

Информатика и её применения

Том 5 Выпуск 2 Год 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	
<i>И. А. Соколов, И. Н. Сеницын</i>	2
Академик Пугачёв Владимир Семёнович	3
Структурная теория сложных стохастических систем	
<i>В. С. Пугачёв, И. Н. Сеницын</i>	4
Информационные модели неравномерности вращения Земли	
<i>Ю. Г. Марков, В. В. Перепелкин, И. Н. Сеницын, Н. Н. Семендяев</i>	17
Стохастические информационные технологии на основе фильтров Пугачёва	
<i>Э. Р. Корепанов</i>	36
Теория сложных систем и кибернетическая картина мира	
<i>М. Б. Игнатъев</i>	58
Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом	
<i>А. В. Пантелеев, К. А. Рыбаков</i>	69
Проблема компенсации Рэлеевских замираний в радиоканалах подвижных систем голосовой связи	
<i>Н. Б. Преображенский, Я. Р. Файзулхаков</i>	82
Дерево работ и массово-параллельная обработка	
<i>В. А. Козмидиadi</i>	90
Abstracts	100
Об авторах	103
About Authors	104

Предисловие

Вниманию читателей журнала «Информатика и её применения» предлагается тематический выпуск, посвященный 100-летию со дня рождения академика В. С. Пугачёва.

Академик Владимир Семенович Пугачёв (1911–1998) — известный советский ученый, основоположник статистической теории систем управления, автор фундаментальных работ в области авиационной баллистики и динамики полета, теории управления и информатики, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Все прикладные работы В. С. Пугачёва всегда были ориентированы на применение вычислений. В 30-е гг. XX в. он сам выполнял большие вычислительные работы в области авиационной баллистики. Развитие ЭВМ значительно расширило возможности практического применения разработанных В. С. Пугачёвым статистических методов. Эти методы в задачах теории управления и информатики вследствие большой вычислительной сложности могут быть практически реализованы только с использованием средств вычислительной техники и связи.

Тематический выпуск журнала открывается очерком научной, педагогической, научно-организационной и общественной деятельности академика В. С. Пугачёва.

Работы В. С. Пугачёва получили продолжение в работах его учеников и последователей как в России, так и за рубежом. В сборник включен ряд статей, тематика которых имеет прямое отношение к задачам, идеям и методам, предложенным академиком Пугачёвым.

В статье «Структурная теория сложных стохастических систем» изложена прикладная теория распределений в бесконечномерных стохастических дифференциальных системах. Статья представляет собой расширенное изложение доклада В. С. Пугачёва и И. Н. Сеницына на семинаре, посвященном 85-летию В. С. Пугачёва (Москва, ИПИ РАН, 1996).

В статье Ю. Г. Маркова, В. В. Перепелкина, И. Н. Сеницына, Н. Н. Семендяева «Информационные модели неравномерности вращения Земли» рассмотрены стохастические модели на основе априорных и апостериорных данных, лежащие в основе информационных ресурсов по проблеме «Статистическая динамика вращения Земли».

Обзор современного состояния и новых результатов в области теории и практики синтеза фильтров Пугачёва дан в статье Э. Р. Корепанова «Стохастические информационные технологии на основе фильтров Пугачёва».

Теория сложных систем и кибернетическая картина мира рассматривается в статье М. Б. Игнатьева.

В статье А. В. Пантелеева и К. А. Рыбакова «Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом» описывается новое методическое обеспечение синтеза оптимального нелинейного управления.

Статья Н. Б. Преображенского и Я. Р. Файзулхакова «Проблема компенсации рэлеевских замираний в радиоканалах подвижных систем голосовой связи» посвящена стохастическим методам и средствам повышения эффективности работы систем.

Статья В. А. Козмидиади «Дерево работ и массово-параллельная обработка» посвящена построению программной модели для обработки больших массивов статистической информации на вычислительных кластерах, которые лежат в основе синтеза условно оптимальных фильтров Пугачёва.

Редакционная коллегия журнала выражает надежду, что данный тематический выпуск будет интересен специалистам в области сложных стохастических систем, теории управления и информатики.

Заместитель главного редактора журнала «Информатика и её применения»,
директор Института проблем информатики РАН, академик

И. А. Соколов

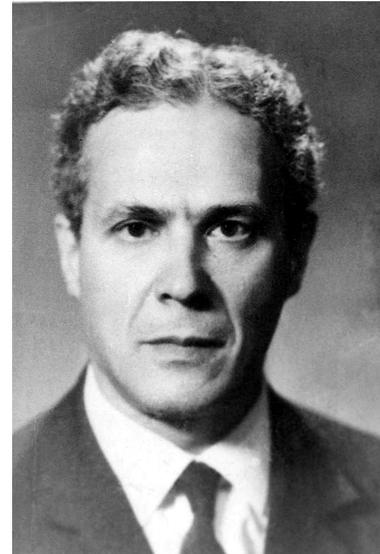
Редактор-составитель тематического выпуска,
заведующий отделом Института проблем информатики РАН,
заслуженный деятель науки Российской Федерации,
доктор технических наук, профессор

И. Н. Сеницын

Академик Пугачёв Владимир Семёнович (25.03.1911–25.03.1998)

Владимир Семёнович Пугачёв был выдающимся русским учёным и замечательным педагогом, основоположником статистической теории управляемых систем, автором фундаментальных работ в области авиационной баллистики и динамики полета, теории управления и информатики, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей.

Его первые работы в 1930-е гг. относятся к теории воздушной стрельбы, им создано новое направление во внешней баллистике — авиационная баллистика. Для решения ряда важных задач, связанных с повышением эффективности стрельбы и бомбометания, требовалось изучение процессов управления в условиях случайных возмущений. В то время в мировой литературе для подобных задач не существовало методов решения. В поисках их В. С. Пугачёв разработал общую теорию систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Работой «Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями» (1944) были заложены основы нового научного направления — статистической теории процессов управления (статистической динамики) задолго до появления публикаций в этой области за рубежом.



Научная деятельность В. С. Пугачёва в послевоенный период была связана с дальнейшей разработкой статистической теории процессов управления. Им были завершены исследования по общей статистической теории линейных систем и приближенных методов исследования точности нелинейных систем. Разработанные В. С. Пугачёвым методы теории управления послужили основой его последующих работ в области динамики управляемого полета.

В цикле работ, выполненных в 1950-е гг., В. С. Пугачёвым были созданы методы статистической теории оптимальных систем. В этой области В. С. Пугачёв развивает общие методы определения оптимальных линейных систем, основанные на разработанной им же теории канонических разложений случайных функций. Кроме того, им создаются общие методы оптимизации динамических систем по любым статистическим критериям.

В период 1965–1970 гг. главным направлением научной работы В. С. Пугачёва была разработка статистической теории обучающихся автоматических систем. В конце 1970-х — начале 1980-х гг. В. С. Пугачёвым заложены основы нового научного направления в теории управления и информатике — теории условно оптимальной фильтрации и экстраполяции процессов.

С 1984 г. и до последних дней В. С. Пугачёв работал в Институте проблем информатики Российской академии наук. В эти годы под его руководством и при непосредственном участии впервые создано программное обеспечение для анализа и моделирования, фильтрации и экстраполяции процессов в сложных стохастических системах. Наряду с линейными фильтрами Калмана нелинейные фильтры Пугачёва прочно вошли в инженерную практику. Методы В. С. Пугачёва реализованы в новых информационных технологиях анализа и синтеза сложных динамических систем, в том числе на ЭВМ с параллельной архитектурой.

Научная деятельность В. С. Пугачёва тесно переплеталась с педагогической деятельностью в ВВИА им. Н. Е. Жуковского в течение почти 40 лет. С 1973 г. педагогическая работа В. С. Пугачёва сосредоточена в Московском авиационном институте. Он организовал кафедру теории вероятностей и математической статистики.

Основные научные труды В. С. Пугачёва: «Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления» (1957, 1962, 1963), «Основы автоматического управления» (1965, 1968, 1974), «Теория вероятностей и математическая статистика» (1979, 1984, 2002), «Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация» (1985, 1987, 1990), «Лекции по функциональному анализу» (1996, 1999), «Теория стохастических систем» (2000, 2001, 2004) — переведены на многие языки и широко известны во всем мире.

СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ СЛОЖНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. С. Пугачёв, И. Н. Сеницын¹

Аннотация: Излагается прикладная теория распределений в бесконечномерных стохастических дифференциальных системах на основе уравнений для многомерных характеристических функционалов. Рассматривается структурная теория синтеза формирующих фильтров. Приводятся формулы для условных вероятностных мер типовых соединений сложных стохастических систем (ССТС). Приводятся примеры. Статья представляет собой расширенное изложение доклада авторов на семинаре, посвященном 85-летию академика В. С. Пугачёва (Москва, ИПИ РАН, 1996).

Ключевые слова: дифференциальная стохастическая система; многомерный характеристический функционал; формирующий фильтр; структурная теория; типовые соединения сложных стохастических систем

1 Введение

Как известно, понятие качества реальной системы является одним из важнейших. Оно позволяет количественно описывать основные свойства реальной системы как на этапах ее разработки и испытаний, так и в условиях эксплуатации. Для количественного описания качества реальной системы обычно вводят показатели качества. Показатель качества зависит как от характеристик системы, так и от входного сигнала. Вычисление показателей качества позволяет определять пригодность системы к функционированию, сравнивать различные системы, определять зависимость этих показателей от характеристик системы и входного сигнала. В общей теории стохастических систем (СТС) обычно используется следующий общий принцип анализа качества системы. Всякое отклонение выходного сигнала Y системы от требуемого сигнала $Y_{\text{тр}}$ вызывает потери, которые в каждом конкретном случае характеризуются некоторой *функцией потерь* $l = l(Y, Y_{\text{тр}})$. Качество системы в среднем для данной реализации требуемого выходного сигнала $Y_{\text{тр}}$ при всех возможных реализациях действительного выходного сигнала Y , соответствующих $Y_{\text{тр}}$, оценивается условным математическим ожиданием функции потерь при данной реализации требуемого выходного сигнала:

$$\rho(A | Y_{\text{тр}}) = M [l(Y, Y_{\text{тр}}) | Y_{\text{тр}}] .$$

Эту величину обычно называют *условным риском*. Она зависит от оператора A , определяющего Y , а также от $Y_{\text{тр}}$. Наконец, среднее качество системы при всех возможных реализациях Y , $Y_{\text{тр}}$ характери-

зуется математическим ожиданием условного риска, равным безусловному математическому ожиданию функции потерь:

$$R(A) = M [\rho(A | Y_{\text{тр}})] = M [l(Y, Y_{\text{тр}})] .$$

Величина $R(A)$ характеризует *средние потери*, или *средний риск*, и является обобщенным показателем качества системы. Очевидно, что $R(A)$ включает различные частные показатели качества системы $R_1(A)$, $R_2(A)$, ... Установление взаимосвязи между $R(A)$ и $R_1(A)$, $R_2(A)$, ... в большинстве случаев является неформальной задачей и определяется спецификой решаемой задачи.

