n^{\beta+2}, \quad (22)$$

где  $\nu$  — константа, фигурирующая в показателе степени последовательности  $\gamma_n$  условия 2, а  $\beta$  — из условия 1. Такие последовательности будут удовлетворять всем требованиям, обозначенным в формулировке условия 3. По результатам работы [1] положим

$$\begin{aligned} \Pi &\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{4b^2 C_{a,b} t^3}{3}\right); \\ \Lambda &\sim \mathcal{N}\left(-\frac{t^2 I_{a,b}}{2}, \frac{t^2 I_{a,b}}{2}\right). \end{aligned}$$

В работе [1] также было показано, что случайные величины  $\Pi$  и  $\Lambda$  независимы.

**Пункт (i).** Преобразуем  $q_{n,l}$  следующим образом:

$$q_{n,l} = \bar{q}_{n,l}(s) + R_l(s), \quad l = 0, 1,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{q}_{n,l}(s) &\equiv -\frac{1}{l+1} \mathbf{E}_{n,0} \exp\{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n)^{l+1}; \\ R_l(s) &\equiv \mathbf{E}_{n,0} \exp\{is\Lambda_n\} \int_{\tau_n^{-1} \Delta_n}^0 z^l (e^{is\tau_n z} - 1) dz. \end{aligned}$$

Для  $R_l(s)$  справедлива следующая оценка:

$$|R_l(s)| \leq |s| \tau_n \mathbf{E}_{n,0} |\tau_n^{-1} \Delta_n|^{l+2}.$$

При  $l = 0$  по лемме 3.3 имеем

$$|R_0(s)| \leq |s| \tau_n^{-1} \mathbf{E}_{n,0} |\Delta_n|^2 \leq C_3 |s| n^{-1/4},$$

где  $C_3$  — положительная константа. При  $l = 1$  по лемме 3.3 имеем

$$|R_1(s)| \leq |s| \tau_n^{-2} \mathbf{E}_{n,0} |\Delta_n|^3 \leq C_4 |s| n^{-1/4},$$

где  $C_4$  — положительная константа.

Так как  $\Psi^2(n) n^{-1/4} \rightarrow 0$ , то

$$\int_{|s| \leq \Psi(n)} |R_l(s)| ds \rightarrow 0, \quad l = 0, 1.$$

Тогда для доказательства справедливости утверждений пункта (i) достаточно будет установить, что

$$\left| \int_{|s| \leq \Psi(n)} (\bar{q}_{n,l}(s) - q_l(s)) ds \right| \rightarrow 0, \quad l = 0, 1.$$

Для этого по теореме о мажорируемой сходимости достаточно показать поточечную сходимость  $\bar{q}_{n,l}(s)$  к  $q_l(s)$ , а также существование интегрируемой на  $|s| \leq \Psi(n)$  функции  $r_l(s)$  такой, что  $\bar{q}_{n,l}(s) \leq r_l(s)$ .

**Случай  $l = 0$ .** По лемме 3.4 можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n,0} \exp\{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n) &= \\ &= -bn^{5/4} f_{M_n}^{n-1}(s) \mathbf{E}_0 \exp\{isM_n(X_1)\} g_n(X_1) = \\ &= -bn^{5/4} f_{M_n}^{n-1}(s) \mathbf{E}_0 (1 + \delta_1(s, X_1)) g_n(X_1), \end{aligned}$$

где

$$|\delta_1(s, X_1)| \leq |s| |M_n(X_1)|.$$

По лемме 3.2 для  $|s| \leq \Psi(n)$  и при достаточно больших  $n$

$$|f_{M_n}^{n-1}(s)| \leq \exp\left\{-\frac{(n-1)\epsilon_2 s^2}{n}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\epsilon_2 s^2}{2}\right\}.$$

Тогда по леммам 3.2 и 3.5

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{n,0} \exp\{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n)| &\leq \\ &\leq bn^{5/4} \exp\left\{-\frac{\epsilon_2 s^2}{2}\right\} (|\mathbf{E}_0 g_n(X_1)| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + |s| \mathbf{E}_0 |M_n(X_1) g_n(X_1)| \leq \\
 & \leq b n^{5/4} \exp \left\{ -\frac{\epsilon_2 s^2}{2} \right\} \left( C_5 n^{-3/2} + C_6 |s| n^{-5/4} \right) = \\
 & = r_0(s) \equiv b \exp \left\{ -\frac{\epsilon_2 s^2}{2} \right\} \left( C_5 n^{-1/4} + C_6 |s| \right),
 \end{aligned}$$

где  $C_5, C_6$  — положительные константы. Так как функция  $r_0(s)$  интегрируема на  $|s| \leq \Psi(n)$ , то требование ограниченности  $\bar{q}_{n,0}(s)$  интегрируемой функцией выполнено. Покажем поточечную сходимость  $\bar{q}_{n,0}(s)$  к  $q_0(s)$ , т. е.

$$\mathbf{E}_{n,0} \exp \{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n) \rightarrow \mathbf{E} \exp \{is\Lambda\} \Pi.$$

Имеем

$$\mathbf{E} \exp \{is\Lambda\} \Pi = \mathbf{E} \exp \{is\Lambda\} \mathbf{E} \Pi = 0,$$

поэтому достаточно показать, что для любого  $s \in \mathbb{R}$

$$\tau_n^{-1} \mathbf{E}_{n,0} \exp \{is\Lambda_n\} \Delta_n \rightarrow 0.$$

По леммам 3.4 и 3.6 для любого  $s \in \mathbb{R}$  имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{n,0} \exp \{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n) = \\
 & = -b n^{5/4} f_{M_n}^{n-1}(s) \mathbf{E}_0 \exp \{isM_n(X_1)\} g_n(X_1) = \\
 & = -b n^{5/4} \left( 1 + \frac{is(is-1)I_{a,b}t^2}{2n} + o(n^{-1}) \right)^{n-1} \times \\
 & \quad \times \left( \frac{bC_{a,b}(1+is)t^3}{3n^{3/2}} + o(n^{-3/2}) \right) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

**Случай  $l = 1$ .** По лемме 3.4 запишем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{n,0} \exp \{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n)^2 = b^2 n^{3/2} f_{M_n}^{n-2}(s) \times \\
 & \quad \times \left( f_{M_n}(s) \mathbf{E}_0 \exp \{isM_n(X_1)\} g_n^2(X_1) + \right. \\
 & \quad \left. + (n-1) [\mathbf{E}_0(1 + \delta_2(s, X_1)) g_n(X_1)]^2 \right),
 \end{aligned}$$

где

$$|\delta_2(s, X_1)| \leq |s| |M_n(X_1)|.$$

По лемме 3.9 для  $|s| \leq \Psi(n)$  и при достаточно больших  $n$

$$|f_{M_n}^{n-2}(s)| \leq \exp \left\{ -\frac{(n-2)\epsilon_2 s^2}{n} \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\epsilon_2 s^2}{3} \right\}.$$

Тогда по леммам 3.2 и 3.5

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{E}_{n,0} \exp \{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n)^2| \leq \\
 & \leq b^2 n^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\epsilon_2 s^2}{3} \right\} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \mathbf{E}_0 g_n^2(X_1) + n |\mathbf{E}_0 g_n(X_1)|^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 2n |s| |\mathbf{E}_0 g_n(X_1)| \mathbf{E}_0 |M_n(X_1) g_n(X_1)| + \right. \\
 & \quad \left. + n s^2 (\mathbf{E}_0 |M_n(X_1) g_n(X_1)|)^2 \right) \leq \\
 & \leq b^2 n^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\epsilon_2 s^2}{3} \right\} \times \\
 & \times \left( C_7 n^{-3/2} + C_8 n^{-2} + C_9 |s| n^{-7/4} + C_{10} s^2 n^{-3/2} \right) = \\
 & = r_1(s) \equiv b^2 \exp \left\{ -\frac{\epsilon_2 s^2}{3} \right\} \times \\
 & \times \left( C_7 + C_8 n^{-1/2} + C_9 |s| n^{-1/4} + C_{10} s^2 \right),
 \end{aligned}$$

где  $C_7, C_8, C_9, C_{10}$  — положительные константы. Так как  $r_1(s)$  интегрируема на  $|s| \leq \Psi(n)$ , то требование ограниченности  $\bar{q}_{n,1}(s)$  интегрируемой функцией выполнено. Покажем поточечную сходимость  $\bar{q}_{n,1}(s)$  к  $q_1(s)$ , т. е.

$$\mathbf{E}_{n,0} \exp \{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n)^2 \rightarrow \mathbf{E} \exp \{is\Lambda\} \Pi^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \exp \{is\Lambda\} \Pi^2 = \mathbf{E} \exp \{is\Lambda\} \mathbf{E} \Pi^2 = \\
 & = \frac{4b^2 C_{a,b} t^3}{3} \exp \left\{ -\frac{s^2 t^2 I_{a,b}}{2} - \frac{ist^2 I_{a,b}}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

По леммам 3.4 и 3.6 для любого  $s \in \mathbb{R}$  получаем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{n,0} \exp \{is\Lambda_n\} (\tau_n^{-1} \Delta_n)^2 = b^2 n^{3/2} f_{M_n}^{n-2}(s) \times \\
 & \quad \times \left( f_{M_n}(s) \mathbf{E}_0 \exp \{isM_n(X_1)\} g_n^2(X_1) + \right. \\
 & \quad \left. + (n-1) [\mathbf{E}_0 \exp \{isM_n(X_1)\} g_n(X_1)]^2 \right) = \\
 & = b^2 n^{3/2} \left( 1 + \frac{is(is-1)I_{a,b}t^2}{2n} + o(n^{-1}) \right)^{n-2} \times \\
 & \quad \times \left[ \left( 1 + \frac{is(is-1)I_{a,b}t^2}{2n} + o(n^{-1}) \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left( \frac{4C_{a,b}t^3}{3n^{3/2}} + o(n^{-3/2}) \right) + \\
 & \quad \left. + (n-1) \left( \frac{b^2 C_{a,b}^2 (1+is)^2 t^6}{9n^3} + o(n^{-3}) \right) \right] \rightarrow \\
 & \rightarrow \exp \left\{ -\frac{s^2 t^2 I_{a,b}}{2} - \frac{ist^2 I_{a,b}}{2} \right\} \times
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \times \left[ 1 \times \frac{4b^2 C_{a,b} t^3}{3} + 0 \right] = \\ & = \frac{4b^2 C_{a,b} t^3}{3} \exp \left\{ -\frac{s^2 t^2 I_{a,b}}{2} - \frac{i s t^2 I_{a,b}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

**Пункт (ii).** Используя (21) и (22), получим

$$\tilde{\Psi}(n) = \log \bar{\Psi}(n) \Psi^{-1}(n) = \left( \beta + 2 - \frac{\nu}{4} \right) \log n.$$

**Третий предел.** В соответствии с (9) можно записать

$$f_{S_n}(s) = (f_{D_n}(s))^n.$$

Очевидно, что  $\tau_n^{-1} > \tilde{\Psi}(n)$  при больших  $n$ . Тогда по лемме 3.8

$$\begin{aligned} & \tau_n^{-1} \max(\tilde{\Psi}(n), \tau_n^{-1}) \sup_{\Psi(n) \leq |s| \leq \tilde{\Psi}(n)} |\mathbf{E}_{n,0} \exp\{i s S_n\}| = \\ & = \sqrt{n} \max \left\{ \left[ \sup_{n^{\nu/4} \leq |s| \leq \sigma_1 \sqrt{n}} |f_{D_n}(s)| \right]^n, \right. \\ & \quad \left. \left[ \sup_{\sigma_1 \sqrt{n} \leq |s| \leq n^{\beta+2}} |f_{D_n}(s)| \right]^n \right\} = \\ & = \sqrt{n} \max \left\{ \exp \left\{ -\epsilon_1 n^{\nu/2} \right\}, q_d^n \right\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Первый предел.** В соответствии с леммой 3.4 и неравенством Коши–Буняковского имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{n,0} \exp\{i s S_n\} \Delta_n| & \leq b n |f_{D_n}(s)|^{n-1} \mathbf{E}_0 |g_n(X_1)| \leq \\ & \leq C_{11} \sqrt[4]{n} |f_{D_n}(s)|^{n-1}, \end{aligned}$$

где  $C_{11}$  — положительная константа. По лемме 3.8 для всех  $|s| \leq \sigma_2 \sqrt{n}$  при  $n \geq 2$

$$|f_{D_n}(s)|^{n-1} \leq \exp \left\{ -\frac{(n-1)\epsilon_1 s^2}{n} \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\epsilon_1 s^2}{2} \right\}.$$

Тогда аналогично случаю третьего предела

$$\begin{aligned} & \tau_n^{-2} \tilde{\Psi}(n) \sup_{\Psi(n) \leq |s| \leq \tilde{\Psi}(n)} |\mathbf{E}_{n,0} \exp\{i s S_n\} \Delta_n| \leq \\ & \leq C_{12} n^{3/4} \log n \max \left\{ \exp \left\{ -\frac{\epsilon_1 n^{\nu/2}}{2} \right\}, q_d^{n-1} \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $C_{12}$  — некоторая положительная константа.

**Второй предел.** В соответствии с (8) можно записать

$$f_{\Lambda_n}(s) = (f_{M_n}(s))^n.$$

Тогда по лемме 3.9, повторяя схему доказательства для первого предела, имеем

$$\begin{aligned} & \tau_n^{-1} \max \left( \tilde{\Psi}(n), (\Psi^{-1}(n) - \bar{\Psi}^{-1}(n)) \tau_n^{-1} \right) \times \\ & \quad \times \sup_{\Psi(n) \leq |s| \leq \tilde{\Psi}(n)} |\mathbf{E}_{n,0} \exp\{i s \Lambda_n\}| = \\ & \quad = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n^{\nu/4}} - \frac{1}{n^{\beta+2}} \right) \times \\ & \quad \times \max \left\{ \exp \left\{ -\epsilon_2 n^{\nu/2} \right\}, q_h^n \right\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство равенства этого предела нулю завершает проверку условий теоремы.

## 5 Заключение

Теперь можно применить теорему 3.2.1 из работы [5], а значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\beta_n^* - \beta_n) = \frac{1}{2} e^{\tilde{u}_\alpha} \mathbf{D}(\Pi | \Lambda = \tilde{u}_\alpha) p(\tilde{u}_\alpha),$$

где  $\tilde{u}_\alpha = \Phi_1^{-1}(1 - \alpha)$ . Из условия 1 (см. предыдущий раздел)

$$\tilde{u}_\alpha = t \sqrt{I_{a,b}} u_\alpha - \frac{I_{a,b} t^2}{2},$$

где  $u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ . Тогда

$$p(\tilde{u}_\alpha) = \Phi_1'(x) \Big|_{x=\tilde{u}_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{I_{a,b} t}} \varphi(u_\alpha).$$

Так как случайные величины  $\Pi$  и  $\Lambda$  независимы, то  $\mathbf{D}(\Pi | \Lambda = \tilde{u}_\alpha) = 4b^2 C_{a,b} t^3 / 3$ . После очевидных преобразований окончательно получаем, что

$$\frac{1}{2} e^{\tilde{u}_\alpha} \mathbf{D}(\Pi | \Lambda = \tilde{u}_\alpha) p(\tilde{u}_\alpha) = \frac{2b^2 C_{a,b} t^2}{3 \sqrt{I_{a,b}}} \varphi(u_\alpha - t \sqrt{I_{a,b}}).$$

Таким образом, получено формальное доказательство формулы (3).

## Литература

1. Бенинг В. Е., Лямин О. О. О мощностях критериев в случае обобщенного распределения Лапласа // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 79–85.
2. Kotz S., Kozubowski T. J., Podgorski K. The Laplace distribution and generalizations: A revisit with applications to communications, economics, engineering and finance. — Boston: Birkhauser, 2001.
3. Бенинг В. Е., Королёв В. Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и её применения, 2008. Т. 2. Вып. 2. С. 19–34.

4. *Бенинг В. Е., Королёв Р. А.* О предельном поведении мощностей критериев в случае распределения Лапласа // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 2. С. 66–77.
5. *Bening V. E.* Asymptotic theory of testing statistical hypotheses. — Utrecht: VSP, 2000.
6. *Chibisov D. M., van Zwet W. R.* On the Edgeworth expansion for the logarithm of the likelihood ratio. I // Теория вероятностей и ее применения, 1984. Т. 29. № 3. С. 417–439.
7. *Petrov V. V.* Sums of independent random variables. — Berlin: Springer-Verlag, 1975.
8. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ: Продолжение курса. — М.: МГУ, 1987.

# НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ВЫБОРА ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ ОТОБРАЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ СИТУАЦИОННОГО ЦЕНТРА

А. А. Зацаринный<sup>1</sup>, К. Г. Чупраков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассмотрены основные этапы выбора систем отображения информации ситуационных центров (СЦ), среди которых выделен этап выбора технологии. Рассмотрены технологии систем отображения информации (СОИ), используемые в СЦ. Предложены основные параметры СОИ и методический подход к выбору технологии на основании метода исключения по параметрам.