Средний квадрат ошибки $E = Y - Y_{\text{тр}}$ конечномерной системы можно получить при выборе функции потерь в виде:

$$l(Y, Y_{\text{тр}}) = (Y - Y_{\text{тр}})^T (Y - Y_{\text{тр}}) .$$

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} R(A) &= M [l(Y, Y_{\text{тр}})] = \\ &= \text{tr} M (Y - Y_{\text{тр}})^T (Y - Y_{\text{тр}}) = \text{tr} \Gamma_E . \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma_E = M E^T E$, $E = Y - Y_{\text{тр}}$. Отсюда в одномерном случае

$$R(A) = M E^T E = D_E + m_E .$$

Обобщенный средний квадрат ошибки конечномерной системы можно найти при функции потерь вида:

$$l(Y, Y_{\text{тр}}) = (Y - Y_{\text{тр}})^T Q (Y - Y_{\text{тр}}) ,$$

где Q — неотрицательно-определенная матрица.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-07-00021) и программы ОНИТ РАН «Информационные технологии и анализ сложных систем» (проект 1.5).

¹Институт проблем информатики Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

Показатель накопления ущерба при экспоненциальной функции потерь $l(Y, Y_{\text{ТР}}) = 1 - \exp[(Y - Y_{\text{ТР}})^T Q_1 (Y - Y_{\text{ТР}})]$ определяется формулой:

$$R(A) = M[l(Y, Y_{\text{ТР}})] = 1 - M\{\exp[-(Y - Y_{\text{ТР}})^T Q_1 (Y - Y_{\text{ТР}})]\}.$$

При показателе качества одномерной системы в виде вероятности невыхода ошибки $E = Y - Y_{\text{ТР}}$ из заданного интервала $[-a, a]$ имеем средние потери:

$$R(A) = M[l(Y, Y_{\text{ТР}})] = P\{|Y - Y_{\text{ТР}}| > a\}.$$

Пользуясь понятием качества для ССтС в целом и ее подсистем, нетрудно сформулировать две основные задачи теории СтС:

- (1) найти вероятностные характеристики показателя качества выходного сигнала при известных характеристиках системы и входного сигнала (прямая задача);
- (2) найти вероятностные характеристики показателя качества входного сигнала при известных характеристиках системы и выходного сигнала (обратная задача).

Наряду с двумя основными задачами встречаются также и комбинированные, когда по известным вероятностным характеристикам показателей качества части компонент входного и выходного сигналов и подсистем требуется определить характеристики других компонент. Важное практическое значение имеют задачи, связанные с декомпозицией, агрегированием, преобразованием структуры модели системы, а также теорией эквивалентности различных сигналов и систем.

Теория СтС лежит в основе современных методов анализа и оптимального синтеза структуры и параметров сложных динамических систем, информационно-управляющих систем, а также информационно-аналитических систем, предназначенных для фильтрации, распознавания и обучения.

Вопросы нахождения распределений в дифференциальных СтС в бесконечных пространствах на основе теории марковских процессов рассматриваются, например, в [1–4]. Более подробно и применительно к различным классам СтС со случайной структурой анализ распределений дан, например, в [5–7].

В статье излагается прикладная теория распределений в бесконечномерных дифференциальных СтС на основе уравнений для многомерных характеристических функционалов. Рассматривается структурная теория синтеза формирующих фильтров. Приводятся формулы для условных вероятностных мер типовых соединений ССтС. Даются иллюстративные примеры.

Статья представляет собой расширенное изложение доклада авторов на семинаре, посвященном 85-летию академика В. С. Пугачёва (Москва, ИПИ РАН, 1996).

2 Распределения в бесконечномерных дифференциальных стохастических системах

Рассмотрим сначала случайный процесс $Y(t)$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathcal{Y} , определяемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито следующего вида:

$$dY = a(Y, t)dt + b(Y, t)dW, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (1)$$

где $W = W(t)$ — случайный процесс с независимыми приращениями в некотором другом гильбертовом пространстве из \mathcal{W} в \mathcal{Y} ; $a(Y, t)$ — оператор, отображающий $\mathcal{Y} \times R$ в \mathcal{Y} ; $b(Y, t)$ — операторно-значная функция, отображающая $\mathcal{Y} \times R$ в пространство линейных операторов, действующих из \mathcal{W} в \mathcal{Y} ; Y_0 — случайная величина в пространстве \mathcal{Y} , независимая от будущих приращений процесса W . Центральная задача анализа состоит в нахождении многомерных характеристических функционалов процесса Y :

$$g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = M \exp \left[i \sum_{k=1}^n \lambda_k Y(t_k) \right] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

(где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — элементы сопряженного пространства \mathcal{Y}^*), которые при известных условиях полностью определяют распределение процесса. Поставленная задача сравнительно легко решается при выполнении следующих условий.

1. Пространство \mathcal{Y} значений процесса $Y(t)$ при каждом t является сепарабельным H -пространством.
2. Случайный процесс $W(t)$ представляет собой винеровский процесс со значениями в сепарабельном H -пространстве \mathcal{W} , ковариационный оператор значения которого при каждом данном t определяется формулой:

$$K_w(t) = \int_0^t \nu(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $\nu(t)$ — интенсивность процесса $W(t)$, представляющая собой при каждом t ядерный самосопряженный оператор.

3. Функция $a(Y, t)$ со значениями в H -пространстве \mathcal{Y} определяется формулой:

$$a(Y, t) = AY + f(Y, t). \quad (4)$$

Здесь A — замкнутый линейный оператор, являющийся инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов $\{u(t)\}$, удовлетворяющих условию $\|u(t)\| \leq ce^{-\gamma t}$ при некоторых $c, \gamma > 0$ и уравнению

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = I,$$

где I — единичный оператор; $f(Y, t)$ — сильно дифференцируемая по Y и t функция со значениями в H -пространстве \mathcal{Y} .

4. Операторно-значная функция $b(Y, t)$ при каждом Y и t представляет собой компактный линейный оператор такой, что самосопряженный оператор

$$v(Y, t, \tau) = u(t - \tau)\sigma(Y, t)u(t - \tau)^*,$$

где

$$\sigma(Y, t) = b(Y, t)\nu(t)b(Y, t)^*$$

является ядерным и при любом t выполняется следующее условие:

$$\int_0^t \text{tr } v(Y, t, \tau) d\tau < \infty. \quad (5)$$

Представимость функции $a(Y, t)$ в уравнении (1) в виде (4) с ограничениями на $A, f(Y, t)$ и условие (5) достаточны для существования решения стохастического интегрального уравнения

$$Y(t) = u(t)Y_0 + \int_0^t u(t - \tau)f(Y(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t u(t - \tau)b(Y(\tau), \tau) dW$$

(а значит, и уравнения (1) при $t_0 = 0$) и существования и интегрируемости оператора момента второго порядка. Ядерность операторов $\nu(t), \sigma(Y, t), v(Y, t, \tau)$ необходима и достаточна, чтобы $\nu(t)\Delta t, \sigma(Y, t)\Delta t, v(Y, t, \tau)\Delta\tau$ для бесконечно малых Δt и $\Delta\tau$ были ковариационными операторами нормально распределенных случайных величин $\Delta W, b(Y, t)\Delta W(t)$ и $u(t - \tau)b(Y, \tau)\Delta W(\tau)$.

Покажем, что многомерные характеристические функционалы (2) при выполнении условий 1–4 определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial t_n} &= \\ &= M \left\{ \left[i(\lambda_n, a(Y_{t_n}, t_n)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\lambda_n, \sigma(Y_{t_n}, t_n)) \lambda_n \right] \exp \left[i \sum_{k=1}^n (\lambda_k, Y_{t_k}) \right] \right\} \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6) \end{aligned}$$

и начальными условиями

$$g_1(\lambda_1; 0) = g_0(\lambda_1), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_{n-1}, t_{n-1}) &= \\ &= g_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} + \lambda_n; t_1, \dots, t_{n-1}), \quad (8) \end{aligned}$$

где $g_0(\lambda_1)$ — характеристический функционал случайной величины Y_0 ; (λ_k, Y_{t_k}) — скалярное произведение элементов λ_k и Y_{t_k} H -пространства \mathcal{Y} .

В самом деле, при данном n достаточно использовать формулу Ито для вычисления стохастического дифференциала функции $\exp \left[i \sum_{k=1}^n (\lambda_k, Y_{t_k}) \right]$, рассматриваемой как функция скалярного случайного процесса $(\lambda_n, Y(t_n))$ при фиксированных $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_{n-1}}$, и формулу преобразования ковариационного оператора при линейном преобразовании.

В стационарном случае, когда $f(Y, t) = f(Y), b(Y, t) = b(Y)$ и $\nu(t) = \nu$ не зависят от времени, в системе при условиях 1–4 существует устойчивый стационарный процесс. Одномерное распределение стационарного процесса $Y(t)$ определяется уравнением (6) при $n = 1$ и $\partial g_1 / \partial t = 0$. Как известно [8], этот процесс устойчив при $\|u(t)\| < e^{-\gamma t}$ для некоторого $\gamma > 0$.

Для линейной системы (1), когда при каждом t

$$\begin{aligned} f(Y, t) &= f_1(t)Y + f_0(t); \\ b(Y, t) &= b(t); \quad \sigma(Y, t) = \sigma(t), \end{aligned}$$

где $f_1 = f_1(t)$ — ограниченный линейный оператор; $f_0 = f_0(t)$ — некоторый элемент H -пространства \mathcal{Y} ; $b = b(t)$ — оператор, отображающий \mathcal{W} в \mathcal{Y} , уравнения (6) при выполнении условий 1–4 сводятся к линейному уравнению первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= (\lambda, [A + f_1] D_\lambda g) + \\ &\quad + \left[i(\lambda, f_0) - \frac{1}{2} (\lambda, \sigma \lambda) \right] g. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь $D_\lambda g$ — сильная производная характеристического функционала g . Отсюда для определения

стационарных процессов в случае, когда f_0, f_1, σ не зависят от времени t , положив в (6) $n = 1$, $\partial g_1 / \partial t = 0$, будем иметь:

$$(\lambda, (A + f_1)D_\lambda g_1) + \left[i(\lambda, f_0) - \frac{1}{2} (\lambda, \sigma \lambda) \right] g_1 = 0.$$

Пример 1. Рассмотрим одномерную СтС, описываемую нелинейным волновым стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2(1 + V_1) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2h_1 \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{2}{3} h_2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^3 + V_2 \quad (*)$$

с граничными условиями $U(0, t) = U(2l, t) = 0$. Здесь $U = U(x, t)$; $V_{1,2} = V_{1,2}(x, t)$ — независимые нормально распределенные белые шумы с интенсивностями $\nu_{1,2} = \nu_{1,2}(x_1, x_2, t)$; $c, h_{1,2}$ — постоянные коэффициенты.

Положив

$$Y_1 = U; \quad Y_2 = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad Y = [Y_1 \ Y_2]^T;$$

$$a(Y, t) = \begin{bmatrix} Y_2 \\ c^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + 2h_1 Y_2 - \frac{2}{3} h_2 Y_2^3 \end{bmatrix};$$

$$b(Y, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} & 1 \end{bmatrix},$$

приведем уравнение (*) к виду (1). Уравнение (6) для одномерного характеристического функционала $g_1 = g_1(\lambda_1, \lambda_2; t)$ примет следующий вид:

$$\frac{\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2; t)}{\partial t} = M \left\{ \left[i(\lambda_1, Y_2) + i \left(\lambda_2, c^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + 2h_1 Y_2 - \frac{2}{3} h_2 Y_2^3 \right) - \frac{c^4}{2} \left(\lambda_2, \left(\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \right) \nu_1 \left(\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \right)^* \lambda_2 \right) - \frac{1}{2} (\lambda_2, \nu_2 \lambda_2) \right] e^{i(\lambda_1, Y_1) + i(\lambda_2, Y_2)} \right\},$$

где скалярное произведение задается формулой:

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{2l} \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Наряду с уравнением (1) встречаются стохастические дифференциальные уравнения в сепарабельном H -пространстве \mathcal{Y} следующего вида:

$$dY = a(Y, t) dt + b(Y, t) dW_0 + \int_{R_0^q} c(Y, t, u) P^0(dt, du).$$

Здесь $W_0 = W_0(t)$ — винеровский процесс со значениями в сепарабельном H -пространстве \mathcal{W}_0 ; $P^0(\Delta, A)$ — центрированная пуассоновская мера; $\Delta = (t_1, t_2)$ — некоторый интервал времени; A — некоторое борелевское множество пространства R_0^q , представляющего собой q -мерное пространство с выколотым началом; $a = a(Y, t)$ и $c = c(Y, t, u)$ — функции, отображающие $\mathcal{Y} \times R$ и $\mathcal{Y} \times R \times R_0^q$ в \mathcal{Y} , $b = b(Y, t)$ — операторно-значная функция, отображающая $\mathcal{Y} \times R$ в пространство линейных операторов, которые действуют из \mathcal{W}_0 в \mathcal{Y} . Будем считать, что начальное значение Y_0 является, во-первых, элементом пространства \mathcal{Y} и, во-вторых, не зависит от приращений винеровского процесса W_0 и значений пуассоновской меры $P^0(\Delta, A)$ на интервале времени $\Delta = (t_1, t_2]$, $t_0 \leq t_1 < t_2$ для любого A .

В этом случае аналогично предыдущему показывается, что многомерные характеристические функционалы (2) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial t_n} = M \left\{ \left[i(\lambda_n, a(Y_{t_n}, t_n)) + \chi(\lambda_n, Y_{t_n}; t_n) \exp \left[i \sum_{k=1}^n (\lambda_k, Y_{t_k}) \right] \right] \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

с начальными условиями (7) и (8), где

$$\chi(\lambda, y; t) = -\frac{1}{2} (\lambda, \sigma_0(y, t)) + \int_{R_0^q} \left\{ e^{i(\lambda, c(y, t, u))} - 1 - i(\lambda, c(y, t, u)) \right\} \nu_P(t, du).$$

Здесь $\sigma_0(y, t) = b(y, t) \nu_0(t) b(y, t)^*$; ν_0 — интенсивность процесса W_0 , представляющая собой следовый оператор; $b(y, t)^*$ — оператор, сопряженный с $b(y, t)$; $\nu_P(t, du)$ — интенсивность простого пуассоновского процесса.

Аналогично выводятся уравнения для конечномерных характеристических функционалов в банаховых пространствах с базисом.

3 Формирующие фильтры для дифференциальных стохастических систем в бесконечномерных пространствах

Многие задачи практики приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных, содержащим стационарные или приводимые к стационарным случайные функции векторного аргумента. Для применения к таким задачам методов теории стохастических систем целесообразно представить входящие в уравнения случайные функции как решения стохастических дифференциальных уравнений. Дадим общий метод нахождения стохастических дифференциальных уравнений в соответствующих H -пространствах для одного широкого класса стационарных функций векторного аргумента.

Пусть $X(t, x)$ — скалярная стационарная случайная функция скалярной переменной t , которую будем считать временем, и N -мерной векторной переменной x ; $k(t_1 - t_2, x_1 - x_2)$ — ее ковариационная функция, которая равна $k(t_1 - t_2, 0)$ при $x_1 = x_2 = x$ и $k(0, x_1 - x_2)$ при $t_1 = t_2 = t$. Будем рассматривать здесь нормально распределенные случайные функции $X(t, x)$, удовлетворяющие двум условиям:

- (1) при данном x случайная функция $X_x(t)$ имеет не зависящую от x рациональную спектральную плотность

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau, 0) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{Q(\omega^2)}{P(\omega^2)},$$

где $P(\omega^2)$ и $Q(\omega^2)$ — полиномы, причем $P(\omega^2)$ не имеет нулей на действительной оси;

- (2) при данном t ковариационная функция случайной функции $X_t(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|k(0, x_1 - x_2)| < C e^{-\alpha |x_1 - x_2|} \quad (10)$$

при некоторых $C > 0$ и $\alpha > 0$.

Чтобы получить стохастическое дифференциальное уравнение для случайной функции $X = X_x(t)$, рассматриваемой как случайная функция времени t при данном x , можно применить тот же метод формирующих фильтров, который использовался для скалярных случайных процессов. Согласно этому методу необходимо представить спектральную плотность $s_x(\omega)$ в виде:

$$s_x(\omega) = \frac{\nu_0}{2\pi} \left| \frac{H(i\omega)}{F(i\omega)} \right|^2, \quad (11)$$

где $F(s)$ и $H(s)$ — полиномы, при $s = i\omega$ все корни которых лежат в левой полуплоскости; ν_0 — постоянная, которая обычно получается из соображений удобства записи уравнения для $X(t, x)$. Формула (11) позволяет трактовать $X_x(t)$ как результат прохождения белого шума интенсивности ν_0 через стационарную линейную систему с передаточной функцией $H(s)/F(s)$. Это даст для $X_x(t)$ стохастическое дифференциальное уравнение:

$$F \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) X = H \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) V, \quad (12)$$

где $V = V(t, x) = V_x(t)$ — стационарный нормально распределенный белый шум, зависящий от времени t при данном x , интенсивность которого равна ν_0 . Если

$$F(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \quad H(s) = \sum_{k=0}^m b_k s^k, \quad m < n,$$

то (12) представляет собой линейное стохастическое дифференциальное уравнение n -го порядка, которое надо понимать как стандартное уравнение Ито:

$$dZ = AZ dt + q dW, \quad (13)$$

где Z — вектор с компонентами $Z_1 = X, Z_2, \dots, Z_n$; A — матрица с элементами $a_{ij} = \delta_{i, i+1}, i = 1, \dots, n-1; a_{ni} = -a_n^{-1} a_{i-1}, i = 1, \dots, n; q$ — вектор с компонентами $q_1 = \dots = q_{n-m-1} = 0, q_{n-m} = a_n^{-1} b_m,$

$$q_k = a_n^{-1} \left(b_{n-k} - \sum_{h=n-m}^{k-1} a_{n-k+h} q_h \right), \quad k = n-m+1, \dots, n;$$

$W = W(t, x)$ — скалярный винеровский процесс со значениями в пространстве функций переменной x , слабой средней квадратической производной которого является белый шум $V = V_x(t)$ интенсивности ν :

$$W = W(t, x) = \int_0^t V_x(\tau) d\tau.$$

Уравнение (12) приводится к (13) формальной заменой переменных:

$$Z_1 = X, \quad Z_{k+1} = \frac{\partial Z_k}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, n-m-1;$$

$$Z_{k+1} = \frac{\partial Z_k}{\partial t} - q_k V, \quad k = n-m, \dots, n-1,$$

где q_k определены формулами (9), причем $q\nu q^T = q q^T \nu$.

Будем рассматривать случайную функцию $X(t, x)$ как случайный процесс со значениями $X_t(\cdot)$ в H -пространстве $L_2(D)$ функций переменной x , $D \subset R^N$. Тогда ковариационным оператором значения этого процесса при данном t будет интегральный оператор с квадратично-интегрируемым ядром $k_x(0, x - \xi)$:

$$K_x \varphi = \int_D k_x(0, x - \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Аналогичная формула имеет место для ковариационного оператора K_{z_t} векторного процесса $Z_t(x)$:

$$K_{z_t} \varphi = \int_D k_{z_t}(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

где ядро $k_{z_t}(x_1 - x_2) = k_z(0, x_1 - x_2)$ является ковариационной функцией процесса $Z_t(x)$ при заданном t . Чтобы найти ядро $\tilde{\nu}(x - \xi)$ оператора интенсивности винеровского процесса W , воспользуемся уравнением, связывающим ковариационную матрицу k_{z_t} значения процесса $Z = Z(t, x)$ при данном t с интенсивностью ν винеровского процесса W . Это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial k_{z_t}}{\partial t} = Ak_{z_t} + k_{z_t} A^T + qq^T \nu. \quad (15)$$

Так как процесс Z стационарен, то ковариационная матрица k_{z_t} его значения при данном t не зависит от t и выражается через его ковариационную функцию $k_z(t_1 - t_2, x_1 - x_2)$ формулой $k_{z_t} = k_z(0, x_1 - x_2)$. Поэтому уравнение (15) имеет в данном случае вид:

$$0 = Ak_z(0, x_1 - x_2) + k_z(0, x_1 - x_2) A^T + qq^T \nu(x_1 - x_2). \quad (16)$$

Матричное уравнение (16) представляет собой систему $n(n+1)/2$ скалярных линейных алгебраических уравнений с $n(n+1)/2$ неизвестными, а именно: $n(n+1)/2 - 1$ неизвестных элементов матрицы $k_z(0, x_1 - x_2)$ и неизвестная $\nu(x_1 - x_2)$. Один элемент матрицы $k_z(0, x_1 - x_2)$ известен: $k_{z_1, z_1}(0, x_1 - x_2) = k_x(0, x_1 - x_2)$, поскольку $Z_1(t, x) = X(t, x)$. Исключив из (14) не представляющие интереса неизвестные элементы матрицы $k_z(0, x_1 - x_2)$, найдем неизвестную функцию $\tilde{\nu}(x_1 - x_2)$:

$$\tilde{\nu}(x_1 - x_2) = ck_x(0, x_1 - x_2),$$

где c — некоторая постоянная. При $x_1 = x_2 = x$ эта формула дает интенсивность ν_0 процесса $W(t, x)$ при данном x : $\nu_0 = ck_x(0, 0)$.