**Ключевые слова:** системы отображения информации; ситуационный центр; технологии отображения информации; проблема выбора, метод исключения

## 1 Введение

В настоящее время резко возрос интерес к ситуационному подходу в различных сферах человеческой деятельности. Создаются СЦ государственных органов управления и силовых ведомств. На крупных предприятиях создаются специальные центры для анализа работы подразделений с использованием методов ситуационного моделирования для прогнозирования событий. В образовательных учреждениях внедряются методы ситуационного обучения [1–3].

При этом основная задача современного СЦ — поддержка процессов принятия решений полномочным должностным лицом или органом на основе создания наглядных представлений (образов) возникающих ситуаций в подконтрольной сфере и визуализации результатов их анализа в наиболее удобном для принятия решения виде [4]. Кроме того, СЦ должен обеспечивать предоставление руководителю не только результатов анализа текущей ситуации, но и тенденций ее развития, позволяющих прогнозировать дальнейшее развитие ситуации [5, 6].

В структурно-функциональном плане СЦ представляется как взаимоувязанная совокупность трех компонентов: информационно-аналитического, информационно-технологического и технического [1]. Первый компонент определяет перечень типовых функциональных задач, решаемых СЦ в рамках заданной предметной области, второй — технологии их решения и соответствующие программные комплексы, третий — аппаратно-про-

граммные комплексы, непосредственно реализующие задачи СЦ.

Одним из наиболее сложных элементов технического компонента является СОИ.

Средства отображения визуальной информации — мощный и эффективный инструмент, позволяющий обеспечить виртуальное погружение оперативного штаба СЦ в условия реальной ситуации. И эффективность принятого решения во многом зависит от того, насколько качественно произошло взаимодействие между информационной системой и лицом, принимающим решение. Поэтому правильный выбор средств отображения информации является одной из ключевых задач при реализации СЦ.

Проблема выбора СОИ для СЦ представляет собой задачу группового выбора [7], в которой учитываются и свойства самого оборудования, и вопросы организационного взаимодействия, и, конечно, полная стоимость решения.

Решение задачи выбора средств отображения визуальной информации предлагается осуществлять в три этапа:

- (1) постановка задачи и обоснование направлений ее решения;
- (2) выбор технологии для создания СОИ;
- (3) выбор технических средств, обеспечивающих создание СОИ в соответствии с заданными требованиями.

Выделение выбора технологии в отдельный этап связано с тем, что технология, на базе которой реализовано средство отображения, в значительной

<sup>1</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, AZatsarinny@ipiran.ru

<sup>2</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, chkos@rambler.ru

степени определяет его характеристики и условия эксплуатации. При этом появляется возможность взглянуть на суть технологии и выявить ее возможные слабые места во время реализации и эксплуатации системы отображения. Кроме того, такой подход позволяет значительно сузить круг потенциальных решений задачи выбора. Технология, признанная неприемлемой, позволяет исключить из рассмотрения все возможные решения, которые основаны на этой технологии.

В статье рассматриваются общие методические подходы к выбору технологии средства отображения, а также приводятся результаты сравнительного анализа технологий.

## 2 Постановка задачи и общий методический подход к выбору технологии

Создание любого программно-аппаратного комплекса должно начинаться с корректной постановки системотехнической задачи, включающей несколько шагов:

- осознание необходимости в реализации программно-аппаратного комплекса;
- формирование причин, обоснование получаемых преимуществ, выявление потенциальных рисков и слабых мест;
- оценку материальных, организационных и человеческих ресурсов, имеющихся в распоряжении и необходимых для решения задачи;
- формирование общего замысла системотехнической задачи с определением целей, задач и критериев;
- формирование условия задачи: требования, параметры, критерии.

При этом постановка задачи должна опираться на основополагающие принципы, описанные в [8, 9].

Общий методологический подход включает:

- обоснование перечня требований и параметров, выдвигаемых со стороны трех компонентов программно-аппаратного комплекса: технологического, функционального, человеческого:  $R = \{r_i | i = 1, \dots, p\}$ ;
- определение совокупности исходных условий  $M = \{m_j | j = 1, \dots, q\}$ , включая нормативно-правовые, особенности проектирования, возможности и тенденции технологий систем отображения;

- формирование общих альтернатив  $S = \{s_n | n = 1, \dots, \nu\}$  построения и функционирования системы отображения, представляющей собой сложную систему из нескольких компонентов, описываемую множеством параметров  $X_n = \{x_k^n | k = 1, \dots, p + q\}$ . Таким образом, существует инъекция  $\varphi$ : из  $S$  в  $p + q$ -мерное пространство над полем вещественных чисел и каждая альтернатива  $s_n$  представляется в виде вектора  $X_n = \varphi(s_n)$  из евклидова пространства размерности  $p + q$  над полем вещественных чисел;
- выбор основного критерия — показателя эффективности  $E$  на множестве альтернатив: сопоставление каждой альтернативе из  $S$  некоторого вещественного числа  $E(s)$ . Основным критерий должен соответствовать обоснованному значению ценности той или иной альтернативы в данной конкретной задаче.

Таким образом, в общем виде постановка задачи заключается определении того номера  $z$ , который максимизирует критерий ценности  $E$ , соблюдая при этом все необходимые условия задачи  $M$ :

$$E(X_z) = E(\varphi(s_z)) = \max_n E(X_n).$$

Сформулированная задача носит оптимизационный характер и потому с точки зрения теории исследования операций набор  $X_z$  является оптимальным набором параметров.

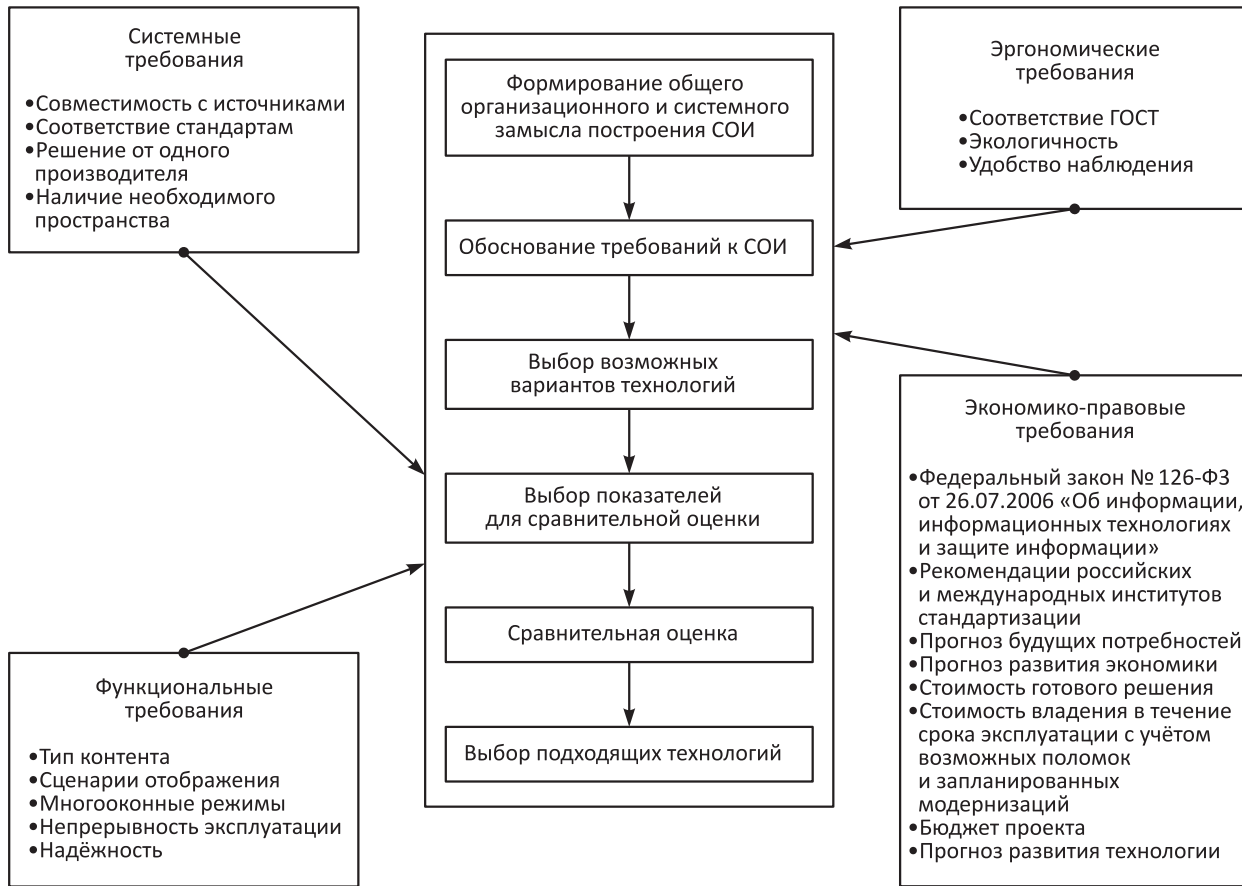
Второй особенностью поставленной задачи является ее сложность ввиду большого объема информации, который необходимо получить, формализовать и проанализировать. Для упрощения можно воспользоваться принципом маргинальности [8], предусматривающим:

- декомпозицию общей задачи на ряд частных;
- оптимизацию одного из параметров при задании ограничения на остальные параметры;
- обоснованное применение сразу нескольких критериев эффективности  $E$  с учетом особенностей решаемой задачи.

В основу общего подхода к выбору средства отображения информации и его технологии ложится совокупность требований, обусловленных нормативными документами, правовыми актами, техническими особенностями и экономической оправданностью [10] (рис. 1).

Фактически выбор технологии осуществляется в три этапа.

На первом — составляется полный перечень технологий, на базе которых возможна реализа-



**Рис. 1** Общая схема методического подхода к выбору технологии системы отображения информации ситуационного центра

ция аппаратно-программного комплекса. При этом необходимо учитывать существующие требования конкретной задачи, которым результирующая система должна соответствовать безусловно.

На втором — производится выбор показателей для сравнительной оценки отобранных технологий. В данной статье предложен основной набор таких показателей.

На третьем — реализуется некоторая методика, предлагающая алгоритм рационального выбора решения.

### 3 Особенности современных технологий систем отображения

Современные системы отображения информации ситуационных центров строятся с использованием следующих технологий:

- плазменной;

- жидкокристаллической;
- проекционной;
- светодиодной.

В этот перечень не вошли технологии печатания на бумажных носителях, которые носят достаточно специфичный характер и требуют, вообще говоря, иного подхода к их выбору, а также технология CRT, или ЭЛТ (cathode ray tube, электронно-лучевая трубка), которая не используется при реализации ситуационных центров.

#### 3.1 Плазменная технология

К преимуществам плазменной технологии можно отнести почти мгновенную реакцию на изменения изображения, практически полные углы обзора, качественную цветопередачу. Кроме того, плазменная технология способна давать яркость более 1000 кд/м<sup>2</sup>.

К основным недостаткам плазменной технологии можно отнести существенное энергопотреб-

ление и высокое тепловыделение. Поэтому любая плазменная панель снабжается эффективной системой охлаждения и имеет достаточно низкий КПД.

Другим серьезным минусом плазменной технологии является относительно недолгий срок службы, особенно в тех случаях, когда на дисплей на длительное время выводится статичное изображение. Причиной тому — ускорение выгорания люминофоров.

Серьезным ограничением для производителей плазменных дисплеев является минимальный размер пиксела, который не может быть уменьшен ниже некоторого предела в силу физико-химических взаимодействий, происходящих в матрице. По этой причине сегодня не существует плазменных дисплеев с диагональю менее 32 дюймов. Зато для больших диагоналей (65 дюймов и более) плазменные дисплеи оказались сравнительно недорогими и надежными.

### 3.2 Жидкокристаллическая технология

Жидкокристаллическая технология прошла один из самых длинных путей в своем развитии и потому успела устранить большинство своих недостатков, предоставляя взамен множество уникальных преимуществ [11]. Технология позволяет изготавливать средства отображения практически любого размера, сохраняя при этом наибольшую плотность отображения информации. Ввиду относительно небольшого тепловыделения и энергопотребления дисплеев на базе ЖК-технологии именно они используются для работы в тяжелых условиях окружающей среды.

Преимуществом ЖК-технологии перед плазменной является более устойчивая работа со статичным изображением. Тем не менее и она имеет ограничения по этому параметру — со статичным изображением рекомендуется работать не более 20 ч в сутки.

К другим преимуществам ЖК-технологии стоит отнести высокий уровень яркости и контрастности, а также большие углы обзора, что позволяет работать с дисплеями даже при высокой яркости внешнего освещения.

К недостаткам технологии относится неравномерность подсветки, резкое увеличение стоимости при производстве матриц большой площади из-за повышения риска возникновения битых пикселей. Так же, как и при плазменной технологии, контакты подходят к матрице сбоку, поэтому при построении на базе ЖК-технологии полиэкранов образуется заметный шов.

### 3.3 Проекционная технология

Проекционная технология сегодня реализуется в двух вариантах:

- составная — проектор и экран;
- видеокубы.

При этом система проектор—экран может быть фронтальной и задней проекции. Разница в том, что в первом случае наблюдатель и проектор находятся в одном полупространстве относительно плоскости экрана и используется отражающий экран. В другом случае наблюдатель и проектор находятся по разные стороны от просветного экрана.

Видеокубы представляют собой системы обратной проекции, служащие как настроенные готовые дисплеи, использующие DLP-проекторы внутри и оборудованные сложной электроникой и механизмами, необходимыми для удобного и эффективного использования.

Технология формирующей матрицы видеопроектора бывает следующих видов [12]:

- CRT (Cathode Ray Tube);
- DLP (Digital Light Processing);
- 3LCD (Liquid Cristal Display);
- D-ILA (Image Lighting Amplifier).

Наиболее часто используемой является технология DLP, поскольку она имеет ряд уникальных преимуществ, необходимых для приложений критичной важности и круглосуточной эксплуатации. Сегодня наблюдается плавный переход в DLP-технологии от использования УНР-ламп к LED-подсветке, что обеспечивает значительно более глубокие цвета, отказ от подвижных компонентов, а также не требует обслуживания в течение не менее 5 лет использования.

### 3.4 Светодиодная технология

К плюсам светодиодной технологии можно отнести высокую надежность, долгий срок службы, устойчивость к низким и очень низким температурам, высокую прочность. Однако дисплеи, созданные на базе матрицы светодиодов, обладает крайне низкой информативной емкостью по сравнению с предыдущими технологиями. Кроме того, светодиоды быстро теряют свои свойства при высоких температурах и потому требуют особого внимания к системам охлаждения.

Светодиодные матрицы сегодня используются в проекционной и жидкокристаллической технологии в качестве модулей подсветки вместо обычных ламп. Это позволяет значительно улучшить

качество изображения, а в случае с проекционной технологией обеспечивает улучшение эксплуатационных характеристик устройств.

## 4 Сравнительная оценка технологий

### 4.1 Основные критерии сравнения средств отображения информации

В качестве главных критериев для сравнительной оценки технологий рассмотрим основные характеристики дисплеев, важные с точки зрения установки и использования.

**Размер средства отображения** — один из наиболее существенных параметров, который определяет проектирование средства отображения. Под ним понимается геометрический размер активной (информативной) части поверхности СОИ. Возможно построение СОИ практически любых размеров.

**Тип использования:**

- индивидуальное (1 наблюдатель);
- коллективное (2 и более наблюдателей).

Данный параметр определяет сценарий использования СОИ относительно числа одновременных наблюдателей.

После того как число пользователей определено, необходимо обеспечить соответствие СОИ правилам и стандартам, прописанным в ГОСТах [13, 14].

**Характер использования:**

- профессиональное;
- бытовое;
- смешанное.

Под профессиональными средствами отображения понимаются устройства, необходимые для реализации программно-аппаратных комплексов в рамках задач, решаемых организационными структурами.

Бытовые устройства используются для личных целей, как правило, в домашних условиях.

Пример смешанного характера использования — настольные ЖК-мониторы.

Характер использования влечет за собой наличие необходимых интерфейсов подключения, требования к цветопередаче и стоимости.

Под **форматом дисплея** понимается соотношение высоты и ширины активной поверхности средства отображения. На сегодняшний день существует достаточно ограниченное число используемых форматов, которые задаются производителями той или иной технологии.

Другим определяющим формат параметром является формат отображаемого сигнала. Можно выделить наиболее популярные форматы:

- 16:9;
- 4:3;
- 1:1;
- 5:4;
- 16:10.

Преобладают первые два формата как основные форматы изображения и видеосигнала и наблюдается тенденция перехода к широким форматам ввиду того, что большинство сигналов высокого разрешения имеют формат 16:9, а также ввиду попыток найти соотношение сторон, соответствующее усредненным параметрам человеческого восприятия.