Из (3) следует формула для ядер операторов:

$$k_w(t, x_1 - x_2) = \int_0^t \tilde{\nu}(x_1 - x_2) d\tau = ck_x(0, x_1 - x_2)t.$$

Здесь k_w — ядро оператора $K_w(t)$ в (3) при данном t . Условие (10) обеспечивает ядерность операторов k_w и ν , так как в этом случае в силу квадратичной интегрируемости ядра k_x для любого ортонормального базиса $\{\varphi_k(x)\}$ в $L_2(D)$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \int_D \int_D \tilde{\nu}(x - \xi) \varphi_k(x) \varphi_k(\xi) dx d\xi = \\ & = c \sum_{k=1}^{\infty} \int_D \int_D k_x(0, x - \xi) \varphi_k(x) \varphi_k(\xi) dx d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Для прямоугольной области D это легко проверяется непосредственным интегрированием после использования оценки (10), так как за базис $\{\varphi_k(x)\}$ в данном случае можно взять тригонометрический базис, соответствующий разложению функции $f(x) \in L_2(D)$ в ряд Фурье.

Таким образом, одномерное нормальное распределение винеровского процесса W сосредоточено на H -пространстве $L_2(D)$. При этом винеровский процесс W со значениями в $L_2(D)$ обладает при некотором дополнительном условии основными свойствами конечномерных винеровских процессов: непрерывность по t и недифференцируемость по t ни в одной точке любой из его реализаций.

Уравнение (13) представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение в H -пространстве $L_2^n(D)$ n -мерных векторных функций переменной x . Изложенный метод позволяет находить стохастические дифференциальные уравнения в H -пространстве и для случайных функций $X = X(t, x)$, приводимых к стационарным. Случай функции, приводимой к стационарной преобразованием самой функции, $X(t, x) = \psi(X_1(t, x), t, x)$, где $X_1(t, x)$ — стационарная случайная функция, тривиален. Поэтому остается рассмотреть ситуацию, когда случайная функция $X(t, x)$ приводится к стационарной функции преобразованием и самой функции, и аргумента.

Замечание 1. Пусть $X(t, x) = \psi(X_1(\varphi(t), x), t, x)$, где $X_1(s, x)$ — стационарная случайная функция, а $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция; $\varphi(0) = 0$. Написав уравнение (13) для случайной функции $X_1(s, x)$,

$$dZ = a ds + b dW_1,$$

где $Z_1(s, x) = X_1(s, x)$, а $W_1(s, x)$ — винеровский процесс с ядром ковариационного оператора $\nu(x_1 - x_2)s$, и сделав замену переменной $s = \varphi(t)$,

получим стохастическое дифференциальное уравнение в H -пространстве $L_2^n(D)$:

$$dZ = A\dot{\varphi}Z dt + q dW .$$

Здесь $W = W(t, x) = W_1(s, x)$ — винеровский процесс с ядром ковариационного оператора его значения при данном t , равным $k(t, x_1 - x_2) = \tilde{\nu}_1(x_1 - x_2)\varphi(t)$, где $\tilde{\nu}_1(x_1 - x_2)$ — ядро оператора интенсивности винеровского процесса $W_1(s)$.

Для векторной случайной функции $X(t, x)$ ее надо сначала привести к случайной функции с некоррелированными, а значит, и с независимыми в силу нормальности распределения компонентами. Для этого достаточно, трактуя некоррелированность как ортогональность (что обычно делается в теории вероятности), применить к вектору $X(t, x)$ стандартный шмидтовский метод ортогонализации векторов. Затем можно использовать изложенный метод к каждой компоненте полученной таким образом векторной случайной функции.

4 О распределениях в дискретных марковских стохастических системах

Приведем важные для приложений уравнения дискретных марковских СтС. С этой целью рассмотрим случайную последовательность $\{Y_k\}$ со значениями в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$, удовлетворяющую стохастическому разностному уравнению

$$Y_{k+1} = \omega_k(Y_k, V_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где $\{V_k\}$ — последовательность независимых случайных величин со значениями в другом измеримом пространстве $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$; $\omega_k(y_k, v_k) — (\mathcal{B} \times \mathcal{E}, \mathcal{B})$ -измеримые функции, отображающие $\mathcal{Y} \times \mathcal{V}$ в \mathcal{Y} . Пусть начальное значение Y_1 не зависит от последовательности $\{V_k\}$; $\mu_1(B), B \in \mathcal{B}$, — распределение Y_1 ; $\nu_k(E), E \in \mathcal{E}$, — распределение V_k . В этом случае $\{Y_k\}$ является марковской последовательностью, ее многомерные распределения полностью определяются начальным распределением $\mu_1(B), B \in \mathcal{B}$, и переходным распределением $\mu_{k+1}(B | Y_k), B \in \mathcal{B}$, причем

$$\mu_{k+1}(B | y) = \nu_k(\omega_k^{-1}(y, B)),$$

где $\omega_k^{-1}(y, B) \in \mathcal{V}$ — прообраз множества $B \in \mathcal{B}$, определяемого функцией $\omega_k(y, v)$ при фиксированном y . Рекуррентное уравнение (17) при $k = 1, 2, \dots$ и данном начальном распределении $\mu_1(B)$ в принципе позволяет найти распределения последовательности $\{Y_k\}$.

5 Сложные стохастические системы

Как известно [9], построение математических моделей систем, поведение которых не полностью детерминировано, является одной из важнейших проблем современной теории СтС. К таким системам относятся, в частности, системы массового обслуживания, любые системы, включающие людей, и вообще любые сложные системы, в том числе с распределенными параметрами. Для исследования систем с недетерминированным поведением естественно использовать мощный аппарат вероятностных методов. Для этого необходимо создание вероятностных моделей таких систем. В то же время целесообразно распространить на системы с недетерминированным поведением структурный подход. Структурные методы дают возможность определять характеристики сложных систем по известным характеристикам входящих в их состав более простых систем.

Изложенные соображения приводят к необходимости определить класс систем (точнее, математических моделей систем), допускающих вероятностное описание, замкнутый относительно всех возможных соединений, с помощью которых сложные системы формируются из более простых.

В практических задачах приходится встречаться с различными математическими описаниями входных и выходных сигналов. Так, в автоматических системах входные и выходные сигналы с математической точки зрения представляют собой скалярные или векторные функции, в конечных автоматах — логические переменные, в системах массового обслуживания — потоки событий, в системах распознавания — изображения и другие образы, как их принято называть. Поэтому в общей теории СтС необходимо считать входные и выходные сигналы элементами произвольных абстрактных пространств. Действие системы состоит в том, что данному элементу x пространства входных сигналов X она ставит в соответствие некоторый элемент y пространства выходных сигналов Y . Характерной особенностью системы с недетерминированным поведением является то, что одному и тому же входному сигналу x могут соответствовать различные выходные сигналы.

Сложной стохастической системой будем называть такую систему, которая ставит в соответствие любому входному сигналу $x \in X$ определенное распределение вероятностей в пространстве выходных сигналов Y . Таким образом, поведение ССтС описывается переходной вероятностью

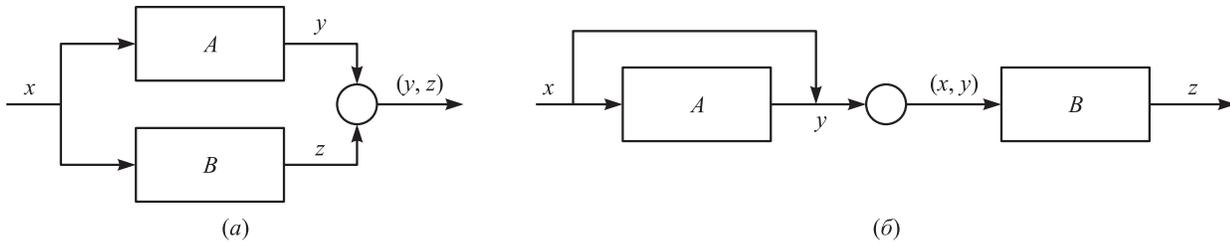


Рис. 1 Параллельное (а) и последовательное (б) соединение ССтС

$\mu_y = \mu(E_y|x)$ принадлежности выходного сигнала множеству $E_y \subset Y$ при данном входном сигнале $x \in X$. Функция μ_y , которую будем называть *условной вероятностной мерой* или *решающей функцией ССтС*, при каждом $x \in X$ представляет собой нормированную меру, определенную на некоторой σ -алгебре \mathcal{B} множеств пространства Y , и при каждом множестве $E_y \in \mathcal{B}$ является функцией переменной x , измеримой относительно некоторой σ -алгебры \mathcal{A} множеств пространства X .

Решающая функция ССтС — это достаточно полная вероятностная характеристика системы. В приложениях часто ограничиваются менее полными характеристиками, например условными многомерными плотностями и характеристическими функциями, условными моментами различных порядков.

Рассмотрим основные типы соединений ССтС. *Параллельным соединением* $A \oplus B$ систем A и B будем называть такое их соединение, при котором они получают один и тот же входной сигнал, а выходным сигналом служит совокупность выходных сигналов этих систем (рис. 1, а). Очевидно, что параллельно могут соединяться только системы с одним и тем же пространством входных сигналов X . Если Y и Z — пространства выходных сигналов систем A и B соответственно, то входной сигнал их параллельного соединения представляет собой элемент (y, z) произведения пространств $Y \times Z$. Очевидно, что параллельное соединение коммутативно, $B \oplus A = A \oplus B$.

Последовательным соединением $A \otimes B$ систем A и B называется такое их соединение, при котором выходной сигнал системы A входит в состав

входного сигнала системы B (рис. 1, б). В частном случае входным сигналом системы B может служить выходной сигнал системы A . Последовательное соединение в общем случае некоммутативно: $B \otimes A \neq A \otimes B$.

Замыканием $[A]$ системы A *элементарной обратной связью* называется ввод выходного сигнала системы A в состав ее входного сигнала. На рис. 2, а показана система A , входной сигнал (x, y) которой принадлежит произведению пространств $X \times Y$, а выходной сигнал z представляет собой элемент пространства Y . На рис. 2, б показано замыкание $[A]$ системы A элементарной обратной связью.

Замыканием системы A *обратной связью через систему B* называется ввод выходного сигнала системы A , преобразованного системой B , в состав входного сигнала системы A (рис. 3). Легко видеть, что замыкание системы A обратной связью через систему B равноценно замыканию последовательного соединения систем B и A элементарной обратной связью $[B \otimes A]$.

Все возможные соединения систем, очевидно, представляют собой комбинацию рассмотренных трех основных типов соединений ССтС.

При исследовании ССтС следует учитывать, что связи в этих системах в общем случае тоже являются стохастическими в том смысле, что они могут случайно возникать и нарушаться в процессе работы системы. Очевидно, что поток событий, управляющий случайным изменением связей в сложной системе или вообще изменением состояния системы, можно рассматривать как выходной сигнал некоторой СтС и в то же время как дополнительную компоненту входного сигнала данной системы. Это



Рис. 2 Замыкание ССтС A элементарной обратной связью

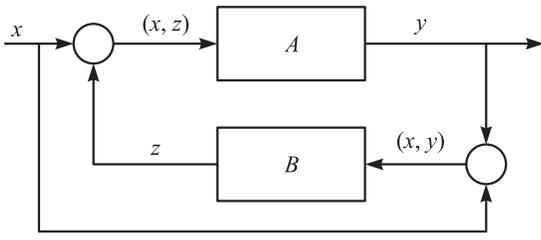


Рис. 3 Замыкание ССтС A обратной связью через систему B

дает возможность свести систему со случайным изменением связей к последовательному соединению двух систем.

Решающие функции μ_A и μ_B СтС, соединенных параллельно (см. рис. 1, а), определяют условную вероятностную меру в прямом произведении пространств $Y \times Z$ выходных сигналов этих систем. Эта мера выражается формулой:

$$\begin{aligned} \mu_{A \oplus B}(\mathcal{E} | x) &= \iint_{\mathcal{E}} \mu_A(dy | x) \mu_B(dz | x) = \\ &= \int_Y \mu_B(\mathcal{E}_y | x) \mu_A(dy | x), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathcal{E} \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, $\mathcal{E}_y = \{z : (y, z) \in \mathcal{E}\}$ — сечение множества \mathcal{E} в точке y , \mathcal{B}, \mathcal{C} — σ -алгебры множеств в пространствах Y и Z соответственно. Интегрирование по y в последнем интеграле проводится фактически по проекции \mathcal{E} на множество Y , поскольку $\mathcal{E}_y \neq \emptyset$ только в том случае, когда y принадлежит этой проекции. Таким образом, *параллельное соединение систем A и B представляет собой стохастическую систему $A \oplus B$, решающая функция которой $\mu_{A \oplus B}$ определяется формулой (18).*

Аналогично определяют решающие функции μ_A, μ_B систем A и B , соединенных последовательно (см. рис. 1, б), а также условную вероятностную меру в прямом произведении $Y \times Z$. Эта мера выражается формулой:

$$\begin{aligned} \mu_{A \otimes B}(\mathcal{E} | x) &= \\ &= \int_Y \mu_B(\mathcal{E}_y | x, y) \mu_A(dy | x), \quad \mathcal{E} \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (19)$$

Специальный случай последовательного соединения (см. рис. 1, б), представленный на рис. 2, есть также СтС, (обозначим ее C), решающая функция которой получается из (19) при $\mathcal{E} = Y \times F, F \in \mathcal{C}$:

$$\mu_C(F | x) = \int_Y \mu_B(F | x, y) \mu_A(dy | x), \quad F \in \mathcal{C}. \quad (20)$$

Таким образом, *последовательное соединение систем A и B представляет собой систему C , решающая функция которой μ_C определяется формулой (20).*

Рассмотрим замыкание $[A]$ системы A элементарной обратной связью (см. рис. 2). Пусть $\mu_A(G | x, y), G \in \mathcal{B}$, — решающая функция системы A . Предположим, что существует измеримое отображение $T_y : Y \rightarrow Y$ пространства Y в себя такое, что мера $\mu_A(T_y^{-1}G | x, y)$ не зависит от y . Эту последнюю меру, если она существует, обозначим $\mu(G | x)$, так что справедливо тождество:

$$\begin{aligned} \mu(G | x) &= \\ &= \mu_A(T_y^{-1}G | x, y), \quad G \in \mathcal{B}, \quad (x, y) \in X \times Y. \end{aligned} \quad (21)$$

Положим здесь $y = y_0$. Если T_{y_0} — обратимое преобразование, то

$$\mu(T_{y_0}G | x) = \mu_A(G | x, y_0), \quad G \in \mathcal{B},$$

где $\mu_A(G | x, y_0)$ — условная вероятностная мера выходного сигнала Y системы $[A]$ при заданном $x \in X$. Поэтому решающую функцию системы $[A]$ естественно определить формулой:

$$\mu_{[A]}(G | x) = \mu(T_{y_0}G | x), \quad G \in \mathcal{B}.$$

Эта формула вследствие (21) приводится также к виду:

$$\mu_{[A]}(G | x) = \mu_A(T_{y_0}^{-1}T_{y_0}G | x, y), \quad G \in \mathcal{B}, \quad (22)$$

На основании формулы

$$\mu_A(T_y^{-1}G | x, y) = \mu_A(T_{y_0}^{-1}G | x, y_0)$$

или, эквивалентно,

$$\mu_A(G | x, y) = \mu_A(T_{y_0}^{-1}T_y G | x, y_0),$$

вытекающей из (21), правая часть в (22) не зависит от выбора $y_0 \in Y$. Таким образом, *замыкание системы A элементарной обратной связью представляет собой систему $[A]$, решающая функция которой $\mu_{[A]}$ определяется формулой (22).*

Сформулированные предложения устанавливают замкнутость класса ССтС относительно всех возможных типовых соединений. Формулы (18), (19) и (22) дают принципиальную возможность находить решающие функции любых соединений ССтС по данным решающим функциям соединяемых систем. Установленные свойства класса ССтС позволяют применять структурные методы для изучения сложных систем. Расчленив сложную систему на подсистемы, можно исследовать характеристики отдельных подсистем, а затем изучить поведение всей системы в целом.

Пример 2. Рассмотрим систему, которая в каждой структуре описывается дифференциальным стохастическим уравнением Ито:

$$\dot{Y} = a(Y, s_k, t) + b(Y, s_k, t)V \quad (k = 1, \dots, N), \quad (*)$$

где s_1, \dots, s_N — возможные значения ступенчатого случайного процесса $S(t)$, описывающего случайные изменения структуры системы.

Сначала рассмотрим случай, когда переходы системы от одной структуры к другой образуют пуассоновские потоки событий. Обозначим пуассоновский процесс переходов в k -ю структуру через $P_k(t)$, а его интенсивность через $\nu_k(Y, S, t)$, имея при этом в виду, что она зависит от случайного значения процесса S , от которого он переходит к значению s_k , и может зависеть также от состояния системы в момент перехода. Легко видеть, что процесс $S(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dS = \sum_{k=1}^N (s_k - S) dP_k. \quad (**)$$

Предполагая, что при изменении структуры системы ее вектор состояния может скачком получать случайное приращение, напишем искомое стохастическое дифференциальное уравнение системы со случайно изменяющейся структурой в виде:

$$dY = a(Y, S, t) dt + b(Y, S, t) dW + \sum_{k=1}^N dQ_k,$$

где $Q_k(t)$ — общий пуассоновский процесс с переменным распределением скачков, порождаемый простым пуассоновским процессом $P_k(t)$ ($k = 1, \dots, N$). Распределение каждого скачка процесса $Q_k(t)$ может зависеть не только от времени, но и от вектора состояния системы Y и ее структуры в момент перехода в k -ю структуру. Таким образом, добавив к вектору состояния системы Y значение процесса S , определяющего ее структуру, получим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито, описывающую поведение системы со случайно изменяющейся структурой. Ее вектором состояния, естественно, будет вектор $\bar{Y} = [S \ Y^T]^T$.

Уравнения системы со случайно изменяющейся структурой (*) и (**) при пуассоновских потоках изменений структуры можно записать в общей форме уравнений Ито:

$$d\bar{Y} = \bar{a}(\bar{Y}, t) dt + \bar{b}(\bar{Y}, t) d\bar{W}. \quad (***)$$

Здесь $\bar{Y} = [S \ Y^T]^T$ — вектор состояния системы; $\bar{W}(t)$ — процесс с независимыми приращениями,

состоящий из $N + 1$ независимых блоков $W(t)$; $[P_1 Q_1^T]^T, \dots, [P_N Q_N^T]^T$; $\bar{a}(\bar{y}, t), \bar{b}(\bar{y}, t)$ — блочные матрицы, равные:

$$\bar{a}(\bar{y}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a(y, s, t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}(\bar{y}, t) = \begin{bmatrix} 0 & | & s_1 - s & 0 & | & \dots & | & s_N - s & 0 \\ b(y, s, t) & | & 0 & I & | & \dots & | & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Составим уравнение Ито для случая примера 2, когда изменения структуры процесса представляют собой эрланговские потоки событий. Эрланговский поток событий получается из пуассоновского потока путем пропуска подряд $n - 1$ событий и отбора каждого события, имеющего номер, кратный данному числу n . Натуральное число n будем называть параметром эрланговского потока. Ясно, что в случае эрланговских потоков изменений структуры системы перед дифференциалами dP_k и dQ_k в стохастических дифференциальных уравнениях системы следует ввести множитель $\varphi_k(P_k, S)$, представляющий собой периодическую функцию P_k с периодом, равным параметру $n_k(S)$ соответствующего эрланговского потока, равную 1 при $P_k = ns$ ($s = 1, 2, \dots$) и 0 при всех остальных (целочисленных) P_k . В результате стохастические дифференциальные уравнения системы примут вид:

$$dS = \sum_{k=1}^N (s_k - S) \varphi_k(P_k, S) dP_k;$$

$$dY = a(Y, S, t) dt + b(Y, S, t) dW + \sum_{k=1}^N \varphi_k(P_k, S) dQ_k.$$

Аналогично можно привести к общей форме уравнения Ито (***) примера 2 уравнения системы со случайно изменяющейся структурой при эрланговских потоках изменений структуры. Однако в этом случае коэффициенты при dP_k и dQ_k зависят от P_k . Поэтому вектор состояния системы следует расширить добавлением к нему вектора Y' с компонентами $Y'_1 = P_1, \dots, Y'_N = P_N$, определяемыми уравнениями $dY'_1 = dP_1, \dots, dY'_N = dP_N$.