**Тип интерфейса.** Подключение устройств к средствам отображения накладывают требования на совместимость интерфейсов как по физическому набору контактов и форм-факторов, так и по типу передаваемого сигнала. По второму параметру интерфейсы делятся на два вида:

- аналоговые (S-Video, D-Sub (15 pin), композитный, компонентный, DVI-I);
- цифровые (DVI-D, HDMI, Ethernet).

**Характер входного сигнала** определяет динамику изображения:

- статичное;
- динамичное;
- любое.

Существуют примеры, когда средства отображения не могут показывать динамично меняющуюся картинку без заметных искажений изображения. С другой стороны, далеко не все дисплеи могут работать со статичным изображением.

**Число источников** может меняться от одного до нескольких сотен. В зависимости от него средство отображения информации обрастает вычислительными мощностями, интерфейсными блоками, которые обеспечивают одновременную работу с необходимым набором входных сигналов.

**Число отображаемых окон (источников)** характеризует функциональность дисплея и определяется возможностью одновременного вывода нескольких различных источников в нескольких отдельных окнах. Число выводимых окон может меняться от одного до нескольких сотен.

**Цветопередача.** Средства отображения информации могут быть:

- цветные;
- черно-белые.

Согласно [15, 16], кодирование информации в диспетчерских с помощью цвета не должно использовать более 11 цветов, а при необходимости быстрого поиска — более 6. С другой стороны, обеспечение правильной цветопередачи позволяет адекватно оценивать объект наблюдения и уменьшает нагрузку на глаза.

**Информационная емкость** средства отображения определяется числом его «атомарных» единиц — пикселей или точек, помноженным на его способность к изменению информации во времени. Теоретически возможно построение СОИ со сколь угодно большой разрешающей способностью. Способность изменения изображения во времени разумно ограничить числом кадров в секунду, воспринимаемых человеком.

**Уровень яркости** может изменяться от нуля до нескольких тысяч кд/м<sup>2</sup>. Этот параметр достаточно сильно влияет на восприятие и объем передаваемой информации (в том числе из-за того, что яркостное кодирование — преобладающая форма передачи информации). Большая яркость не всегда является плюсом — при длительном наблюдении необходимо соблюдать баланс уровня яркости между излучением СОИ и освещением помещения.

**Угол обзора** — характеристика, говорящая о возможности использовать средство отображения при наблюдении с ненулевого угла относительно перпендикуляра к поверхности экрана в точке наблюдения. Требования к данному параметру содержатся в [15, 16].

По этому параметру устройства можно разделить на две группы:

- прямого наблюдения — предназначенные для работы в рамках узкого конуса;
- произвольного наблюдения — предназначенные для работы с любого угла наблюдения.

**Время отклика** характеризует способность дисплея к изменению изображения после изменения подаваемого сигнала. По этому параметру средства отображения можно разделить на три группы:

- статичные — несколько секунд;
- условно-динамичные — несколько миллисекунд;
- динамичные — незаметное для наблюдателя время изменения любого контента.

**Интерактивность** говорит о возможности работать с отображаемой информацией на уровне естественных движений, позволяя наблюдающим видеть ее в динамике. Интерактивность — это не свойство самих дисплеев, а методика, включающая

три компонента: средство отображения, сенсорную матрицу, совмещенную с активной визуализирующей поверхностью средства отображения, и вычислительные мощности, привязанные к отображаемой информации. Вычислительные мощности нужны для того, чтобы производить сопоставление каждой точки сенсорной матрицы с точкой в отображаемом контенте, а также для того, чтобы изменять контент в режиме реального времени.

**Срок эксплуатации** ограничивается возможностями технологии отображения и может изменяться от нескольких месяцев до нескольких лет. Помимо срока эксплуатации, существует еще и срок моральной актуальности, который для средств отображения коллективного использования приближается к 5 годам. За это время технология устройств уходит далеко вперед, открывая новые возможности для решения задач визуализации.

**Тип монтажа** определяет точку опоры для средства отображения. Это затрагивает вопросы механической нагрузки, а также заставляет решать проблему установки. Выделенным способом монтажа считается встроенный дизайн средства отображения, когда оно фактически является частью другого устройства большего размера. По типу монтажа СОИ бывают:

- встроенные;
- настенные;
- напольные;
- настольные;
- потолочные/подвесные.

**Требуемое пространство инсталляции** характеризует необходимость со стороны дисплея в занимаемом пространстве. Встраиваемые средства отображения не требуют дополнительного пространства, поскольку включены в некоторый корпус другого устройства. Существуют средства отображения, наоборот, требующие дополнительного пространства, которое необходимо для обеспечения «комфортной» среды эксплуатации и сервисных нужд. Технологическое пространство необходимо полиэкраным системам с большим тепловыделением. Итак, возможны три варианта:

- СОИ не требует пространства;
- СОИ требует пространства, равного собственному объему;
- СОИ требует дополнительного технологического пространства.

По **обслуживанию** все СОИ делятся на три группы в зависимости от необходимости обеспечивать заданный уровень всех параметров устройства:



- (1) необслуживаемые;
- (2) обслуживаемые при необходимости;
- (3) требующие периодического обслуживания.

К последним относятся системы обратной проекции, которые требуют практически ежегодной замены ламп. Внедрение LED-технологии в DLP-кубы позволяет этим устройствам обходиться без обслуживания в течение нескольких лет.

**Ремонтопригодность:**

- ремонтпригодные;
- неремонтопригодные.

При проектировании средств визуализации необходимо учитывать возможность восстановления и ремонта при возникновении неисправности. В случае выхода из строя плазменной панели ее с большей долей вероятности придется заменять новой, в то время как видеокубы, состоящие из большого числа отдельных компонентов, могут быть отремонтированы только заменой неисправных деталей.

**Сложность.** СОИ может быть двух типов:

- простое;
- составное.

Под сложностью средства визуализации понимается число отдельных самостоятельных компонентов, входящих в его состав. Например, полиэкран является сложным СОИ.

**Защищенность** связана с различными условиями эксплуатации средств отображения. Основными ограничениями для эксплуатации могут стать температура, влажность, пыль, а также действия недоброжелательно настроенных лиц. По этому параметру различают следующие виды средств отображения:

- незащищенные;
- влагозащищенные;
- температурно-защищенные;
- пылезащищенные;
- взрывозащищенные;
- антивандальные;
- противоударные.

К незащищенным СОИ относятся устройства, пригодные к эксплуатации только в теплых помещениях с невысокой влажностью. Защищенные от какого-либо фактора СОИ обычно либо обладают этим свойством изначально, либо снабжаются специальными оболочками, которые предупреждают то или иное воздействие.

Особо стоит группа взрывозащищенных СОИ — устройств, которые не могут стать причиной взрыва/возгорания из-за электрических искр в корпусе.

Эти устройства необходимы в горнодобывающих шахтах, на нефтяных вышках, на предприятиях химической и перерабатывающей промышленности.

**Энергопотребление** определяет сразу несколько параметров. Во-первых, оно фигурирует при расчете стоимости владения, во-вторых, свидетельствует об уровне тепловыделения при прочих равных условиях.

**Непрерывность эксплуатации** характеризует возможности средства отображения по длительности активной работы:

- абсолютно непрерывная эксплуатация;
- непрерывная эксплуатация;
- условно непрерывная эксплуатация;
- прерывистая эксплуатация.

Абсолютно непрерывная эксплуатация — это возможность непрерывно использовать устройство от момента первого включения до окончания срока службы.

Непрерывная эксплуатация — возможность использовать непрерывно между необходимыми технологическими процессами, связанными с СОИ (например, замена ламп).

Условно-непрерывная — возможность непрерывно использовать устройство при соблюдении ряда условий эксплуатации. Например, тип контента.

Прерывистая эксплуатация — необходимость обеспечения периодов «отдыха» между сеансами эксплуатации.

## 4.2 Некоторые результаты сравнительной оценки технологий средств отображения информации

В табл. 1 сведены основные параметры для каждой технологии, что позволяет сделать первичную оценку возможности использования той или иной технологии в конкретной задаче.

Данная таблица может использоваться для решения задачи выбора технологии по следующему алгоритму.

1. Задать порядок строк согласно важности того или иного параметра для конкретной задачи.
2. Выделить безусловные параметры — те, которые должны обязательно выполняться для решения поставленной задачи.
3. Проходя по таблице сверху вниз по безусловным параметрам, удалить из начального списка технологий те, которые не удовлетворяют требованиям задачи.

**Таблица 1** Соответствие основных критериев и технологий

Параметр	Технология			
	Плазменная	ЖК (LCD)	Проекционная (DLP)	Светодиодная (LED)
Размер (одного модуля/устройства)	32"–150"	0"–108"	50"–100" (для систем обратной проекции)	Без ограничений
Тип	Коллективное	Коллективное, индивидуальное	Коллективное	Коллективное
Класс	Профессиональные, бытовые	Профессиональные, бытовые, смешанные	Профессиональные, бытовые	Профессиональные
Формат	16:9	4:3/16:9/16:10	4:3/16:9	1:1
Тип интерфейса	Аналоговый, цифровой	Аналоговый, цифровой	Аналоговый, цифровой	Аналоговый, цифровой
Характер входного сигнала	Динамичный	Нестатичный	Динамичный, статичный	Динамичный, статичный
Цветопередача	1–64 млрд цветов	16,7 млн цветов	16,7 млн цветов	До 281 трлн цветов
Информационная емкость, млн пикселей/м <sup>2</sup>	До 4,25	До 18,75	До 3	До 0,01
Уровень яркости	1000–1500 кд/м <sup>2</sup>	250–700 кд/м <sup>2</sup>	200–700 кд/м <sup>2</sup>	2000–4000 кд/м <sup>2</sup>
Угол обзора	180/180	178/178	180/180	160/160
Время реакции	< 1 мс	4–16 мс	< 1 мс	< 1 мс
Интерактивность	Возможна	Возможна	Возможна	Невозможна
Срок эксплуатации	50–60 тыс. ч	50–60 тыс. ч	80–100 тыс. ч	50–100 тыс. ч
Тип монтажа	Настенный, напольный, потолочный, настольный	Настенный, напольный, потолочный, настольный	Напольный, настенный, потолочный	Напольный, подвесной
Требуемое пространство инсталляции	Без/с технологическим пространством	Без/с технологическим пространством	Без/с технологическим пространством	Без/с технологическим пространством
Обслуживание	Необслуживаемые, обслуживаемые при необходимости	Необслуживаемые, обслуживаемые при необходимости	Периодически обслуживаемые, обслуживаемые при необходимости	Необслуживаемые
Ремонтопригодность	Неремонтопригодны	Неремонтопригодны	Ремонтопригодны	Неремонтопригодны
Сложность	Простой/сложный	Простой/сложный	Простой/сложный	Простой/сложный
Защищенность	Кроме взрывозащищенных	Любой уровень защищенности	Незащищенные	Кроме взрывозащищенных
Энергопотребление	100–1500 Вт	50–1000 Вт	50–200 Вт	300–1000 Вт
Непрерывность эксплуатации	Условно непрерывная	Условно непрерывная	Непрерывная	Абсолютно непрерывная

- Получить в итоге множество технологий, которые удовлетворяют условиям задачи.
- В случае если конечное множество технологий окажется пустым, пересмотреть условие задачи.
- При необходимости множество параметров может быть расширено на основании достоверной информации о свойствах технологий.

Положительной стороной такого метода является основание выбора на анализе слабых мест, а не на поиске сильных. На практике это обеспечит значительное уменьшение вероятности выхода из строя и повышение общей надежности.

После решения проблемы выбора технологии и его обоснования следует приступить к третьему шагу — выбору конкретных решений, основан-

ных на базе множества технологий, полученных в результате использованного метода. Выбор конкретных системотехнических решений может быть реализован на основании предложенного в статье метода исключений, где в качестве таблицы должна быть использована собственная таблица параметров. Другим путем решения проблемы выбора может послужить метод анализа иерархий, пример использования которого для выбора оборудования приведен в [17].

## 5 Заключение

При решении проблемы группового выбора оборудования для реализации системы отображения информации одной из подзадач является выбор технологии этой системы. В настоящее время существует ряд технологий, которые используются в ситуационных центрах, — плазменная, жидкокристаллическая, проекционная, светодиодная. Каждая из них предлагает свой способ создания подвижного изображения для демонстрации поданного на нее сигнала. Каждая из технологий обладает своими достоинствами и недостатками, поэтому потенциально является решением некоторой задачи группового выбора.

Как показали исследования, наиболее предпочтительными являются жидкокристаллическая и проекционная технология. Первая из них более удобна для реализации средств отображения на базе одного дисплея и оборудования рабочих мест операторов и руководителей. Жидкокристаллическая технология является наиболее универсальной — на ее основе возможно решение практически любой задачи и с любыми ограничениями по безопасности.

Проекционная технология является незаменимой для круглосуточных приложений, где требуется отображение статичной информации. Такое требование, как правило, предъявляется к системам отображения ситуационных центров диспетчерского типа, функционирующих в непрерывном режиме. Кроме того, проекционная технология — единственная, которая позволяет создавать полиэкранные системы высокой информационной емкости без заметных рамок между отдельными дисплеями.

Плазменная и светодиодная технологии пока в меньшей мере востребованы в рамках приложений ситуационного центра, однако существующие тенденции развития технологий [18] указывают на то, что возможны смещения в предпочтениях технологий.

## Литература

1. *Зацаринный А. А., Сучков А. В., Босов А. В.* Ситуационные центры в современных информационно-телекоммуникационных системах специального назначения // ВКСС Connect! (Ведомственные корпоративные сети и системы), 2007. № 5(44). С. 64–76.
2. *Ильин Н. И.* Основные направления развития ситуационных центров органов государственной власти // ВКСС Connect! (Ведомственные корпоративные сети и системы), 2007. № 6(45). С. 2–9.
3. *Зацаринный А. А.* Тенденции развития ситуационных центров как компонентов информационно-телекоммуникационных систем в условиях глобальной информатизации общества // Материалы XXXV междунар. конф. «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе» (IT + S&E'08), Украина, Ялта-Гурзуф, 20–30 мая 2008 г.
4. *Бадалов А. Ю., Баранов А. В.* Некоторые подходы к созданию ситуационных центров // Системы высокой доступности, 2006. Т. 2. № 3–4. С. 73–76.
5. Ситуационные центры (СЦ) и их история. [http://ta.interrussoft.com/s\\_centre.html](http://ta.interrussoft.com/s_centre.html).
6. *Филиппович А. Ю.* Ситуационная система — что это такое? // PCWeek/RE, 2003. № 26.
7. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974.
8. *Зацаринный А. А., Ионенков Ю. С., Кондрашев В. А.* Об одном подходе к выбору системотехнических решений построения информационно-телекоммуникационных систем // Системы и средства информатики. Вып. 16. — М.: Наука, 2006. С. 65–72.
9. *Зацаринный А. А.* Организационные принципы системного подхода к разработке, проектированию и внедрению современных информационно-телекоммуникационных сетей // ВКСС Connect! (Ведомственные корпоративные сети и системы), 2007. № 1(40). С. 60–67.
10. *Зацаринный А. А., Ионенков Ю. С.* Некоторые аспекты выбора технологии построения информационно-телекоммуникационных сетей // Системы и средства информатики. Вып. 17. — М.: Наука, 2007. С. 5–16.
11. *Рыбаков М.* Поле аукнется — точка откликнется // Hard'n'Soft, 2006. № 2.
12. *Королев О., Чупраков К.* Мастера яркого цвета // Hard'n'Soft, 2006. № 11.
13. ГОСТ Р 50948-2001 Средства отображения информации индивидуального пользования. Общие эргономические требования и требования безопасности. Переиздание, авг. 2006. — М.: Стандартинформ, 2006.
14. ГОСТ Р 52870-2007 Средства отображения информации коллективного пользования. Требования к визу-

- альному отображению информации и способы измерения. — М.: Стандартинформ, 2008.
15. ГОСТ 12.2.032-78 Система стандартов безопасности труда. Рабочее место при выполнении работ сидя. Общие эргономические требования. Утв. постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 26 апреля 1978 г. № 1102.
  16. ГОСТ 12.2.033-78 Система стандартов безопасности труда. Рабочее место при выполнении работ стоя. Общие эргономические требования. Утв. постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 26 апреля 1978 г. № 1100.
  17. *Зацаринный А. А., Ионенков Ю. С.* Методика выбора технических средств для построения телекоммуникационных сетей // Системы и средства информатики, 2009. Вып. 19. № 2. С. 4–14.
  18. *Чупраков К.* Технологический анализ коллективных средств отображения информации в ситуационном центре // Автоматизация в промышленности, 2009. № 11. С. 27–30.

# КОГНИТИВНО-ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ ОБРАБОТКИ ТЕКСТОВ

Е. Б. Козеренко<sup>1</sup>, И. П. Кузнецов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассмотрены вопросы проектирования и развития семантико-синтаксических и лексико-семантических представлений в лингвистических процессорах ряда систем, основанных на аппарате расширенных семантических сетей (РСС). Системы этого класса создаются для извлечения знаний из текстов на естественных языках, отображения извлеченных сущностей и связей в структуры базы знаний (БЗ) и использования знаний для поддержки экспертных аналитических решений в различных сферах приложения. В фокусе внимания находятся инженерно-лингвистические представления, позволяющие построить целостную работающую лингвистическую модель, которая модифицируется в зависимости от конкретной задачи: от «тяжелой» формы на основе детальных глубинных представлений до фокусных редуцированных оболочек, настроенных на узкую предметную область (ПО) и ограниченный язык общения. Особое внимание уделяется способам описания дистрибутивно-трансформационных признаков языковых объектов.

**Ключевые слова:** интеллектуальные системы; семантические представления; лингвистические процессоры; обработка естественного языка; извлечение знаний

## 1 Введение

Данная работа посвящена проблемам создания когнитивно-лингвистических моделей естественного языка для различных классов информационных систем и описанию опыта создания лингвистических представлений для интеллектуальных технологий обработки текстов. Вопросы извлечения знаний из текстов и создания модели естественного языка рассматриваются в единстве. В центре внимания будут находиться лингвистические процессоры интеллектуальных систем, разработанных на основе аппарата *расширенных семантических сетей* [1–5]. Будем называть их *РСС-системы*. Эти системы создавались коллективом разработчиков, включая авторов данной статьи в Институте проблем информатики РАН на протяжении целого ряда лет в рамках исследовательских проектов и прикладных систем, ориентированных на конкретные ПО заказчиков. Можно выделить четыре поколения РСС-систем. Когнитивно-лингвистические представления, заложенные в основу систем этого класса, прошли определенный эволюционный путь.

Интеллектуальные РСС-системы содержат развитые *базы знаний*, при этом знания представлены в виде записей на языке РСС, называемых *РСС-структурами*. Лингвистические знания, таким образом, являются частным случаем «знаний» и также представлены в виде записей на языке

РСС. Основным конструктивным элементом РСС является именованный  $N$ -местный предикат, называемый *«фрагментом»*. Все множество языковых объектов задается в виде системы предикатно-актантных структур, при этом поддерживаются механизмы представления вложенных структур, что дает очень мощные изобразительные возможности для описания объектов различных языковых уровней. Очень важными факторами являются однородность и единообразие лингвистических представлений.

В процессе анализа и синтеза предложений естественного языка используется формально-грамматический аппарат, сходный с грамматиками зависимостей. При этом подходе опорными элементами служат слова и конструкции, выполняющие роль предикатов в предложении, и результатом анализа предложения должен стать один предикат, соответствующий сказуемому рассматриваемого предложения (т. е. основному глаголу в личной форме или другому основному предикатному выражению). Таким образом, в процессе анализа происходит выявление *когнитивных опор* предложения: «слов-действий» и «слов-отношений», т. е. глаголов и других слов, имеющих синтактико-семантические валентности. Примером «слов-отношений» могут служить, например, слова «отец», «друг» и т. п., т. е. в данном случае «отношения» (или *функции* — в терминах языка логики предикатов 1-го порядка) — это слова, которые задают сильные, четко выраженные синтактико-семантические ожидания.

<sup>1</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, kozerenko@mail.ru

<sup>2</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, igor-kuz@mtu-net.ru

Семантический анализ в инженерно-лингвистическом понимании — это процесс перевода естественно-языковых выражений во «внутренние» структуры БЗ, в рассматриваемой ситуации этими «внутренними» структурами являются записи на языке РСС. Таким образом, структуры БЗ — это код смысла в интеллектуальных информационных системах подобного рода.

В работе рассматриваются инженерно-лингвистические решения в системах с «полным» лингвистическим анализом — это системы 1-го и 2-го поколения: ДИЕС1, ДИЕС2, Логос-Д [2, 3] — и системах с «фактографическим» подходом: интеллектуальных системах поддержки аналитических решений (ИСПАР) [4, 5], где целью анализа является выделение сущностей и связей из текстов, — это системы 3-го и 4-го поколения.

## 2 Процесс концептуально-лингвистического моделирования в системах, основанных на аппарате расширенных семантических сетей

### 2.1 Центральные вопросы семантического моделирования

Концептуально-лингвистическое моделирование (КЛМ) — это процесс построения естественно-языковой модели ПО (рис. 1), синтезирующий в себе подходы концептуального и лингвистического моделирования [1–3]. Построение концептуально-лингвистической модели некоторой ПО подразделяется на следующие этапы:

- построение собственно концептуальной модели, т. е. вычленение базовых понятий, организация их в родо-видовые деревья и определение связей между ними;
- разработка идеографического словаря ПО, т. е. лексическое наполнение концептуальной модели;
- ввод базовых правил, описывающих на естественном языке «модель мира», релевантную данной ПО.

Методика КЛМ на основе аппарата РСС базируется на следующих принципах:

- модель должна быть «открытой», т. е. поддерживать эффективный механизм расширения и обновления информации;



Рис. 1 Процесс КЛМ

- модель представления «смысла» должна учитывать факты экстралингвистической реальности, которые в виде правил и отношений составляют некоторую базовую «модель мира», достраиваемую конкретными моделями ПО;
- модель должна быть практичной, т. е. не перегруженной детальными описаниями связей и отношений между понятиями, чтобы обеспечить возможность ее реализации, но в то же время отражать всю релевантную конкретной задаче информацию.

Реалистичный подход к постановке задачи диктует необходимость ограничения моделируемого подмножества естественного языка. Суть ограничений сводится к следующему:

- (1) анализируемые текстовые материалы содержат экспертные знания из конкретных ПО (в разработанных авторами системами это были такие ПО, как диагностика брака при изготовлении микросхем, социальное прогнозирование, криминалистика и другие);
- (2) в целях максимально возможного устранения неоднозначности словарь строится по модульному принципу: есть некоторая наиболее общая часть (1–2 уровня), которая достраивается специальными словарями для каждой отдельной ПО.

Предлагаемая модель лексической семантики основана на принципе «ядерного» значения, реализуемого в контексте данной ПО, с последующим

{(ВЫРАБАТЫВА895\_)(DICSEM)  
 COORD(PROGNOZ1,RUS,ВЫРАБАТЫВА895\_,S50\_31\_51\_20,%)  
 SUB(UNIV,0+) SUB(UNIV,1+) SUB(UNIV,2+)  
 ВЫРАБАТЫВ(0-,1-,2-/3+) INFI(3-) ПРИДЕТСЯ(3-) ПРИДЕТСЯ(3-/4+)  
 FUT1(4-) SUB(СРЕД,5+)

**Рис. 2** Пример записи представления глагола «вырабатывать» в семантическом словаре

индуктивным наращиванием других значений (если они актуализируются в рассматриваемых контекстах). Также используется таксономия, которая реализуется в виде иерархических деревьев классов слов.

Общая «модель мира» системы является основой для моделей ПО. Элементами этой модели служат классы слов, которые подразделяются на понятия/имена, отношения, действия, свойства, характеристики действий, временные и пространственные характеристики.

Самым общим понятием является *концепт*, или *универсальный класс*, который подразделяется на объект, ситуацию, процесс и др.

Слова, относящиеся к классам действий и отношений, представлены как семантико-синтаксические фреймы, задающие предикатно-актантные структуры (модель управления). Однако в описываемом подходе (назовем его РСС-подходом) существенно расширена область значений актантов. Суть расширения состоит, во-первых, в том, что в роли актантов могут выступать не только простые объекты, соответствующие отдельным словам, но и структурные объекты, представляющие словосочетания и фразы, а во-вторых, в том, что понятие падежа включает в себя не только семантические, но и синтаксические признаки.

Подход, основанный на РСС, позволяет отражать произвольный уровень вложенности структур за счет пропозициональных вершин семантической сети. Это обеспечивает представление сложных синтаксических конструкций фраз естественного языка, а также позволяет отразить структурный характер лексической семантики, которая в предлагаемой модели имеет иерархически-сетевую структуру. Лингвистические знания представлены в системном словаре и декларативных модулях лингвистического процессора. В РСС-системах также реализована функция динамически формируемого семантического словаря, который на основе исходной лингвистической информации достраивается системой автоматически в процессе обработки конкретных текстов. На рис. 2 представлено такое «внутреннее» описание глагола в семантическом словаре. Этот словарь автоматически ге-

нерируется РСС-системами ДИЕС2, ЛОГОС-Д, ИКС в процессе обработки естественно-языковых текстов.

## 2.2 Особенности применения аппарата расширенных семантических сетей в когнитивно-лингвистическом моделировании

Дадим краткое описание аппарата РСС и обобщим выбор именно этого метода представления для моделирования естественного языка. Классическое понятие семантической сети сводится к следующему: задаются некоторые вершины, соответствующие объектам, вершины связываются дугами, которые помечаются именами отношений. Однако с помощью подобных сетей оказывается трудно представлять сложные виды информации, например, когда объекты, связанные отношениями, образуют агрегаты и когда отношения связываются между собой отношениями и др. Поэтому в сети вводятся вершины, соответствующие именам отношений, а также специальный композиционный элемент, называемый вершиной связи. Вершина связи как бы «разрывает» дугу и подсоединяется одним ребром к вершине-отношению, а другими ребрами — к вершинам-объектам. Расширенная семантическая сеть является развитием такого сорта сетей в направлении повышения изобразительных возможностей при сохранении свойства однородности.

Основой РСС является множество вершин ( $V$ ), из которых составляются элементарные фрагменты ( $\Phi$ ) вида  $V_0(V_1, V_2, \dots, V_k/V_{k+1})$ , где  $V_0, V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1} > 0$ .

Такой фрагмент представляет  $k$ -местное отношение. Позиции вершин в  $\Phi$  определяют их роли. Вершина  $V_0$  ставится в соответствие имени отношения, вершины  $V_1, V_2, \dots, V_k$  — объектам, участвующим в отношении, а вершина  $V_{k+1}$ , отделенная косой линией, — всей совокупности упомянутых объектов с учетом их отношения. В дальнейшем будем  $V_{k+1}$  называть  $S$ -вершиной  $\Phi$ . Множество  $\Phi$  образует РСС. С помощью РСС представляются наборы отношений, различные ситуации, сценарии. Сильной стороной РСС-подхо-



Рис. 3 Семантико-синтаксический анализ без выявления глагольных словоформ

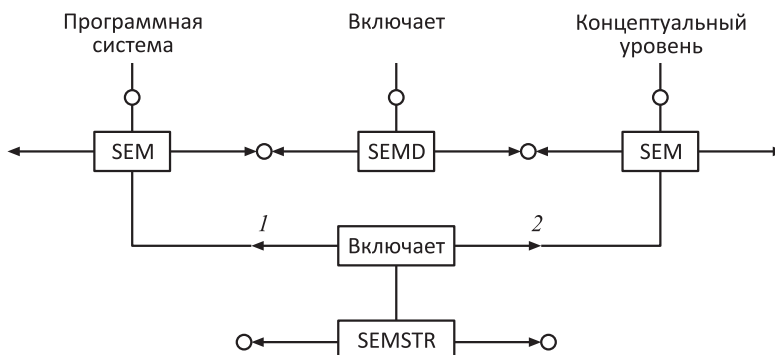


Рис. 4 Целостная семантическая структура предложения

да является возможность однородного представления как предметной (концептуальной), так и лингвистической информации, что обеспечивает эффективную обработку знаний и поддержание непротиворечивости БЗ.

Посредством РСС в БЗ представлены лингвистические и предметные знания. Обработка этих знаний осуществляется продукциями языка ДЕKL, на котором реализованы следующие шесть блоков: морфологического анализа, семантического анализа слов, синтактико-семантического анализа форм, прагматических функций, организации системной активности и обратный лингвистический процессор. С помощью продукций осуществляется последовательное преобразование сети — РСС. При этом проходятся фазы, соответствующие уровню понимания входного текста. Рассмотрим их.

1. На первом шаге анализа строится пространственная структура предложения с морфологической информацией для каждого слова. Каждый член предложения представляется вершиной семантической сети. Вместо слова генерируется код (если слово многозначно, т. е. принадлежит к нескольким классам, — то более одного кода). Основой кода служит корень слова. На этом этапе предложение представляется в виде набора фрагментов типа LRR (специальных меток результатов 1-го этапа анализа), объединяемых в целостную структуру посредством вершины связи. Результат 1-го этапа постоянно обращается к словарю: «Что значит данное слово?»
2. На втором этапе каждой вершине сопоставляется семантический класс и присваивается новый код. За словами (т. е. конкретными вершинами

РСС) система видит объекты, действия, свойства, т. е. строит классификации. Производится семантико-синтаксический анализ без выявления глагольных словоформ, при этом предложение представляется в виде совокупности фрагментов типа SEM и SEMD — специальных меток результатов 2-го этапа анализа (рис. 3).

3. На третьем этапе происходит частичное «сворачивание» синтаксических структур в более компактные (например, свойство объекта и сам объект) с присваиванием нового кода и строится фрагмент для объекта, обладающего этим свойством.
4. На четвертом этапе выявляются отношения и действия и производится анализ непосредственного контекста на соответствие заданным семантическим падежам. Система проверяет, подходят ли объекты (концепты, понятия) на аргументные места данного действия или отношения. При этом отглагольные существительные («делатель», т. е. агент действия, или «делание» — процесс — анализируются как слова с двойной природой: вначале как действия, а затем как объекты). Результатом этого этапа является целостная семантическая структура предложения, которая представляется фрагментом типа SEMSTR — метки результата 4-го этапа анализа (рис. 4).
5. На пятом этапе происходит анализ прагматики: установление кореференциальных отношений, частичное восстановление эллиптических конструкций, система производит дальнейшие действия с построенными фрагментами.

Система ДИЕС допускает ввод полисемичных форм глаголов. Для этого следует воспользовать-



ся формальной записью лингвистических знаний. В системах, основанных на РСС, все функции реализованы на единой основе — в рамках языков РСС и ДЕKL, которые были разработаны с ориентацией на задачи обработки естественного языка.

### 3 Представление семантики глаголов, глубинные и поверхностные структуры

В процессе анализа выявляются семантические вершины предложения: происходит выявление «слов-действий», т.е. глаголов, и «слов-отношений». Что же является конструктивной основой задания семантических представлений предикатных слов и выражений? Как убедительно показано в работе [6], семантика глагола определяется его дистрибутивно-трансформационными свойствами. Поэтому смысл предикатных выражений должен кодироваться с учетом их дистрибутивных и трансформационных признаков.

Выдвинутая рядом лингвистов (Хомский, Филлмор) гипотеза о том, что все предложения имеют глубинные и поверхностные структуры [7–10], явилась очень продуктивным источником проектных решений при создании первых РСС-систем и развивалась в дальнейшем.

В теоретико-лингвистическом понимании глубинная структура — это абстракция, содержащая все элементы, необходимые для образования поверхностных структур предложений со сходной семантикой.

В инженерно-лингвистическом понимании глубинная структура — это запись на языке БЗ, например на языке РСС, которая может быть представлена в «поверхностном» виде на одном из естественных языков в результате конечного числа определенных преобразований. Например, предложения

- (1) *The programmer writes the code*
- (2) *The code is written by the programmer*

имеют истоком одну глубинную структуру:

```
Programmer <---- write ----> Code
agent                          object,
```

хотя и отличаются своими поверхностными структурами. В каждом из них имеется агент (the programmer), объект (the code) и действие (write). Согласно концепции *надежной грамматики* Филлмора [7] глубинная структура для обоих предложений инвариантна. Эту структуру можно представить в виде скобочной записи  $V(\text{AGENT}, \text{OBJECT})$ . В графическом виде глубинная структура предложения также может быть представлена диаграммой в виде дерева, где отражены инвариантные отношения зависимости между предикатной вершиной и актантами (рис. 5), причем в таком представлении явным образом разграничиваются *модальность* (MOD) и *пропозиция* (PROP).

В исходном варианте [7] теория признавала шесть падежей: агентив, инструменталис, датив, объектив, локатив и фактив. По мере развития теории [10] происходило увеличение числа падежей, однако «умножение» количества падежей утяжеляет первоначальную конфигурацию, поэтому при построении инженерных семантических представлений требуется некоторый «компромиссный» вариант, сочетающий в себе необходимую полноту, с одной стороны, и простоту и гибкость, с другой.