Пример 4. Составить уравнение для одномерной характеристической функции вектора состояния системы со случайно изменяющейся структурой. Для этого найдем сначала функцию $\bar{\chi}(\bar{\mu}; t)$, соответствующую процессу $\bar{W}(t)$, $\bar{\mu} = [\mu \ \mu_1, \dots, \mu_N]^T$. Функция $\bar{\chi}(\bar{\mu}; t)$ в этом случае представляет собой сумму функций χ , соответствующих независимым блокам $W(t)$, $[P_1(t)Q_1(t)^T]^T, \dots, [P_N(t)Q_N(t)^T]^T$, составляющим процесс $\bar{W}(t)$:

$$\bar{\chi}(\bar{\mu}; Y, S, t) = \chi(\mu; t) + \sum_{k=1}^N \chi_k(\bar{\mu}_k; Y, S, t),$$

где $\chi(\mu; t)$, $\chi_k(\bar{\mu}_k; Y, S, t)$ — функции χ процессов $W(t)$, $[P_k(t)Q_k(t)^T]^T$ соответственно ($k = 1, \dots, N$); $\bar{\mu} = [\mu^T \bar{\mu}_1^T \dots \bar{\mu}_N^T]^T$ — разбиение вектора $\bar{\mu}$ на соответствующие блоки; $\bar{\mu}_k = [\mu_{k0} \mu_k^T]^T$ — разложение вектора $\bar{\mu}_k$ на блоки, соответствующие процессам $P_k(t)$ и $Q_k(t)$. Здесь учтено, что интенсивность потоков скачков процессов $P_k(t)$ и распределения скачков процессов $Q_k(t)$ могут зависеть от вектора состояния системы $\bar{Y} = [SY^T]^T$. Пользуясь формулой для функции χ и формулой для характеристической функции приращений пуассоновского процесса и порождаемого им общего пуассоновского процесса на бесконечно малом интервале $(t, s]$, согласно которой

$$h_k(\bar{\mu}_k; Y, S, t) = 1 + [e^{i\mu_{k0}} g_k(\mu_k; Y, S, t) - 1] \nu_k(Y, S, t)(s-t) + o(s-t),$$

находим

$$\chi_k(\bar{\mu}_k; Y, S, t) = [e^{i\mu_{k0}} g_k(\mu_k; Y, S, t) - 1] \nu_k(Y, S, t),$$

где $g_k(\mu_k; \mathbf{y}, s, t)$ — характеристическая функция скачков процесса $Q_k(t)$ в момент t , зависящая также от $Y(t)$, $S(t)$. Таким образом,

$$\bar{\chi}(\bar{\mu}; Y, S, t) = \chi(\mu; t) + \sum_{k=1}^N [e^{i\mu_{k0}} g_k(\mu_k; Y, S, t) - 1] \nu_k(Y, S, t)$$

и соответственно

$$\bar{\chi}(\bar{b}(Y, S, t)^T \bar{\lambda}; Y, S, t) = \chi(b(Y, S, t)^T \lambda; t) + \sum_{k=1}^N [e^{i(s_k - S)\lambda_0} g_k(\lambda; Y, S, t) - 1] \nu_k(Y, S, t),$$

где $\bar{\lambda} = [\lambda_0 \lambda^T]^T$ — разбиение вектора $\bar{\lambda}$ на блоки, соответствующие блокам S, Y вектора состояния системы \bar{Y} . В результате получим уравнение для одномерной характеристической функции процесса в системе со случайными изменениями структуры:

$$\frac{\partial g_1(\bar{\lambda}; t)}{\partial t} = M \left\{ i\lambda^T a(Y, S, t) + \chi(b(Y, S, t)^T \lambda; t) + \sum_{k=1}^N [e^{i(s_k - S)\lambda_0} g_k(\lambda; Y, S, t) - 1] \nu_k(Y, S, t) \right\} \times e^{i\lambda_0 S + i\lambda^T Y}.$$

Пример 5. Основываясь на уравнениях для одномерной характеристической функции примера 4,

можно вывести уравнения для условных характеристических функций в различных структурах и для вероятностей этих структур. Имея в виду, что $S(t) = S_t$ — дискретная случайная величина с возможными значениями s_1, \dots, s_N и вероятностями этих значений $p_1(t), \dots, p_N(t)$ при каждом t , по формуле полного математического ожидания находим:

$$g_1(\bar{\lambda}; t) = M e^{i\lambda_0 S(t) + i\lambda^T Y(t)} = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\lambda_0 s_k} g_1(\lambda; t | s_k),$$

где $g_1(\lambda; t | s_l)$ — условная характеристическая функция вектора состояния системы Y в l -й структуре. Аналогично вычисляется математическое ожидание в правой части уравнения для $g_1(\bar{\lambda}; t)$. В результате уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N e^{i\lambda_0 s_l} \frac{\partial p_l g_1(\lambda; t | s_l)}{\partial t} = \\ & = \sum_{l=1}^N p_l e^{i\lambda_0 s_l} M \left[\{i\lambda^T a(Y, s_l, t) + \chi(b(Y, s_l, t)^T \lambda; t)\} e^{i\lambda^T Y | s_l} \right] + \\ & + \sum_{l=1}^N p_l e^{i\lambda_0 s_l} \sum_{k=1}^N {}^{(l)} \left[e^{i\lambda_0 (s_k - s_l)} M g_k(\lambda; Y, s_l, t) \times \right. \\ & \quad \left. \times \nu_k(Y, s_l, t) e^{i\lambda^T Y | s_l} \right] - \\ & - \sum_{l=1}^N p_l e^{i\lambda_0 s_l} M \left[\sum_{k=1}^N {}^{(l)} \nu_k(Y, s_l, t) e^{i\lambda^T Y | s_l} \right]. \quad (*) \end{aligned}$$

Здесь индекс (l) у сумм по k указывает, что слабое, соответствующее $k = l$, в сумму не входит. А не входит оно потому, что при отсутствии изменения структуры процессы $P_l(t)$ и $Q_l(t)$ сохраняют постоянные значения, вследствие чего $g_l(\lambda; Y, s_l, t) = 1$. Изменив порядок суммирования в первой двойной сумме, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N e^{i\lambda_0 s_k} \times \\ & \times \sum_{l=1}^N {}^{(k)} p_l M \left[g_k(\lambda; Y, s_l, t) \nu_k(Y, s_l, t) e^{i\lambda^T Y | s_l} \right]. \end{aligned}$$

Поменяв здесь местами индексы k и l (от этого двойная сумма не изменится) и подставив полученное выражение в уравнение (*), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N e^{i\lambda_0 s_l} \frac{\partial p_l g_1(\lambda; t | s_l)}{\partial t} = \\ & = \sum_{l=1}^N p_l e^{i\lambda_0 s_l} M \left[\{i\lambda^T a(Y, s_l, t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \chi(b(Y, s_l, t)^T \lambda; t) \left. e^{i\lambda^T Y} \right| s_l \Big] + \\
 & + \sum_{l=1}^N p_l e^{i\lambda_0 s_l} \sum_{k=1}^N p_k M [g_l(\lambda; Y, s_k, t) \times \\
 & \quad \times \nu_l(Y, s_k, t) e^{i\lambda^T Y} \Big| s_k] - \\
 & - \sum_{l=1}^N p_l e^{i\lambda_0 s_l} M \left[\nu_l(Y, t) e^{i\lambda^T Y} \Big| s_l \right], \quad (**)
 \end{aligned}$$

где для краткости положено

$$\nu_l(Y, t) = \sum_{k=1}^N p_k \nu_l(Y, s_k, t).$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых показателях функций и обозначив через $f_1(y; t | s_l)$ условную одномерную плотность процесса $Y(t)$ в l -й структуре, из (***) составим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_l g_1(\lambda; t | s_l)}{\partial t} & = p_l \int_{-\infty}^{\infty} \{i\lambda^T a(y, s_l, t) + \\
 & + \chi(b(y, s_l, t)^T \lambda; t) e^{i\lambda^T y}\} f_1(y; t | s_l) dy + \\
 & + \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\infty}^{\infty} g_l(\lambda; y, s_k, t) \nu_l(y, s_k, t) \times \\
 & \quad \times e^{i\lambda^T y} f_1(y; t | s_k) dy - \\
 & - p_l \int_{-\infty}^{\infty} \nu_l(y, t) e^{i\lambda^T y} f_1(y; t | s_l) dy \quad (l = 1, \dots, N).
 \end{aligned}$$

Положив здесь $\lambda = 0$ и имея в виду, что $g_1(0; t | s_l) = 1$, $\chi(0; t) = 0$, получим уравнения для вероятностей структур ($l = 1, \dots, N$) системы в момент t :

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_l & = \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\infty}^{\infty} \nu_l(y, s_k, t) f_1(y; t | s_k) dy - \\
 & - p_l \int_{-\infty}^{\infty} \nu_l(y, t) f_1(y; t | s_l) dy.
 \end{aligned}$$

Пример 6. В условиях предыдущего примера выведем уравнения для условных плотностей из уравнений для условных характеристических функций в случае винеровского процесса $W(t)$. Для этого изменим обозначение переменной интегрирования y на η , умножим уравнение для $p_l g_1(\lambda; t | s_l)$ на

$e^{i\lambda^T y} / (2\pi)^p$ и проинтегрируем по λ . После преобразований имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_l f_1(y; t | s_l)}{\partial t} & = -p_l \frac{\partial^T}{\partial y} [a(y, s_l, t) f_1(y; t | s_l)] + \\
 & + \frac{p_l}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^T}{\partial y} [b(y, s_l, t) \nu(t) \times \right. \\
 & \quad \times b(y, s_l, t)^T f_1(y; t | s_l)] \Big\} + \\
 & + \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\infty}^{\infty} q_l(y - \eta; \eta, s_k, t) \nu_l(\eta, s_k, t) \times \\
 & \quad \times f_1(\eta; t | s_k) d\eta - p_l \nu_l(y; t) f_1(y; t | s_l),
 \end{aligned}$$

где $q_l(y; \eta, s_k, t)$ — плотность скачков процесса $Q_k(t)$ при данных η, s_k и t .

В важном частном случае, когда при переходе от одной структуры к другой вектор состояния системы Y не получает случайного приращения, слагаемые с dQ_k в уравнении для Y отсутствуют ($Q_k(t) \equiv 0$). При этом в уравнении для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ и в уравнениях для условных одномерных характеристических функций $g_1(\lambda; t | s_l)$ при разных структурах $g_l(\lambda; y, s_k, t) \equiv 1$. Соответственно в уравнениях для условных одномерных плотностей $f_1(y; t | s_l)$ при разных структурах $q_l(y - \eta; \eta, s_k, t) = \delta(y - \eta)$, и уравнения для $f_1(y; t | s_l)$ ($l = 1, \dots, N$) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_l f_1(y; t | s_l)}{\partial t} & = -p_l \frac{\partial^T}{\partial y} [a(y, s_l, t) f_1(y; t | s_l)] + \\
 & + \frac{p_l}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^T}{\partial y} [b(y, s_l, t) \nu(t) \times \right. \\
 & \quad \times b(y, s_l, t)^T f_1(y; t | s_l)] \Big\} + \\
 & + \sum_{k=1}^N p_k \nu_l(y, s_k, t) [p_k f_1(y; t | s_k) - p_l f_1(y; t | s_l)] \\
 & \quad (l = 1, \dots, N).
 \end{aligned}$$

6 Заключение

Разработана структурная теория ССтС в функциональных пространствах.