### 4 Некоторые базовые аспекты построения многоязычных систем

Одним из приоритетных направлений развития РСС-систем является обеспечение обработки тек-

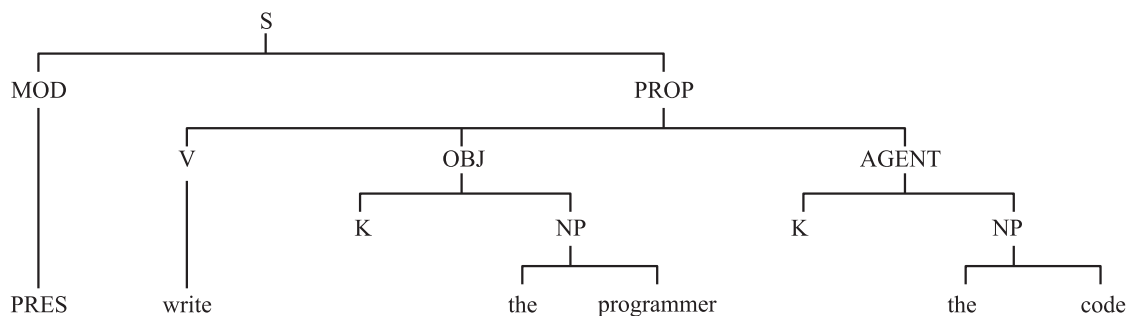


Рис. 5 Глубинная структура предложений

стов на нескольких языках, прежде всего для русско-английской языковой пары. В системах 2-го поколения — ДИЕС2, ИКС, ЛОГОС-Д были реализованы лингвистические процессоры и словари для русского и английского языка, позволявшие обрабатывать тексты для ряда ПО. При этом поддерживался как режим ввода лингвистических знаний лингвистом-аналитиком, так и автоматический режим самообучения системы по вводимым текстам.

Проводились также эксперименты с итальянским и французским языком. При создании многоязычных систем авторы обращались к европейским языкам. Очевидно, что европейские языки обладают большим числом общих правил, чем любой из них с языками других групп. Но при этом все естественные языки обладают общей структурой на самом глубинном уровне. На этом уровне располагаются главные элементы естественного языка: *предложение, модальность, пропозиция*.

Моделирование смысловых представлений — это процесс, развивающийся в направлении от поверхностных семантических структур к глубинным. Поиск такого внутреннего представления смысла в условиях многоязычной ситуации является направлением развития методов КЛМ на базе РСС.

## 5 Интеллектуальные системы поддержки аналитических решений

Системы РСС 3-го и 4-го поколения направлены на извлечение знаний в виде *объектов*, или *сущностей*, и связей между ними из предметно-ориентированных текстов на русском и английском языке [4, 5].

В настоящее время во всем мире активно ведутся работы по созданию систем извлечения фактов из текстов на естественных языках [11–14], создаются развитые тезаурусы и онтологии [15]. Системы РСС функционально шире, поскольку имеют возможность не только извлекать факты, но и поддерживать механизмы логического анализа и экспертного вывода на основе извлеченных знаний. Системами такого рода являются ИСПАР. В целом это направление исследований требует дальнейшей проработки лексико-семантических представлений, создания предметно-ориентированных семантических словарей.

Обобщенное функциональное представление систем ИСПАР дано на рис. 6.

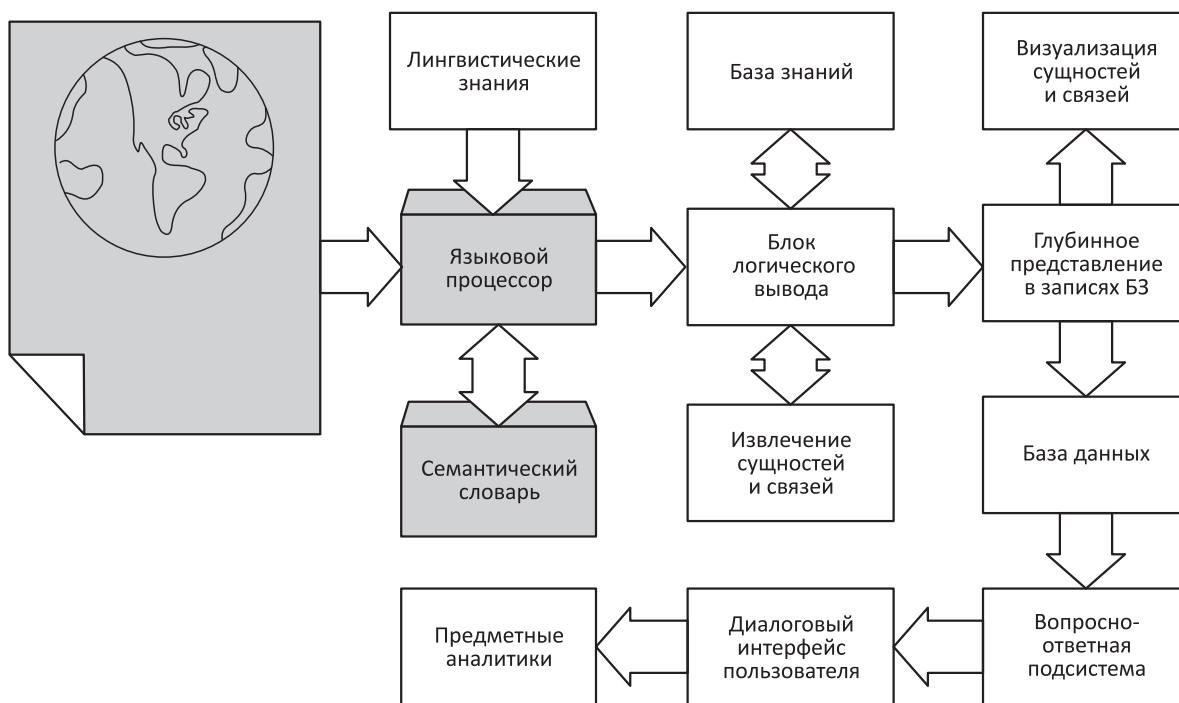


Рис. 6 Обобщенное функциональное представление систем ИСПАР

В рамках ИСПАР на основе РСС (ИСПАР–РСС) были реализованы полномасштабные и пилотные проекты для ряда ПО: криминалистики, управления кадрами, мониторинга финансово-экономического кризиса и др. [4, 5].

## 6 Применение аппарата расширенных семантических сетей в лингвистических исследованиях

В настоящее время в рамках проектов, направленных на создание открытых лингвистических ресурсов [16] для научно-практических целей, ведутся работы по выравниванию параллельных текстов научных статей, патентов и финансово-экономических текстов. В качестве одного из методов выравнивания используется РСС-подход, поскольку он позволяет отразить глубинно-семантический уровень языковых структур.

На рис. 7 представлен фрагмент первого этапа лингвистического анализа в многоязычных системах. Для «идеальной» ситуации, когда структуры исходного текста и текста перевода практически совпадают, такая ситуация имеет место в меньшинстве случаев. Основные трудности возникают при наличии переводческих трансформаций в параллельных текстах. Особое внимание следует уделять глагольно-именным трансформациям, например явлению *номинализации*, поскольку она очень продуктивна для всех исследовавшихся языков.

Ключевой задачей при разработке методов сопоставления параллельных текстов является выявление и детальное описание тех языковых трансформаций, которые имеют место при переводе естественно-языковых конструкций с одного языка на другой [17], потому что далеко не всегда некоторое содержание передается структурно-подобными средствами в текстах на разных языках. Сравнительное исследование употребления различных частей речи в параллельных текстах на разных языках создает основу для выявления и описания языковых транс-

формаций, при этом центральной трансформацией является *номинализация*. Явление номинализации было исследовано в ряде работ отечественных и зарубежных лингвистов [17–20]. Ближе всего к правильному, по мнению авторов данной статьи, пониманию этого явления следующие определения номинализации: «конструкции. . . называются номинализованными — в том смысле, что их естественно рассматривать как результат номинализации конструкций с предикативным употреблением глаголов и прилагательных»; «номинализация — это синтаксический процесс, который соотносит предложения с именными группами» [17, 20]. Выявление номинализованных конструкций в параллельных научных и патентных текстах на русском, английском, французском и немецком языках в научных и патентных текстах и сопоставительное описание глагольно-именных межъязыковых трансформаций — одна из центральных задач инженерно-лингвистических исследований.

Следующей базовой трансформацией в исследуемых текстах на нескольких европейских языках является адъективно-адвербиальное преобразование. Это означает, что при переводе с одного языка на другой происходит синтаксическое преобразование имен прилагательных в наречия и обратное преобразование — наречий в прилагательные. Установление семантических соответствий между этими языковыми объектами также возможно осуществить посредством аппарата РСС.

При семантическом выравнивании непараллельных текстов, имеющих одну и ту же денотативную составляющую, аппарат РСС позволяет выявить в текстах когнитивные опоры (слова с сильной валентностью — «слова-действия» и «слова-отношения») и установить между ними семантические соответствия.

## 7 Заключение

В данной работе представлен опыт создания и развития когнитивно-лингвистических представлений в интеллектуальных информационных системах, разработанных на основе аппарата РСС. Аппарат РСС обеспечивает мощные изобразительные возможности для описания всех уровней естественного языка, включая уровень глубинно-семантических представлений и межъязыковых соответствий. Конкретные лингвистические процессоры, которые были созданы на основе этого подхода, прошли определенный путь развития и позволили выработать проектные решения для основных задач текущего этапа — извлечения и обработки содержательных знаний из текстов на естественных языках

Программная система включает концептуальный уровень

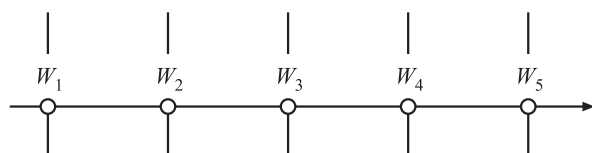


Рис. 7 Первый этап анализа параллельных текстов ( $W_n$  обозначает словоформу с номером  $n$ ,  $1 \leq n \leq 5$ )

и сопоставления языковых структур в текстах на различных языках с учетом базовых трансформаций.

Проблема извлечения и обработки знаний открывает перспективы развития интеллектуальных направлений компьютерной лингвистики, поскольку ее основной акцент смещен в сторону глубоких представлений языка, в которых используются как грамматические (морфологические и синтаксические), так и семантические атрибуты для описания языковых объектов. Проводимые авторами исследования параллельных текстов направлены также на рассмотрение этой проблемы [16]. Центральное место в проводящихся лингвистических исследованиях занимает изучение и формализация процессов трансформации языковых структур, особенно все варианты глагольно-номинативных трансформаций, создание развитых дистрибутивно-трансформационных описаний предикатных структур для рассматриваемых языков.

Для задач извлечения знаний и создания ИСПАР дистрибутивно-трансформационные описания имеют особое значение, поскольку таким образом задаются все возможные способы перевода языковых структур в предикатно-аргументные представления, которые затем используются в процедурах обработки знаний.

## Литература

1. Кузнецов И. П. Семантические представления. — М.: Наука, 1986. 290 с.
2. Козеренко Е. Б. Концептуально-лингвистическое моделирование в среде интеллектуального редактора знаний ИКС // Проблемы проектирования и использования баз знаний. — Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 1992. С. 73–79.
3. Kozerenko E. B. Multilingual processors: A unified approach to semantic and syntactic knowledge presentation // Conference (International) on Artificial Intelligence IC-AI'2001 Proceedings. Las Vegas, Nevada, USA. June 25–28, 2001. — Las Vegas: CSREA Press, 2001. P. 1277–1282.
4. Kuznetsov I. P., Efimov D. A., Kozerenko E. B. Tools for tuning the semantic processor to application areas // ICAI'09 Proceedings, WORLDCOMP'09. July 13–16, 2009. Las Vegas, Nevada, USA. Vol. I. — Las Vegas: CRSEA Press, 2009. P. 467–472.
5. Kuznetsov I. P., Kozerenko E. B., Kuznetsov K. I., Timonina N. O. Intelligent system for entities extraction (ISEE) from natural language texts // Workshop (International) on Conceptual Structures for Extracting Natural Language Semantics (Sense'09) at the 17th Conference (International) on Conceptual Structures (ICCS'09) Proceedings. University Higher School of Economics. Moscow, Russia, 2009. P. 17–25.
6. Апресян Ю. Д. Экспериментальное исследование семантики русского глагола. — М.: Наука, 1967. 252 с.
7. Филлмор Ч. Дело о падеже // Новое в зарубежной лингвистике, 1968. Вып. X. С. 369–495.
8. Хомский Н. Аспекты теории синтаксиса. — М.: МГУ, 1972.
9. Хомский Н. Язык и мышление. — М.: МГУ, 1972.
10. Fillmore C. The case for case reopened // Syntax and Semantics. Vol. 8. — N.Y.: Academic Press, 1977.
11. FASTUS: A cascaded finite-state trasducer for extracting information from natural-language text // AIC, SRI International, Menlo Park, California, 1996.
12. Han J., Pei Y., Mao R. Mining frequent patterns without candidate generation: A frequent-pattern tree approach // Data Mining and Knowledge Discovery, 2004. Vol. 8. No. 1. P. 53–87.
13. Cunningham H. Automatic information extraction // Encyclopedia of Language and Linguistics. 2nd ed. — Elsevier, 2005.
14. Han J., Kamber M. Data mining: Concepts and techniques. — Morgan Kaufmann, 2006.
15. Добров Б. В., Лукашевич Н. В. Онтологии для автоматической обработки текстов: Описание понятий и лексических значений // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: Тр. межд. конф. «Диалог'06». Бекасово, 31 мая – 4 июня 2006. С. 138–142.
16. Kozerenko E. B. INTERTEXT: A multilingual knowledge base for machine translation // Conference (International) on Machine Learning, Models, Technologies and Applications Proceedings. June 25–28, 2007. Las Vegas, USA. — Las Vegas: CSREA Press, 2007. P. 238–243.
17. Жолковский А. К., Мельчук И. А. О семантическом синтезе // Проблемы кибернетики, 1967. Вып. 19.
18. Jacobs R. A., Rosenbaum P. S. English transformational grammar. — Blaisdell, 1968.
19. Балли Ш. Общая лингвистика и вопросы французского языка. 2-е изд. — М.: УРСС, 2001.
20. Падучева Е. В. О семантике синтаксиса: Мат-лы к трансформационной грамматике русского языка. 2-е изд. — М: КомКнига, 2007. 296 с.

# TYOLOGY AND COMPUTER MODELING OF TRANSLATION DIFFICULTIES\*

N. Buntman<sup>1</sup>, J.-L. Minel<sup>2</sup>, D. Le Pesant<sup>3</sup>, and I. Zatsman<sup>4</sup>

**Abstract:** The problem of generating of goal-oriented knowledge systems in linguistics is reviewed. The problem belongs to a new research area, which is called “cognitive informatics.” The article focuses on computer coding of goal-oriented knowledge systems using as an example the typology of Russian-to-French translation difficulties.

**Keywords:** time-dependent semiotic model; goal-oriented knowledge systems in linguistics; denotata; concepts; information objects; computer codes

## 1 Introduction

The papers [1–3] describe a new area of the research that aims to develop the theoretical foundations for creation of information and communication technologies (ICT) providing goal-oriented development of new knowledge systems. It was proposed to name such systems as goal-oriented [1, 2]. Goal-oriented knowledge systems (GOKS) can be constructed and used practically in any area of science [3]. The problematics of knowledge system generation belongs to the informatics as the computer and information science [4]. The reason for this is that a description of knowledge system generation processes covers the mental sphere (knowledge), the material sphere of physical objects and phenomena, the social communication sphere (information), and the digital sphere (computer codes) [1, 2]. Within the bounds of informatics, this new area of research relates to cognitive informatics<sup>5</sup> [5–7].

The purpose of developing the theoretical foundations for creation of ICT that should provide generation of a GOKS in linguistics and other fields and areas of application is the solution for at least three pressing problems: (*i*) identification of GOKS concepts; (*ii*) evaluation of the relevance of a generated GOKS to cultural, educational, economical, technological, and other needs; and (*iii*) directed generation of a GOKS.

To solve these problems, the stationary semiotic model of computer coding was built in [1]. The model is designed for computer coding of GOKS concepts,

information objects, and denotata of the physical nature (physical objects) or denotata of the digital sphere, based on the fact that they all do not change over time.

Then in [2], the time-dependent semiotic model of computer coding of GOKS concepts was built, taking into account that concepts, information objects, and denotata *can be changed over time* within GOKS generation processes.

The model was illustrated with an example of a GOKS about indicators in science. In the example, each denotatum is a combination of programs for computing values of an indicator and database information, used by those programs. Along with modification and interpretation of denotata, i.e., programs and information, expert users are forming GOKS concepts, reflecting the evolution of indicator meanings. Each stage of indicators evolution has been fixed by an expert as a descriptor of the semantic dictionary (thesaurus) of an information system (IS), where one of the fields contains the name of the indicator assigned by the expert as its author. The model treats an indicator’s name as an information object. This model gives the users of the IS the ability of computer coding of GOKS generation processes in the thesaurus.

The model defines a new multidimensional space, which is called Frege’s space [2]. Each point of the space fixes at a given time moment the state of evolution of three entities:

- (1) GOKS concept, i.e., meaning of an indicator at that moment;

\*This research is partially funded by RFBR Grant No. 09-07-00156.

<sup>1</sup>Faculty of Foreign Languages and Area Studies at Moscow State University, nabunt@hotmail.com

<sup>2</sup>Université Paris Ouest Nanterre La Défense, jean-luc.minel@u-paris10.fr

<sup>3</sup>Université Paris Ouest Nanterre La Défense, denis.lepesant@wanadoo.fr

<sup>4</sup>Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences, iz\_ipi@al70.ipi.ac.ru

<sup>5</sup>Cognitive informatics is the direction in informatics as computer and information science, which is the study of computational processes and the development of information and computer systems using methods of cognitive science that studies the mental processes (cognitive and creative) and mental objects (concepts), and the study of forms of presentation of concepts, their evolution, cognitive and creative processes using methods of computer and information science [2, 5–7].

- (2) information object, corresponding to the concept (in the example, it is a name of an indicator); and
- (3) denotatum, corresponding to the concept (in the example, any denotatum is a combination of programs and information).

A set of points, where each point fixes the state of evolution of three entities above at a given moment, is a network trace route of evolution of a GOKS over time [2].

The main goal of this paper is to describe the problem of GOKS generation in linguistics. The key task of the problem is computer coding of GOKS generation processes in the thesaurus. To solve the key task of the problem, it is suggested to use the time-dependent semiotic model from [2]. The paper discusses a GOKS in order to build the corpus-oriented *typology* of Russian-to-French *translation difficulties* (TTD) [8]. Development of a method of computer coding and of the software is the initial stage of a project of constructing TTD as a GOKS in linguistics.

In this paper, the three key terms of the time-dependent semiotic model are used: (i) denotatum; (ii) concept; and (iii) information object. In the field of the TTD, these terms are treated as follows: denotatum is a pair of fragments of parallel texts in Russian and French, fixing a specific translation difficulty; concept is a meaning of the definition of that difficulty assigned by linguists-experts, as well as its position in the typology; and information object is a verbal designation of the concept, i. e., the name of a difficulty, consistently adopted by linguists-experts. The TTD as a GOKS example in linguistics is interesting because the denotatum of each translation difficulty is a pair of fragments of parallel texts in Russian and French, so it belongs to the social communication sphere.

## 2 Creation of Knowledge Systems: Review and Definitions

In 2004, a workshop of experts involved in the preparation of the 7th Framework Programme of the European Union was devoted to a discussion of the problematics of knowledge system generation, which was organized by the European Commission [3]. The workshop was named “Knowledge Anywhere Anytime: The Social Life of Knowledge.” Experts from different countries were invited to the workshop. Research on creation of knowledge systems took place before, but socio-economic approaches and models dominated, such as SECI-model [9]. SECI means socialization, externalization, combination, and internalization. The SECI-model uses the term *tacit knowledge*, thus emphasizing the personal experience of a subject and the subjective

understanding. The tacit knowledge is opposed to the *explicit knowledge*.

By this opposition, the SECI-model is built dealing with relationship between tacit and explicit knowledge. The term *knowledge* by itself (with neither *tacit* nor *explicit* adjective) is used for personal, collective, and conventional knowledge, the bearer of which can only be a human being. It is emphasized that a characteristic feature of the explicit knowledge is its expressibility in the form of information artifacts, such as books, articles, or reports.

Following the review of the workshop “Knowledge Anywhere Anytime: The Social Life of Knowledge,” which took place in Brussels, the invited experts have prepared documents describing actual directions in the problematics of knowledge systems generation and evolution, including GOKS [3].

After 2004, the main results in this domain have been associated with structuring and more detailed statement of the problematics, as reflected in the 7th Framework Programme of the European Union [10]. The document contains formulations of a number of new directions and challenges related to the problems of generation, evolution, and representation of knowledge systems.

Among recent publications that detail the problematics, the most significant for the establishment of the TTD as a GOKS are works of Wierzbicki and Nakamori, devoted to the models of generation of new knowledge systems, which distinguish between personal, collective (coordinated within the group), and conventional knowledge [11, 12].

Developing the idea of Wierzbicki and Nakamori on the division of personal, collective, and conventional knowledge, in [1, 2], knowledge systems and their constituent concepts, as well as their corresponding thesaurus descriptors were divided into three categories (Table 1). This division became the basis for the definitions of personal and collective signs, personal and collective concepts.

According to the definition from [13, 14], the *personal sign* differs from the traditional semiotic sign in that two of its sides — the form and meaning of the sign — may be in a relation of a temporary connection, mediated by the consciousness of one person, may compose an unstable unity. In a period of GOKS generation time, the form, personally perceived, represents the meaning, personally assigned to this sign.

*Collective sign* differs from the personal sign that the temporary relationship between its form and meaning is mediated by the consciousnesses of several persons, and is *coordinated* among them. Consequently, there are at least two persons who use and understand coordinately their collective sign.

Using the definitions of personal and collective signs from [1, 2], the following approach to the categoriza-

**Table 1** Categories of knowledge systems, concepts and corresponding descriptors

Categories of knowledge and descriptors	Personal	Collective	Conventional
Knowledge systems and concepts	Personal knowledge systems and concepts	Collective knowledge systems and concepts	Conventional knowledge systems and concepts
Descriptors of IS thesaurus	Personal descriptors	Collective descriptors	Normatively approved descriptors

tions of concepts was suggested. *Elementary personal concept* was defined as meaning of a personal sign, and *personal concept* — as meaning of an expression of a natural language or of another sign system, if this expression contains at least one personal sign, or if this expression has no personal signs, but has a new meaning, explicitly defined by its author and registered in IS.

*Elementary collective concept* was defined as meaning of a collective sign, and *collective concept* — as meaning of an expression of a natural language or of another sign system, if this expression contains at least one collective sign, or if this expression has no collective signs, but has a new meaning, explicitly defined, registered in IS, and is interpreted equally by at least two participants of GOKS generation process.

The above definitions are the terminology basis for the description of the problem of GOKS generation in linguistics and other fields of knowledge and applications, as well as the creation of the TTD as a GOKS.

### 3 Typology of Translation Difficulties as a Goal-Oriented Knowledge System

While preparing the project of constructing the TTD, one of the goals is the clarification of the description of GOKS generation with regard to linguistics. The project will be developed to help experts to create purposefully new systems of knowledge.

Development of an information technology to be useful to the experts needs the preliminary study and solving of the following tasks:

- analysis of cultural, educational, and scientific needs, whose satisfaction requires GOKS generation, for example, because of the incompleteness of existing knowledge systems;
- developing methods for presentation and computer coding of a GOKS, taking into account its evolution over time;
- creating tools for formal description of generation stages of a GOKS;

- creating methods, information technologies and systems, supporting generation of a new GOKS; and

- creating methods, information technologies and systems for evaluation of relevancy of a generated GOKS to socially important needs.

One of the main tasks of the project is development of a method for computer coding of a GOKS and its usage in the process of generating the TTD. It is planned to implement the project by using the corpus of parallel texts of translations of classic Russian literature works. The proposed method for computer coding will give linguists-experts the possibility of modeling the process of TTD generation as a GOKS generation process taking into account the change of the typology over time. To demonstrate the feasibility of the proposed method, it is planned to generate the TTD as a new GOKS and to develop a computer model of TTD, reflecting the process of its development and evolution.

The main task of the project is actual for both linguistics and informatics. In the field of linguistics, a new TTD will be developed, reflecting difficulties of Russian-to-French translation, registered in the corpus of parallel texts. In the field of informatics, a method of computer coding of a GOKS will be developed, and its feasibility will be shown with an example of constructing the TTD. So, the project has both computer information and linguistic components.

The *first (computer information) task* of the project is the development of a method for computer coding of a GOKS having the TTD as an example. This method for computer coding of a GOKS makes it possible to construct a semiotic model reflecting the design and evolution of the TTD. The construction of this model will solve a number of problems, such as fixing the changes of the TTD and evaluating its completeness concerning the corpus of parallel texts, as well as the level of consistency of the TTD as a whole and of its separate elements (classified translation difficulties) among linguists-experts implementing the project.

This model is a formal description of translation difficulties, registered in the corpus of parallel texts, from three points of view: (*i*) as denotata, i. e., pairs of fragments of parallel texts in Russian and French,

fixing Russian-to-French translation difficulties; *(ii)* as concepts of a generated GOKS, corresponding to these denotata; and *(iii)* as verbal designations of these concepts, i. e., names of difficulties.

The *second (linguistic) task* of generation of the TTD as a GOKS is the study of asymmetry of French and Russian. As source of the study, it is suggested to use the corpus of texts of Russian classic fiction literature works, and their translations into French. In these texts, the fragments are marked where the asymmetry of French and Russian is most pronounced. The corpus, containing about 70 works of prose and drama, is being formed during last 19 years (1992–2010). The object of study for the second task will be a set of pairs of fragments from parallel texts in Russian and French, causing difficulties for the French translators. Note that native French speakers were involved for the selection of these pairs of fragments.

The TTD created as a result of corpus-oriented study and analysis will include a systematized description of complicated cases connected with languages asymmetry, cultural differences, which caused difficulties of Russian-to-French translation of texts of the corpus. In the course of the project realization, it is expected to develop a prototype of the Russian–French TTD corpus, formed with an experimental array of pairs of fragments of parallel texts in Russian and French, fixing Russian-to-French translation difficulties. It is supposed that the prototype can contain several translations of the same works made by different translators. Each classified translation difficulty in the TTD will have some hyper-text links to corresponding pairs of fragments in Russian and French, included in the prototype, as well as back links from those pairs to difficulty descriptions.

Besides of constructing the TTD as a GOKS and computer modeling of the TTD, it is planned to formalize the markup of texts of the prototype. In order to implement this, it is supposed to develop a special language for markup of pairs of fragments of parallel texts in Russian and French, causing translation difficulties. This formal language is supposed to be used to markup pairs as denotata of translation difficulties. The development of this language and rules of the parallel texts markup is the task of the planned project at the junction of its computer information and linguistic components.

In order to solve the tasks above, it is supposed to use the Web-technologies and software products developed in the Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences. This will help linguists-experts to develop and coordinate the TTD using Internet as a tool of access to the description and the computer model of the TTD, stored at the server of the Institute; moreover, when the project is done, this will help future users to access to the description of the TTD with standard Web-browsers.

## 4 Methods of Solving Tasks of Constructing the Typology of Translation Difficulties

In the process of implementing the project, it is supposed to use the following three methods:

- (1) method for computer coding of the TTD as a GOKS;
- (2) method for classifying translation difficulties, firstly on the basic of their genus-species relations; and
- (3) method for tag-based markup of pairs of fragments of parallel texts causing translation difficulties.

The main idea of the method for computer coding of the TTD as a GOKS is that each classified translation difficulty is analyzed and fixed from three points of view: *(i)* as a denotatum; *(ii)* as one of the concepts of the GOKS; and *(iii)* as a verbal designation of the concept, i. e., a name of the translation difficulty. This method takes into account that during the process of development of any GOKS, all concepts and forms of their presentation can change, because the process of development of the TTD belongs to the stage of generating a new GOKS. At that stage, the level of variability of the TTD as a GOKS can be rather high. This is usual for the processes of generating a new GOKS.

Using of the method for computer coding suggests that, at the stage of generating the TTD, denotata of translation difficulties are more stable compared with their concepts and verbal designations. The reason for the stability of the denotata is that, at the beginning of the process of creating a new GOKS, concepts can still be absent or just starting to take shape, but the object of study (the corpus of parallel texts with marked fragments of texts) has to be determined. It is possible to change the number of denotata (the corpus can be expanded, or the number of marked fragments of texts can be increased), but this kind of change can be eliminated by fixing the corpus and number of fragments. In contrast, the variability of concepts is the essential property of any generation process of a new GOKS.

In addition to developing and applying the method of computer coding, it is planned to use the method of describing and classifying the difficulties of translation primarily on the basis of their genus-species relations. The application of the method for classifying difficulties can be illustrated with the following example. In “The Overcoat” of Nikolai Gogol, the protagonist cannot clearly articulate his thoughts, the meaning of his words sometimes cannot be understood, the word parasite *мо-зо* (which is formally a case-form of the demonstrative



pronoun) creates the effect of speech disorders (aphasia). In the French text, the word parasite is translated as *n'est-ce pas*, a formula that serves to maintain the communication; its function is completely different — contact-establishing (fatic).

Analysis of this example provides a basis to introduce a separate class of translation difficulties, which refers to all the fragments of texts attributed to a violation of connectedness of speech regardless of the reasons for its violation. Semantic failure may occur at the level of a lexeme, a syntagma, or a superphrase unity. Allocation of these levels may be one of the reasons of dividing of this class of difficulties into subclasses. In the example, the semantic failure occurs at the level of a lexeme.

It is also supposed to use in the project the method for tag-based markup of pairs of fragments of parallel texts, which caused translation difficulties. The usage of the method implies the development of a set of tags and rules of markup with those tags. The markup is necessary because only when it is done, the formal borders for denotata as pairs of text fragments can be established. Methods for computer coding and classifying of translation difficulties are discussed in detail below.

#### 4.1 Method for computer coding

The method for computer coding defines a procedure of assignment to each classified difficulty three following computer codes: (*i*) the code of its denotatum; (*ii*) the code of its concept; and (*iii*) the code of the verbal designation of this concept, i. e., the name of this translation difficulty. These codes are assigned automatically by tools of computer description and modeling of a GOKS (modeling program). Codes are assigned at the moment when a linguist-expert describes, using the modeling program, a classified difficulty as an element of the TTD. Each element of the TTD includes:

- (1) definition of a classified translation difficulty;
- (2) its internal links in the typology, i. e., links to other difficulties already classified;
- (3) its external links, i. e., links between a classified difficulty and corresponding fragments of parallel texts in Russian and French;
- (4) name of a classified translation difficulty (optionally);
- (5) linguistic notes (type of difficulty, level of context, etc.) and linguistic comments for the difficulty; and
- (6) variants of translation supposed by linguists-experts.

The specification of two last items of an element of the TTD can be postponed, because only the first four

items are necessary for a code assignment by the modeling program. The name of any difficulty is optional. If the name is absent, the null code is assigned.

Note that the modification of any element of the TTD, including the change of any target of an external link, leads to a creation of a new version of this element of the TTD, which is assigned with its own codes. In other words, any subsequent change of denotatum (target of an external link), concept (definition), or name of a difficulty leads to the generation of a new triad of codes at the time of generation of a new element of the TTD.

Any change in denotatum, such as changing the formal boundaries and/or markup fragments of parallel texts in Russian and French, entails filling out a formalized questionnaire. Its filling by linguists-experts is planned to be implemented with a dialog program (the computer asks, the linguist answers). The goal of the dialog is the creation of a formal description of a semantic interpretation of a modified denotatum. On the basis of answers, the description of a new concept is formed and, optionally, a new name is assigned.

Consequently, if a linguist-expert changes a denotatum, the result of the dialog program is either a new version of description of an existing classified difficulty, or a new classified difficulty of translation is coded by a linguist, as a new element of the TTD. In both cases, the information about a participant of the project (linguist) is incorporated automatically into the description. If other participants of the project agree (disagree) with proposed semantic interpretation of the modified denotatum, they may mark their attitude at special fields of description of the classified difficulty. Besides, they may suggest their variants of interpretation, describing a new variant of that element of the TTD.

An essential element of the novelty of the method for computer coding is the ability to perform the dialog program when the denotatum remains unchanged, but a participant of the project wants to change the interpretation of the previously described denotatum and/or to offer a new variant of description of an existing element of the TTD.

In the process of using the proposed method for computer coding, it is planned to assign triads of codes in order to build a multidimensional Frege's space [2]. Each element of the TTD corresponds to a single point of Frege's space. The appearance of a new element of the TTD or a new version of an element is fixed with a new point in Frege's space, including three codes and a time-stamp; that is, to describe the generation and evolution of the TTD, it is proposed to use four-dimensional space, which includes the time axis and three axes of computer codes for denotata, concepts, and their verbal names.

The Frege's space is the basis for constructing the computer model of the TTD, because it is the definitional domain of functions which are suggested to be used for fixing the changes of the TTD and for evaluation of its completeness concerning the corpus, and for evaluation of the level of consistency of the TTD, as well as levels of coordination of interpretation of its different elements by linguists-experts.

## 4.2 Classification of translation difficulties

Depending on the level of organization of the source text fragment in Russian, the TTD distinguishes at least six different levels of translation difficulties:

- (1) superphrase;
- (2) superphrase/phrase;
- (3) phrase;
- (4) syntactic;
- (5) lexeme; and
- (6) morpheme.

Each difficulty is correlated to one of the following levels of the context:

- microcontext (paragraph level);
- macrocontext (total text level);
- hypercontext (level of all works of an author and his/her idiolect); and
- cultural and historical context.