Для типовых соединений получены формулы для вычисления условных вероятностных мер (решающих функций). Приведено 6 иллюстративных примеров.

Применительно к выбранным высокопроизводительным средствам вычислительной техники результаты могут быть положены в основу разработки методического обеспечения для анализа ССтС в

конкретных задачах автоматизации научных исследований.

Литература

1. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. — М.: Наука, 1983.
2. *Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. — Cambridge University Press, 1992.
3. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н.* Приближенные методы статистического анализа распределенных стохастических систем // Системы и средства информатики. Вып. 2. — М.: Наука, 1992. С. 146–154.
4. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н.* Прикладные методы анализа стохастических систем // Вестник МАИ, 1994. № 1. С. 39–47.
5. *Казаков И. Е., Артемьев В. М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. — М.: Наука, 1980.
6. *Казаков И. Е., Мальчиков С. В.* Анализ стохастических систем в пространстве состояний. — М.: Наука, 1983.
7. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1985, 1990 (2-е изд.).
8. *Далецкий Ю., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
9. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — 2-е изд. — М.: Наука, 1990.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ*

Ю. Г. Марков¹, В. В. Перепелкин¹, И. Н. Сеницын², Н. Н. Семендяев³

Аннотация: Рассмотрены стохастические информационные модели неравномерности вращения Земли на основе априорных и апостериорных данных. Особое внимание уделено моделям на коротких интервалах времени длительностью от 1–2 до 10–30 сут.

Ключевые слова: астрометрические измерения; инструментальное, алгоритмическое и программное обеспечение; информационная модель; линейные и линеаризованные фильтры; фильтры Калмана и Пугачёва; неравномерности вращения Земли; МСВЗ; MATLAB

1 Введение

Как известно [1], для решения актуальных задач небесной механики и астрометрии, а также при изучении ряда геофизических проблем планетарного масштаба требуется создание высокоточных информационных моделей вращательно-колебательного движения Земли относительно центра масс. Математическое описание этих сложных динамических процессов — колебаний полюса Земли — предполагает использование детерминированных, стохастических и смешанных моделей.

К детерминированным моделям можно отнести модель Л. Эйлера (1765 г.), определившего 305-суточный период свободной нутации для недеформируемой Земли; модель С. Чандлера (1891 г.) с двумя периодическими компонентами в движении полюса — 365 и 430–440 звездных суток.

Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемого классической теорией твердого тела периода прецессии Эйлера (305 сут для недеформируемой фигуры Земли) потребовало дальнейшего объяснения. Оно было предпринято и частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях С. Ньюкомба, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, У. Манка и Г. Макдональда, Ф. А. Слудского, М. С. Молоденского и многих других [2]. Исторически принято называть указанное движение свободной нутацией деформируемой Земли или чандлеровскими колебаниями полюса. В настоящее время на основе данных измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ) установлено, что основные характеристики колебательного движения полю-

са Земли остаются стабильными и не изменяются существенно на длительных интервалах времени. В [1] описаны методы построения линейных и нелинейных, детерминированных и стохастических моделей движения полюса Земли по априорным и апостериорным данным МСВЗ.

Наряду с колебаниями полюса Земли большой интерес представляют исследования внутригодовой неравномерности вращения Земли. Небесно-механическое представление теоретической модели показывает, что внутригодовые вариации вращения Земли вызывают, в основном, зональные составляющие потенциала. Компонента потенциала Земли, описываемая поверхностной гармоникой второй степени, является доминирующей среди них. Зональный потенциал определяет приливы (океанические и твердотельные), которые называются зональными приливами (первого типа по Лапласу).

Обобщая [1], рассмотрим вопросы построения информационных моделей неравномерности вращения Земли по априорным и апостериорным астрометрическим данным с учетом гравитационно-приливных возмущений от Солнца и Луны.

2 Основные допущения

Как показано в [3–6], для ряда важных прикладных задач астрометрии и навигации существенное значение имеет высокоточный прогноз вращения Земли на сравнительно коротких интервалах времени длительностью от 1–2 до 10–30 сут.

В приливных изменениях вращения Земли выделяются как основные составляющие (годовые,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-07-00021, № 10-02-00595) и программы ОНИТ РАН «Информационные технологии и анализ сложных систем» (проект 1.5).

¹Московский авиационный институт, vadimkin1@yandex.ru

²Институт проблем информатики Российской академии наук, sinitsin@doi.ru

³Институт проблем информатики Российской академии наук, nsemendyaev@ipiran.ru

полугодичные, месячные, двухнедельные) приливов, так и множество различных комбинационных гармоник короткопериодических приливов. Анализ уравнений движения и данных наблюдений свидетельствует о необходимости учета возмущающих моментов сил различной физической природы и существенной деформируемости фигуры Земли. Основное влияние оказывают гравитационно-приливные моменты сил от Солнца и Луны.

Анализ теоретической модели [3–6] свидетельствует, что может быть достигнута точность порядка 10^{-4} – 10^{-5} с. Требуется построить расширенную динамическую модель осевого вращения Земли на основе учета небесно-механических факторов, представляющую собой естественное уточнение разработанной в [6] математической модели внутрigoдовой неравномерности вращения Земли, и осуществить построение адекватной системы опорных функций, выбор оптимальной длительности интервала интерполяции и настройку алгоритма офлайн-фильтрации по методу «взвешенных» наименьших квадратов. Погрешность данных МСВЗ [2] определяется величиной 10^{-6} с.

Для изучения вариаций скорости осевого вращения Земли вводится изменение (вариация) длительности суток — l.o.d. (t) (length of the day changes) [7]:

$$\text{l.o.d.}(t) = D(t) - D_0, \quad D(t) = \frac{r_0}{r(t)} D_0. \quad (1)$$

Здесь $r(t)$ — скорость осевого вращения Земли; D_0 — длительность стандартных суток (в научной литературе принята за единицу времени величина стандартных суток, состоящих из 86,400 с по шкале атомного времени ТАИ); r_0 — постоянная («средняя») угловая скорость собственного вращения $r_0 = 7,292115 \cdot 10^{-5}$ рад/с, которая соответствует длительности стандартных суток D_0 ; $D(t)$ — длительность суток, означающая длительность в секундах ТАИ, соответствующая повороту Земли на 360° , т.е. возрастанию времени на 24 ч. Величина $r(t)$ в (1) может быть определена из экспериментальных значений l.o.d. (t) по приближенной формуле:

$$r(t) = r_0 + \delta r(t) \cong \left[1 - \frac{\text{l.o.d.}(t)}{D_0} \right] r_0. \quad (2)$$

Следуя [8–10], введем следующие обозначения и допущения.

1. Предположим, что осевые и центробежные моменты инерции $\{J_{ij}\}$ ($i, j = p, q, r$) деформируемой Земли $A = J_{pp}$, $B = J_{qq}$, $C = J_{rr}$, $J_{pq} = J_{qp}$, $J_{qr} = J_{rq}$, $J_{rp} = J_{pr}$ допускают на суточном интервале времени представления вида:

$$J_{ij} = J_{ij}^*(t) + J'_{ij,1}(t) \sin \varphi + J''_{ij,1}(t) \cos \varphi + J'_{ij,2}(t) \sin 2\varphi + J''_{ij,2}(t) \cos 2\varphi + \dots,$$

причем третьими и высшими гармониками $\varphi = r_0 t$ можно пренебречь.

2. Назовем эффективными суточными горбами, осредненными на суточном интервале, следующие безразмерные величины:

$$u_1 = \left\langle \frac{C - B}{A^*} \cos \varphi \right\rangle_\varphi; \\ u_2 = \left\langle \frac{C - A}{B^*} \sin \varphi \right\rangle_\varphi; \\ u_3 = \left\langle \frac{B - A}{C^*} \sin 2\varphi \right\rangle_\varphi$$

($u_1 \sim u_2, u_3 \ll u_{1,2}$), где $\langle \dots \rangle_\varphi$ — символ осреднения по φ .

Эффективными суточными выступлениями назовем безразмерные величины центробежных моментов инерции, осредненные на суточном интервале:

$$u_4 = \left\langle \frac{J_{qr}}{A^*} \right\rangle_\varphi; \quad u_5 = \left\langle \frac{J_{qr}}{C^*} \sin \varphi \right\rangle_\varphi; \\ u_6 = \left\langle \frac{J_{qr}}{A^*} \cos 2\varphi \right\rangle_\varphi; \quad u_7 = \left\langle \frac{J_{qr}}{B^*} \sin 2\varphi \right\rangle_\varphi; \\ u_8 = \left\langle \frac{J_{pr}}{B^*} \right\rangle_\varphi; \quad u_9 = \left\langle \frac{J_{pr}}{C^*} \cos \varphi \right\rangle_\varphi; \\ u_{10} = \left\langle \frac{J_{pr}}{B^*} \cos 2\varphi \right\rangle_\varphi; \quad u_{11} = \left\langle \frac{J_{pr}}{A^*} \sin 2\varphi \right\rangle_\varphi; \\ u_{12} = \left\langle \frac{J_{pq}}{C^*} \right\rangle_\varphi; \quad u_{13} = \left\langle \frac{J_{pq}}{A^*} \sin \varphi \right\rangle_\varphi; \\ u_{14} = \left\langle \frac{J_{pq}}{B^*} \cos \varphi \right\rangle_\varphi; \quad u_{15} = \left\langle \frac{J_{pq}}{C^*} \cos 2\varphi \right\rangle_\varphi$$

$$(u_4, \dots, 7 \sim u_3, \quad u_8, \dots, 11 \ll u_4, \dots, 7, \\ u_{12}, \dots, 15 \ll u_8, \dots, 11).$$

Через $\delta A, \delta B, \delta C$ обозначены отклонения осевых моментов от стандартных значений A^*, B^* и C^* . Положим

$$\frac{\delta C}{C^*} = u_{16}.$$

3. Выражение для момента гравитационных сил со стороны Солнца примем в виде:

$$M_r^S = 3\omega_*^2 [(B - A)\gamma_p \gamma_q - \delta J_{pq}(\gamma_p^2 - \gamma_q^2) - \delta J_{qr} \gamma_p \gamma_r + \delta J_{pr} \gamma_q \gamma_r] \\ (\gamma_p = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_q = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_r = \cos \theta) \quad (3)$$

или после осреднения по $\varphi = r_0 t$:

$$M_r^S = 3\omega_*^2 (\chi_{1r}^S \sin^2 \theta + \chi_{2r}^S \sin \theta \cos \theta). \quad (4)$$

Здесь через

$$\chi_{1r}^S = \frac{1}{2} u_3 + u_{15}; \quad \chi_{2r}^S = \frac{1}{2} u_5 + u_9 \quad (5)$$

обозначены приливные коэффициенты: ω_* — постоянная, определяемая гравитационным фокальным параметром Земли. Аналогично записывается выражение для M_r^L .