As mentioned in subsection 4.1, the description of each difficulty includes six components: definition of the difficulty, its internal links in the typology, its external links, name, linguistic notes, and variants of translation. These six components describing a translation difficulty compose a list of the main structural elements of a difficulty descriptor of the IS thesaurus. At the time of generation of each element of the TTD (classified difficulty) as a descriptor of the IS thesaurus, three computer codes are assigned to the element:

- (1) computer code of a difficulty definition and its internal links in the typology (concept computer code);
- (2) computer code of name of a classified translation difficulty (information object computer code); and
- (3) computer code of a target of external links between a classified difficulty and corresponding fragments of parallel texts in Russian and French (denotatum computer code).

A set of computer code triads for classified translation difficulties characterize the process of generation and evolution of the TTD in the Frege's space. Each triad fixes, at a given time moment, the evolution state

of a single classified translation difficulty, including its concept, information object (name), and denotatum, corresponding to the concept. The set of triads is a network trace route of evolution of the TTD as a GOKS over time in the Frege's space [2].

## 5 Concluding Remarks

The suggested description of the problem of generation and evolution of GOKS has a fundamental difference from the approaches of Nonaka and Takeuchi [9], Wierzbicky and Nakamori [11, 12]. It is in that the used model of generation and evolution of a GOKS is time-dependent. Using of the time-dependent semiotic model gives possibility to build in the Frege's space a network trace route of evolution of the TTD [2].

In the process of generation of the TTD, different linguists-experts may treat differently same translation difficulties; using of the time-dependent semiotic model makes it possible to build trace routes of evolution of personal concepts of different experts concerning the same pair of parallel texts.

The article deals with the new approach to computer coding of the generation processes of GOKS. As for the TTD, a list of the main structural elements of the descriptors is suggested, code triads of which reflect the processes of generation of the TTD as a GOKS in the Frege's space.

The need for further development of the time-dependent model is evident. In particular, it is necessary to construct the Frege's space where a semantic metrics is defined, which is suggested to be called *semantic-metrical Frege's space* and to be used for setting, studying, and solving the problems of evaluation of relevancy and directed development of the TTD as a GOKS.

## References

1. Zatsman I. M. A semiotic model of correlations between concepts, information objects and computer codes // Informatics and Its Applications, 2009. Vol. 3. No. 2. P. 65–81. (In Russian.)
2. Zatsman I. M. A time-dependent semiotic model of computer coding of concepts, information objects and denotata // Informatics and its Applications, 2009. Vol. 3. No. 4. P. 87–101. (In Russian.)
3. FP7 Exploratory Workshop 4 “Knowledge Anywhere Anytime.” [http://cordis.europa.eu/ist/directorate\\_f/f\\_ws4.htm](http://cordis.europa.eu/ist/directorate_f/f_ws4.htm).
4. Gorn S. Informatics (computer and information science): Its ideology, methodology, and sociology // The studies of information: Interdisciplinary messages / Eds. F. Machlup and U. Mansfield. — New York: John Wiley and Sons, Inc., 1983. P. 121–140.

5. Wang Y. Cognitive informatics: A new transdisciplinary research field // *Brain and Mind*, 2003. Vol. 4. No. 2. P. 115–127.
6. Wang Y. On cognitive informatics // *Brain and Mind*, 2003. Vol. 4. No. 2. P. 151–167.
7. Bryant A. Cognitive informatics, distributed representation and embodiment // *Brain and Mind*, 2003. Vol. 4. No. 2. P. 215–228.
8. Buntman N. V., Zatsman I. M. Computer resource for typology of translation difficulties // International Conference “Marginalia 2010: Borders of culture and text.” Kargopol, September 25–26, 2010. Theses. <http://uni-persona.srcc.msu.ru/site/conf/marginalii-2010/thesis.htm>. (In Russian.)
9. Nonaka I., Takeuchi H. *The knowledge-creating company*. — N.Y.: Oxford University Press, 1995.
10. ICT FP7 Work Programme. [ftp://ftp.cordis.europa.eu/pub/fp7/ict/docs/ict-wp-2007-08\\_en.pdf](ftp://ftp.cordis.europa.eu/pub/fp7/ict/docs/ict-wp-2007-08_en.pdf).
11. Wierzbicki A. P., Nakamori Y. Basic dimensions of creative space // In: *Creative space: Models of creative processes for knowledge civilization age* / Eds. A. P. Wierzbicki and Y. Nakamori. — Berlin–Heidelberg: Springer Verlag, 2006. P. 59–90.
12. Wierzbicki A. P., Nakamori Y. Knowledge sciences: Some new developments // *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 2007. Vol. 77. No. 3. P. 271–295.
13. Zatsman I. M. Conceptualization of data for scientometric investigations in scientific libraries // 10th Russian Scientific Conference “Digital Libraries: Advanced Methods and Technologies, Digital Collections” Proceedings. Dubna: Joint Institute for Nuclear Research, 2008. P. 45–54. (In Russian.)
14. Zatsman I. M., Kosarik V. V., Kurchavova O. A. Problems of presentation of personal and collective concepts in the digital environment // *Informatics and Its Applications*, 2008. Vol. 2. No. 3. P. 54–69. (In Russian.)

## ТИПОЛОГИЯ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРУДНОСТЕЙ ПЕРЕВОДА

Н. В. Бунтман<sup>1</sup>, Ж.-Л. Минель<sup>2</sup>, Д. Ле Пезан<sup>3</sup>, И. М. Зацман<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Факультет иностранных языков и регионоведения, МГУ им. М. В. Ломоносова, nabunt@hotmail.com

<sup>2</sup>Университет Париж–Нантер, лаборатория UMR 7114 “MoDyCo” Национального центра научных исследований Франции (CNRS), jean-luc.minel@u-paris10.fr

<sup>3</sup>Университет Париж–Нантер, лаборатория UMR 7114 “MoDyCo” Национального центра научных исследований Франции (CNRS), denis.lepesant@wanadoo.fr

<sup>4</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, iz\_ipi@a170.ipi.ac.ru

**Аннотация:** Рассмотрена проблема формирования целевых систем знаний в лингвистике, которая относится к новому направлению исследований — когнитивной информатике. Исследованы вопросы компьютерного кодирования процессов генерации и эволюции целевых систем знаний на примере корпусно-ориентированной типологии трудностей перевода с русского языка на французский.

**Ключевые слова:** нестационарная семиотическая модель; целевые системы знаний в лингвистике; денотаты социально-коммуникативной среды; концепты; информационные объекты; компьютерные коды

## О РАБОТАХ ЗАСЛУЖЕННОГО ДЕЯТЕЛЯ НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ И. Н. СИНИЦЫНА В ОБЛАСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И АВТОМАТИЗАЦИИ (к 70-летию со дня рождения)

И. А. Соколов<sup>1</sup>



14 августа 2010 г. исполнилось 70 лет Игорю Николаевичу Синицыну — члену редколлегии журнала «Информатика и её применения», крупному ученому в области прикладной механики и управления, прикладной математики и информатики, основателю научной школы в области стохастических информационных технологий.

И. Н. Синицын родился в Москве. Высшее образование получил в МВТУ им. Н. Э. Баумана и МГУ им. М. В. Ломоносова. Одновременно с учебой в МГУ начал работать в известном ракетно-космическом НИИ, ныне Институте прикладной механики им. В. И. Кузнецова (НИИПМ). Инженерную и научную деятельность в НИИПМ в области разработки и испытаний гироскопических командных приборов и информационно-измерительных систем (1960–1983 гг.), он совмещал с преподавательской работой сначала в МВТУ им. Н. Э. Баумана, затем в Военно-воздушной инженерной академии им. профессора Н. Е. Жуковского (ВВИА).

Начиная с 1974 г. И. Н. Синицын работал на факультете авиационного вооружения ВВИА. Занимался подготовкой авиационных инженеров, принимал участие в разработке и испытаниях специальной техники, участвовал в подготовке первых космонавтов СССР.

Для организации работ в области специальных применений ЭВМ новых поколений И. Н. Синицын в 1984 г. переводится в только что организованный Институт проблем информатики АН СССР (ныне ИПИ РАН).

В настоящее время И. Н. Синицын работает заведующим отделом стохастических проблем информатики и управления ИПИ РАН, много внимания уделяет подготовке научных кадров. Он руководит специальной секцией ученого совета ИПИ РАН, комиссией Минобрнауки по информатике в военных вузах, является членом экспертного совета РФФИ, заместителем главных редакторов журналов «Научоемкие технологии» и «Системы высокой доступности», членом редколлегий журналов «Pattern Recognition and Image Analysis», «Информатика и её применения». С 1987 г. И. Н. Синицын — профессор МАИ, читает лекции по теории и практике информационных технологий в инженерном деле.

В разные годы И. Н. Синицын был заместителем генерального конструктора и главным конструктором ряда автоматизированных и информационных систем специального назначения.

В 2001 г. И. Н. Синицыну присвоено почетное звание Заслуженного деятеля науки Российской Федерации.

И. Н. Синицын имеет большой опыт работы в промышленности и высших технических учебных заведениях. Он автор более 500 научных трудов, свыше 50 книг, монографий и 30 изобретений. Его основные научные труды относятся к следующим областям:

<sup>1</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, isokolov@ipiran.ru

- статистическая теория информационных технологий и автоматизированных систем;
- прецизионные информационно-измерительные технологии и системы для научных исследований и специального назначения;
- информационно-аналитические технологии и системы поддержки принятия решений для информатизации высших органов государственной власти РФ, федеральных ведомств и др.

И. Н. Сеницыну принадлежат фундаментальные результаты по теории канонических представлений случайных функций в сложных стохастических системах (СтС), в том числе СтС с распределенными параметрами и случайной структурой. Методы теории СтС им распространены на СтС, описываемые дифференциальными уравнениями со случайными функциями состояния, уравнениями в гильбертовых и банаховых пространствах. Им разработаны эффективные вычислительные методы нахождения распределений, основанные на параметризации, позволяющие радикально сократить число уравнений для параметров распределений, а также новые вычислительные методы статистического анализа и синтеза, допускающие эффективное оценивание точности и ориентированные на параллельные статистические вычисления.

И. Н. Сеницын разработал методы нахождения точных выражений для распределений с инвариантной мерой, обнаружил ряд новых классов точных распределений. Им получены фундаментальные результаты в области нелинейной условно оптимальной и субоптимальной фильтрации в реальном масштабе времени. Важные результаты получены И. Н. Сеницыным в области теоретико-групповых методов анализа и синтеза автоматизированных систем. Им разработана статистическая теория катастрофоустойчивости автоматизированных систем высокой точности и доступности.

И. Н. Сеницын — основоположник стохастических информационных технологий оперативной обработки информации, контроля и мониторинга автоматизированных систем, а также стохастического управления информационными активами, моделирования и синтеза систем: проблемно-ориентированных диалоговых систем и библиотек «СтС-Анализ», «СтС-Фильтр», «СтС-Модель», Nailb, «TransStatLib», «Безопасность и надежность», «Здоровье РФ» и др. В последние годы им разработаны эффективные символьные методы анализа и синтеза СтС. Создано и внедрено специализированное программное обеспечение СтС-СМА и СтС-ИТКР.

Его книги — «Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация», «Лекции по функциональному анализу и его приложениям», «Теория стохастических систем» (совместно с В. С. Пугачевым), а также «Фильтры Калмана и Пугачева» и «Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований» — широко известны в России и за рубежом.

И. Н. Сеницыным впервые разработана теория ряда информационно-измерительных систем в условиях случайных динамических возмущений, открыт ряд новых статистических динамических эффектов (выбросы разных типов, флуктуационные уходы, накопление возмущений и др.). Ему принадлежат первые работы по статистической динамике командно-измерительных гироскопических приборов, акселерометров, градиентометров и метрологических систем высочайшей точности, информационной теории и методам измерений, калибровок, ускоренных испытаний в экстремальных условиях, а также статистического и полунатурного моделирования. Под его руководством и при его непосредственном участии разработано и внедрено несколько поколений серийных систем, обладающих уникальными характеристиками. И. Н. Сеницын принимал непосредственное участие в определении технической политики в области новой специальной техники.

С именем И. Н. Сеницына связано создание концепций автоматизации научных исследований в РФ, в первую очередь основанных на средствах массовой вычислительной техники. Под его руководством и при участии сформулированы принципы создания микровидеосистем, создан ряд базовых персональных микровидеосистем. Они внедрены в МВД и Минздраве РФ. Достигнутые результаты получили развитие в автоматизированных системах метрологического обеспечения, видеоконтроля и биометрических системах.

В последние годы под руководством И. Н. Сеницына разработаны принципы построения и архитектуры вычислительных систем командных пунктов, а также новые методы и алгоритмы быстрой обработки изображений, обладающих сильной пространственно-временной деформацией. В целях автоматизации астрометрических научных исследований по фундаментальной проблеме «Статистическая динамика вращения Земли» был создан комплекс моделей, алгоритмов и специального программного обеспечения и информационных ресурсов для нестандартной интегрированной обработки параметров вращения Земли. И. Н. Сеницын впервые обнаружил ряд новых эффектов: автоколебания полюса Земли на чандлеровской частоте

те, параметрическую стабилизацию чандлеровских колебаний, нелинейные флуктуационные дрейфы неустойчивости вращения Земли и др.

В области информационно-аналитических технологий и автоматизированных систем поддержки принятия решений для информатизации высших органов государственной власти, федеральных ведомств и др. под руководством И. Н. Сеницына был разработан и внедрен ряд базовых информационных технологий (обработка информации от независимых источников, формирование и хранение больших баз электронных образов, управления информационными активами и др.). Сформулированы принципы и разработаны базовые системно-технические решения для ряда крупномасштабных автоматизированных информационных и информационно-управляющих систем специального назначения, высокой точности и доступности.

И. Н. Сеницын пользуется широким международным авторитетом: его книги и работы изданы на

английском, французском, испанском и китайском языках; в 1990–1994 гг. он был директором Российско-французского центра «Эвклид», с 1983 г. — членом программных комитетов многих международных конференций; в период 1985–2006 гг. был экспертом фонда INTAS.

И. Н. Сеницын ведет активную работу по подготовке научно-педагогических кадров. Под его руководством выполнено свыше 25 кандидатских и докторских диссертаций. Он состоит членом ряда специализированных диссертационных советов; в течение многих лет был членом экспертного совета ВАК России. И. Н. Сеницын — член редколлегии нашего журнала, он не только публикуется в нем, но и ведет большую редакционную работу.

Редколлегия журнала сердечно поздравляет И. Н. Сеницына с юбилеем и желает ему здоровья, счастья, новых творческих успехов.

### ESTIMATION OF SELF-HEALING TIME FOR DIGITAL SYSTEMS UNDER TRANSIENT FAULTS

S. L. Frenkel<sup>1</sup> and A. V. Pechinkin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IPI RAN, Slf-ipiran@mtu-net.ru

<sup>2</sup>IPI RAN, apechinkin@ipiran.ru

This paper suggests a new approach to self-healing property prediction for digital systems. Self-healing refers to the system's ability to continue operating properly in the case of the failure of some of its components. This phenomenon is very considerable aspect of high-reliable systems design. The self-healing time characteristics are analyzed during design process, and the computation of probability distribution function of self-healing time needs for fair prediction of real time systems reliability. This paper considers the possible ways of estimation of time to self-healing under transient faults using a Markov model of a design behavior for reliability analysis of digital systems with some fault-tolerant properties, modeled by the well-known Finite State Machine formalism.

**Keywords:** fault-tolerant computer; self-healing fault-tolerance; transient faults; finite state machine; Markov chains

### ON STABILITY FOR NONSTATIONARY QUEUEING SYSTEMS WITH CATASTROPHES

A. I. Zeifman<sup>1</sup>, A. V. Korotysheva<sup>2</sup>, Ya. A. Satin<sup>3</sup>, and S. Ya. Shorgin<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Vologda State Pedagogical University; IPI RAN; VSCC CEMI RAS, a\_zeifman@mail.ru

<sup>2</sup>Vologda State Pedagogical University, a\_korotysheva@mail.ru

<sup>3</sup>Vologda State Pedagogical University, yacovi@mail.ru

<sup>4</sup>IPI RAN, SShorgin@ipiran.ru

Nonstationary birth and death processes (BDPs) with catastrophes are considered. The bounds of stability for some characteristics of such systems are obtained. Also, a queueing example is considered.

**Keywords:** nonstationary queues; Markovian models with catastrophes; stability; bounds; limiting characteristics; approximations

### BAYESIAN QUEUEING AND RELIABILITY MODELS: CHARACTERISTICS OF MEAN NUMBER OF CLAIMS IN THE SYSTEM $M|M|1|\infty$

A. A. Kudriavtsev<sup>1</sup> and S. Ya. Shorgin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, nubigena@hotmail.com

<sup>2</sup>IPI RAN, sshorgin@ipiran.ru

The paper is a continuation of the series of papers devoted to Bayesian queueing and reliability models investigation. The probability characteristics of mean number of claims in the system  $M|M|1|\infty$  under conditions of input flow and service parameters randomization are considered. The paper includes the discussion of the obtained results interpretation taking into account that the mean number of claims distribution may be improper.

**Keywords:** Bayesian approach; queueing systems; reliability; mixed distributions; modeling; improper distribution; "defective" distribution

## QUEUEING SYSTEMS WITH MINIMIZED AVERAGE WAITING LINE

S. S. Matveeva<sup>1</sup> and T. V. Zakharova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, petkin@mail.ru

<sup>2</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, isa@cs.msu.su

A research of the properties of optimal arrangements is made in accordance with the average waiting line criteria in space for systems with FIFO service discipline. A stream of the homogeneous requirements differing only by the moments of receipt in system is considered. The service centers are being like  $M|G|1$  systems. The properties of optimal arrangements are described and the algorithms for constructing asymptotically optimal arrangements, minimizing the optimal criteria are presented.

**Keywords:** asymptotically optimal arrangements; average waiting line; criterion of optimality

## ON ESTIMATION OF THE LARGE DEVIATION ASYMPTOTIC OF A SINGLE SERVER REGENERATIVE STATIONARY QUEUE

A. V. Borodina<sup>1</sup> and E. V. Morozov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS, borodina@krc.karelia.ru

<sup>2</sup>Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS, emorozov@krc.karelia.ru

The (small) probabilities estimation of such undesirable events like loss/collapse of data, buffer overflow, collision of packets in the modern telecommunication systems by classical methods requires unacceptable large time and computational efforts. However, exact analytical results are known only for a narrow class of queues and queueing networks. It calls a necessity to develop both asymptotic methods of analysis and speed up simulation to estimate the probabilities of this type. In this paper, a speed-up simulation method based on the splitting of the trajectories of a regenerative process developed by the authors is applied to estimation of the overflow probability for a stationary workload/queue-size process. It allows to simplify and accelerate considerably the estimation of the exponent in the asymptotic representation of the large deviation probability provided that service time has a finite moment generating function (the so-called light tail). Numerical simulation results are presented.

**Keywords:** large deviation asymptotic; single-server system; stationary waiting time; splitting method; accelerated simulation

## SEARCH OF THE CONFLICTS IN SECURITY POLICIES: A MODEL OF RANDOM GRAPHS

A. A. Grusho<sup>1</sup>, N. A. Grusho<sup>2</sup>, and E. E. Timonina<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Computer Security, Faculty of Information Protection, Institute of Information Sciences and Security Technologies, Russian State Humanitarian University; Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, grusho@yandex.ru

<sup>2</sup>Department of Computer Security, Faculty of Information Protection, Institute of Information Sciences and Security Technologies, Russian State Humanitarian University, grusho@yandex.ru

<sup>3</sup>Department of Fundamental and Applied Mathematics, Institute of Information Sciences and Security Technologies, Russian State Humanitarian University, eltimon@yandex.ru

Risk analysis requires at least a rough estimate of the probability of problematic situations in the implementation of security policy. Such estimates can be obtained in the analysis of conflicts in security policies using models of random graphs. In this paper, two examples of conflicts in security policy are considered and a model of random graphs for their research is constructed. The results of analysis were used to evaluate the influence of certain parameters of random graphs on the probability of the existence of conflicts and complexity of search algorithms in real conflict security policies.

**Keywords:** security policy; threats to information security; mathematical models of security policy



## LAWS OF ITERATED LOGARITHM FOR NUMBERS OF NONERROR BLOCKS UNDER ERROR CORRECTED CODING

A. N. Chuprunov<sup>1</sup> and I. Fazekas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics and Probability, Chebotarev Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan State University, achuprunov@mail.ru

<sup>2</sup>Faculty of Informatics, University of Debrecen, Hungary, fazekasi@inf.unideb.hu

Messages containing blocks are considered. Each block is encoded with some antinoise coding method, which can correct not more than  $r$  mistakes. It is assumed that the number of mistakes in a block is a nonnegative integer valued random variable. The random variables are independent and identically distributed. Also, it is assumed that the number of mistakes in a message belongs to a some finite set of integer numbers. In the paper, the analogs of the Law of Iterated Logarithm for a number of nonerror blocks in a message is proved.

**Keywords:** generalized allocation scheme; conditional probability; conditional expectation; exponential inequality; Law of Iterated Logarithm; Hamming code

## ON AN ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF POWER OF TESTS IN CASE OF GENERALIZED LAPLACE DISTRIBUTION

O. O. Lyamin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, oleg.lyamin@gmail.com

In paper by Bening and Lyamin (Informatics and Its Applications, 2009, vol. 3, issue 3, pp. 79–88), a formula for a limit of deviation of power of the asymptotically most powerful test from power of the most powerful test in case of generalized Laplace distribution was heuristically obtained. In the present paper, a formal proof of this formula is derived.

**Keywords:** generalized Laplace distribution; power function; asymptotically most powerful test; asymptotic expansion

## SOME ISSUES OF TECHNOLOGY SELECTION TO BUILD VISUALIZATION SYSTEM IN SITUATIONAL CENTER

A. A. Zatsarinny<sup>1</sup> and K. G. Chuprakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IPI RAN, AZatsarinny@ipiran.ru

<sup>2</sup>IPI RAN, chkos@rambler.ru

The main steps of visualization systems selection in situational centers are shown. An accent is made on a step devoted to describing technology selection. Displaying technologies used in situational centers are considered. The authors suggest the main parameters of visualization system and a methodological approach to technology selection using approach of exclusion by parameters.

**Keywords:** visualization systems; situational center; displaying technology; selection problem; exclusion approach

## COGNITIVE LINGUISTIC PRESENTATIONS IN THE TEXT PROCESSING SYSTEMS

E. B. Kozerenko<sup>1</sup> and I. P. Kuznetsov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IPI RAN, kozerenko@mail.ru

<sup>2</sup>IPI RAN, igor-kuz@mtu-net.ru

The paper deals with the issues of design and development of syntactic semantic and lexical semantic presentations in linguistic processors of the systems based on the Extended Semantic Networks mechanism. The systems of this class are developed for knowledge extraction from natural language texts and mapping the extracted entities and relations into the knowledge base structures for further use by experts in application areas. This paper focuses on the cognitive linguistic solutions employed for constructing an integral linguistic model which can be modified depending on the specific task, and which range from the “heavy” form based on the specific deep presentations to the reduced shells focused on a particular subject area and the controlled language. Special attention is given to the techniques of describing the distributional and transformational features of language objects.

**Keywords:** intelligent systems; semantic presentations; linguistic processors; natural language processing; knowledge mining

#### TYPOLOGY AND COMPUTER MODELING OF TRANSLATION DIFFICULTIES

N. Buntman<sup>1</sup>, J.-L. Minel<sup>2</sup>, D. Le Pesant<sup>3</sup>, and I. Zatsman<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Foreign Languages and Area Studies at Moscow State University, nabunt@hotmail.com

<sup>2</sup>Université Paris Ouest Nanterre La Défense, jean-luc.minel@u-paris10.fr

<sup>3</sup>Université Paris Ouest Nanterre La Défense, denis.lepesant@wanadoo.fr

<sup>4</sup>IPI RAN, iz\_ipi@a170.ipi.ac.ru

The problem of generating of goal-oriented knowledge systems in linguistics is reviewed. The problem belongs to a new research area, which is called “cognitive informatics.” The article focuses on computer coding of goal-oriented knowledge systems using as an example the typology of Russian-to-French translation difficulties.

**Keywords:** time-dependent semiotic model; goal-oriented knowledge systems in linguistics; denotata; concepts; information objects; computer codes

## Об авторах

**Бородина Александра Валентиновна** (р. 1980) — младший научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского Научного центра РАН

**Бунтман Надежда Валентиновна** (р. 1957) — кандидат филологических наук, доцент факультета иностранных языков и регионоведения Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Грушо Александр Александрович** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, член-корреспондент Академии криптографии РФ; заведующий кафедрой компьютерной безопасности факультета защиты информации Института информационных наук и технологий безопасности Российского государственного гуманитарного университета; профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Грушо Николай Александрович** (р. 1982) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности факультета защиты информации Института информационных наук и технологий безопасности Российского государственного гуманитарного университета

**Захарова Татьяна Валерьевна** (р. 1967) — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Зацаринный Александр Алексеевич** (р. 1951) — доктор технических наук, профессор, заместитель директора ИПИ РАН

**Зацман Игорь Моисеевич** (р. 1952) — кандидат технических наук, заведующий отделом ИПИ РАН

**Зейфман Александр Израилевич** (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета, старший научный сотрудник ИПИ РАН, ведущий научный сотрудник ВНКЦ ЦЭМИ РАН

**Козеренко Елена Борисовна** (р. 1959) — кандидат филологических наук, заведующая лабораторией ком-

пьютерной лингвистики и когнитивных технологий обработки текстов ИПИ РАН

**Коротышева Анна Владимировна** (р. 1988) — аспирантка факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета

**Кудрявцев Алексей Андреевич** (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Кузнецов Игорь Петрович** (б. 1938) — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ИПИ РАН

**Ле Пезан Дени** (р. 1949) — доктор наук, профессор университета Париж-Нантер; научный сотрудник лаборатории UMR 7114 “MoDuCo” Национального центра научных исследований Франции (CNRS)

**Лямин Олег Олегович** (р. 1984) — аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Матвеева Светлана Сергеевна** (р. 1984) — аспирантка кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Минель Жан-Люк** (р. 1948) — доктор наук, профессор университета Париж-Нантер; директор лаборатории UMR 7114 “MoDuCo” Национального центра научных исследований Франции (CNRS)

**Морозов Евсей Викторович** (р. 1947) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского Научного центра РАН; профессор Петрозаводского государственного университета

**Печинкин Александр Владимирович** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ИПИ РАН; профессор Российского университета дружбы народов (РУДН)

**Сатин Яков Александрович** (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа Вологод-

ского государственного педагогического университета

**Тимонина Елена Евгеньевна** (р. 1952) — доктор технических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Института информационных наук и технологий безопасности Российского государственного гуманитарного университета

**Фазекаш Иштван** (р. 1954) — доктор наук, доцент, факультет информатики, Дебреценский университет, Венгрия

**Френкель Сергей Лазоревич** (р. 1951) — кандидат технических наук, доцент, старший научный сотруд-

ник ИПИ РАН; доцент факультета вычислительных машин и систем Московского института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА)

**Чупраков Константин Григорьевич** (р. 1985) — аспирант ИПИ РАН

**Чупрунов Алексей Николаевич** (р. 1953) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИММ им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета

**Шоргин Сергей Яковлевич** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора ИПИ РАН

## *About Authors*

**Borodina Alexandra V.** (b. 1980) — junior researcher, Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences

**Buntman Nadezda V.** (b. 1957) — Candidate of Science (PhD) in philology, associated professor, Faculty of Foreign Languages and Area Studies, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Chuprakov Konstantin G.** (b. 1985) — PhD student, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Chuprunov Alexey N.** (b. 1953) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading researcher, Research Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan State University

**Fazekas I.** (b. 1954) — PhD, associate professor, Faculty of Informatics, University of Debrecen, Hungary

**Frenkel Sergey L.** (b. 1951) — Candidate of Sciences (PhD) in technology, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences; associate professor, Faculty of Computer Systems, Moscow Institute of Radio, Electronics, and Automation

**Grusho Alexander A.** (b. 1946) — Doctor of Science (PhD) in physics and mathematics, Corresponding member of the Russian Academy of Cryptography; Head of Department of Computer Security, Faculty of Information Protection, Institute of Information Sciences and Security Technologies, Russian State Humanitarian University; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Grusho Nikolay A.** (b. 1982) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Computer Security, Faculty of Information Protection, Institute of Information Sciences and Security Technologies, Russian State Humanitarian University

**Korotysheva Anna V.** (b. 1988) — PhD student, Faculty of Applied Mathematics and Computer Technologies, Vologda State Pedagogical University

**Kozerenko Elena B.** (b. 1959) — Candidate of Science (PhD) in linguistics, Head of Laboratory for Computational Linguistics and Cognitive Text Processing Technologies, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Kudriavtsev Alexei A.** (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Kuznetsov Igor P.** (b. 1938) — Doctor of Science in technology, professor, Principal Scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Le Pesant Denis** (b. 1949) — Doctor of Science, professor, Université Paris Ouest Nanterre La Défense; researcher, MoDyCo, UMR 7114, CNRS

**Lyamin Oleg O.** (b. 1984) — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Matveeva Svetlana S.** (b. 1984) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Minel Jean-Luc** (b. 1948) — postdoctoral degree (Habilitation à Diriger les Recherches), professor, Université Paris Ouest Nanterre La Défense; laboratory director, MoDyCo, UMR 7114, CNRS

**Morozov Evsey V.** (b. 1947) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading researcher, Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences; professor, Petrozavodsk State University

**Pechinkin Alexander V.** (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences; professor, Peoples' Friendship University of Russia

**Satin Yakov A.** (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior lecturer, Vologda State Pedagogical University

**Shorgin Sergey Ya.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Deputy Director, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Timonina Elena E.** (b. 1952) — Doctor of Science in technology, professor, Department of Fundamental and Applied Mathematics, Institute of Information Sciences and Security Technologies, Russian State Humanitarian University

**Zakharova Tatyana V.** (b. 1967) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Zatsarinny Alexander A.** (b. 1951) — Doctor of Science in technology, professor, Deputy Director, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Zatsman Igor M.** (b. 1952) — Candidate of Science (PhD) in technology, Head of Department, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Zeifman Alexander I.** (b. 1954) — Doctor of science in physics and mathematics, professor, dean of the faculty of applied mathematics and computer technologies, Vologda State Pedagogical University; senior researcher, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences; leading researcher, VSCC CEMI RAS

# Правила подготовки рукописей статей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений. Журнал издается на русском языке. Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях. Публикация не должна нарушать закон об авторских правах. Направляя свою рукопись в редакцию, авторы автоматически передают учредителям и редколлегии неисключительные права на издание данной статьи на русском языке и на ее распространение в России и за рубежом. При этом за авторами сохраняются все права как собственников данной рукописи. В связи с этим авторами должно быть представлено в редакцию письмо в следующей форме: Соглашение о передаче права на публикацию:

*«Мы, нижеподписавшиеся, авторы рукописи « \_\_\_\_\_ », передаем учредителям и редколлегии журнала «Информатика и её применения» неисключительное право опубликовать данную рукопись статьи на русском языке как в печатной, так и в электронной версиях журнала. Мы подтверждаем, что данная публикация не нарушает авторского права других лиц или организаций. Подписи авторов: (ф. и. о., дата, адрес)».*

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности опубликования представленной статьи в открытой печати.

2. Статья подписывается всеми авторами. На отдельном листе представляются данные автора (или всех авторов): фамилия, полные имя и отчество, телефон, факс, e-mail, почтовый адрес. Если работа выполнена несколькими авторами, указывается фамилия одного из них, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет самостоятельную экспертизу присланных статей. Возвращение рукописи на доработку не означает, что статья уже принята к печати. Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.
4. Решение редакционной коллегии о принятии статьи к печати или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия не обязуется направлять рецензию авторам отклоненной статьи.
5. Корректур статей высылаются авторам для просмотра. Редакция просит авторов присылать свои замечания в кратчайшие сроки.
6. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки. Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3. Основной текст: стиль — «Обычный»: шрифт Times New Roman, размер 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине. Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 25 страниц указанного формата. Ознакомиться с шаблонами, содержащими примеры оформления, можно по адресу в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.
7. К рукописи, предоставляемой в 2-х экземплярах, обязательно прилагается электронная версия статьи (как правило, в форматах MS WORD (.doc) или LaTeX (.tex), а также — дополнительно — в формате .pdf) на дискете, лазерном диске или по электронной почте. Сокращения слов, кроме стандартных, не применяются. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы.
8. Статья должна содержать следующую информацию на русском и английском языках: название, Ф.И.О. авторов, места работы авторов и их электронные адреса, аннотация (не более 100 слов), ключевые слова. Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в порядке их первого упоминания. Все фамилии авторов, заглавия статей, названия книг, конференций и т. п. даются на языке оригинала, если этот язык использует кириллический или латинский алфавит.

9. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.
10. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:
- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
  - использовать attach (присоединение);
  - в случае больших объемов информации возможно использование общеизвестных архиваторов (ZIP, RAR);
  - в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.
11. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием, и гонорар авторам не выплачивается.

**Адрес редакции:** Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ИПИ РАН  
Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05 E-mail: rust@ipiran.ru

Технический редактор Л. Кокушкина  
Титульный редактор Т. Торжкова  
Художественный редактор М. Седакова  
Сдано в набор 15.01.10. Подписано в печать 03.03.10. Формат 60 x 84 / 8  
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл.-печ. л. 12. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200 экз.

Заказ №

Издательство «ТОРУС ПРЕСС», Москва 119991, ул. Косыгина, д. 4  
torus@torus-press.ru; <http://www.torus-press.ru>

Отпечатано в ППП «Типография «Наука» с готовых файлов  
Москва 121099, Шубинский пер., д. 6