4. Учет также малые моменты флуктуационно-диссипативных сил $M_r^{\Phi D}$.

Замечание 1. В отличие от работ по классической механике, в [4–6] знаки у центробежных моментов взяты противоположными. В (3) приняты классические определения тензора моментов инерции Земли.

3 Уравнения неравномерности вращения Земли

Уравнения осевого вращения Земли относительно $\delta r = r - r_0$ (с учетом допущений п. 2) примут следующий вид [8]:

$$\delta \dot{r} = R^S + R^L + \Delta R; \quad (6)$$

$$R^S = -3(u_5 - u_9) b^S \omega_*^2 \cos \omega_* t + \frac{3}{2} (u_3 + u_{15}) \omega_*^2 [1 - (b^S)^2 \cos^2 \omega_* t];$$

$$R^L = -(u_5 - u_9) b^L \omega_{**}^2 \cos \omega_{**} t + \frac{3}{2} (u_3 + u_{15}) \omega_{**}^2 [1 - (b^L)^2 \cos^2 \omega_{**} t];$$

$$\Delta R = -\dot{u}_{16} r_0.$$

Здесь ω_* и ω_{**} — постоянные, определяемые гравитационными и фокальными параметрами Земли и Луны; $0.4 \leq b^S \leq (4/3)\pi^{-1}$, $b^L \ll b^S$. Функции R^S , R^L , ΔR выписаны с точностью до квадратов и произведений относительно u_1, \dots, u_{16} и их производных, а также $p, q, \delta r$.

Перепишем уравнение (6) с учетом (2) через l.o.d. (t) в следующем виде:

$$\frac{d(\text{l.o.d.}(t))}{dt} = -\gamma_0 (R^S + R^L + \Delta R) \left(\gamma_0 = \frac{D_0}{r_0} = \frac{86,400}{r_0} \right).$$

4 Корреляционная модель приливной неравномерности вращения Земли

Основываясь на корреляционных уравнениях флуктуаций вращательного движения Земли [9, 10], рассмотрим влияние аддитивных и параметрических флуктуационных гравитационно-приливных и диссипативных моментов сил на корреляционные характеристики внутригодовой неравномерности вращения Земли. Представим дифференциальное уравнение изменения угла собственного вращения $\delta\varphi$ Земли в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\varphi} = & M_{10}^S \cos(2\pi f_\Gamma t + \chi_1^S) + M_{20}^S \cos(4\pi f_\Gamma t + \chi_2^S) + \\ & + M_{m0}^L \cos(2\pi \nu_m t + \chi_m^L) + \\ & + M_{f0}^L \cos(2\pi \nu_f t + \chi_f^L) + X^S(t) + X^L(t) - \\ & - \mu \left[1 + \pi_1^{\mu S} \cos(2\pi f_\Gamma t + \chi_1^{\mu S}) + \right. \\ & + \pi_2^{\mu S} \cos(4\pi f_\Gamma t + \chi_2^{\mu S}) + \pi_m^{\mu L} \cos(2\pi \nu_m t + \chi_m^{\mu L}) + \\ & \left. + \pi_f^{\mu L} \cos(2\pi \nu_f t + \chi_f^{\mu L}) + X_1^{\mu S}(t) + X_1^{\mu L}(t) \right] \delta \dot{\varphi}. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие дополнительные обозначения: $\delta\varphi = \varphi - r_0 \omega_0^{-1} t$; φ — угол собственного вращения Земли; t — время, измеряемое стандартными годами; $f_\Gamma = 1, 2f_\Gamma, \nu_m = 13,28, \nu_f = 26,28$; $M_{10}^S, M_{20}^S, M_{m0}^L, M_{f0}^L, \chi_1^S, \chi_2^S, \chi_m^L, \chi_f^L$ — частоты, амплитуды и начальные фазы аддитивных гармонических возмущений от Солнца (S) и Луны (L), соответствующие годовому, полугодовому, месячному и двухнедельному циклам; μ — коэффициенты диссипативных моментов сил, обусловленных разнообразием геофизических процессов (приливное трение океанических и земных приливов, атмосферные воздействия, океанические течения, перераспределение водных масс и т. п.); $\pi_1^{\mu S}, \pi_2^{\mu S}, \pi_m^{\mu L}, \pi_f^{\mu L}, \chi_1^{\mu S}, \chi_2^{\mu S}, \chi_m^{\mu L}, \chi_f^{\mu L}$ — амплитуды и начальные фазы параметрических гармонических диссипативных моментов сил на частотах $f_\Gamma, 2f_\Gamma, \nu_m, \nu_f$; $X^S(t), X^L(t)$ и $X^{\mu S}(t), X^{\mu L}(t)$ — нормальные (гауссовские) широкополосные аддитивные и параметрические случайные возмущения с известными математическими ожиданиями и корреляционными характеристиками.

Составим в силу (7) приближенные уравнения для математических ожиданий, дисперсий, ковариаций и ковариационных функций переменных $\delta\varphi = X_1, \delta\dot{\varphi} = X_2$ при следующих допущениях.

1^0 . Аддитивный возмущающий момент допускает представление $X^S(t) + X^L(t) = m_X^{SL} + V_1$, где

V_1 является скалярным нормальным белым шумом интенсивности $G_1 = G_1(t)$.

2^0 . Возмущающий диссипативный момент $X^{\mu S}(t) + X^{\mu L}(t) = X_3$ имеет конечное математическое ожидание m_3^* и конечную дисперсию σ_3^2 и удовлетворяет следующему скалярному уравнению формирующего фильтра [11]:

$$\dot{X}_3 = -\alpha_3 X_3 + \sigma_3 \sqrt{2\alpha_3} V_2 \quad (X_3^0 = X_3 - m_3), \quad (8)$$

где $\alpha_3 > 0$, $\sigma_3 > 0$, V_2 — нормальный белый шум единичной интенсивности, $G_2 = 1$.

3^0 . Параметрическое возмущение $X_2 X_3$ допускает статистическую линеаризацию по формуле [11]

$$X_2 X_3 \approx m_2 m_3 + m_2 X_3^0 + m_3 X_2^0 \quad (X_i^0 = X_i - m_i),$$

где $m_i = M X_i$ ($i = 1, 2, 3$).

В результате стохастическое нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (7) будет эквивалентно нелинейной системе для математических ожиданий $m_i = M X_i$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_1 &= m_2; \\ \dot{m}_2 &= \tilde{M}_{0t} - (\mu + \tilde{\mu}_t) m_2 - \\ &\quad - \tilde{\mu}_t (m_2 m_3 + k_{23}) + m_X^{SL}; \\ \dot{m}_3 &= -\alpha_3 (m_3 - m_3^*) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

или в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{a}_{0t}$$

и линейной системе для центрированных составляющих:

$$\dot{X}_1^0 = X_2^0; \quad \dot{X}_3^0 = -\alpha_3 X_3^0 + \sigma_3 \sqrt{2\alpha_3} V_2; \quad (10)$$

$$\dot{X}_2^0 = -\tilde{\mu}_t m_2 X_3^0 - (\mu + \tilde{\mu}_t m_3) X_2^0 + V_1. \quad (11)$$

Здесь введены обозначения:

$$X = [X_1 X_2 X_3]^T; \quad m = [m_1 m_2 m_3]^T; \quad V = [V_1 V_2]^T;$$

$$a_{0t} = \begin{bmatrix} m_2 \\ \tilde{M}_{0t} - \mu m_2 - \tilde{\mu}_t (m_2 m_3 + k_{23}) + m_X^{SL} \\ -\alpha_3 m_3 \end{bmatrix};$$

$$a_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(\mu + \tilde{\mu}_t m_3) - \tilde{\mu}_t m_2 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \sqrt{2\alpha_3} \end{bmatrix}; \quad \nu = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{M}_{0t} = M_{10}^S \cos(2\pi f_\Gamma t + \chi_1^S) + M_{20}^S \cos(4\pi f_\Gamma t + \chi_2^S) + \\ + M_{m0}^L \cos(2\pi \nu_m t + \chi_m^L) + M_{f0}^L \cos(2\pi \nu_f t + \chi_f^L);$$

$$\tilde{\mu}_t = \mu \left[\pi_1^{\mu S} \cos(2\pi f_\Gamma t + \chi_1^{\mu S}) + \right. \\ \left. + \pi_2^{\mu S} \cos(4\pi f_\Gamma t + \chi_2^{\mu S}) + \right. \\ \left. + \pi_m^{\mu L} \cos(2\pi \nu_m t + \chi_m^{\mu L}) + \right. \\ \left. + \pi_f^{\mu L} \cos(2\pi \nu_f t + \chi_f^{\mu L}) \right].$$

Здесь и далее Γ — символ транспонирования.

Полагая в уравнении (7) $\mu = 0$, $X^S(t) = X^L(t) = 0$, получим уравнения, найденные в [4–6].

Из уравнений (9) следует, что параметрические гармонические возмущения, во-первых, вызывают модуляцию коэффициента диссипации μ , $\mu^{\tilde{\mu}} = \mu + \tilde{\mu}_t$, во-вторых, при постоянных средних значениях m_2 , m_3 и наличии корреляционной связи k_{23} между X_2^0 и X_3^0 возникает дополнительный аддитивный диссипативный возмущающий момент $\Delta_1 \tilde{M}_{0t} = -\tilde{\mu}_t (m_2 m_3 + k_{23})$. Постоянная составляющая m_X^{SL} стохастического момента $X^S(t) + X^L(t)$ также приводит к аддитивному возмущающему моменту, равному $\Delta_2 \tilde{M}_{0t} = m_X^{SL}$.

Уравнение (11) показывает, что параметрические возмущения при постоянных m_2 и m_3 вызывают появление диссипативных моментов вида $-\tilde{\mu}_t m_3 X_2^0$ и $-\tilde{\mu}_t m_2 X_3^0$.

Согласно [11], уравнения для ковариационной матрицы $K = [k_{ij}]$, $k_{ij} = M X_i^0 X_j^0$ и ковариационной функции $K(t_1, t_2) = [K_{ij}(t_1, t_2)]$, $K_{ij}(t_1, t_2) = M X_i^0(t_1) X_j^0(t_2)$ имеют вид:

$$\dot{K} = a_t K + K a_t^T + b G b^T; \quad K(0) = K_0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K(t_1, t_2) a_{t_2}^T \quad \text{при } t_1 < t_2;$$

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)^T \quad \text{при } t_1 > t_2. \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) в развернутом виде допускают следующее представление:

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_{11} &= 2k_{12}; \quad \dot{k}_{33} = -2\alpha_3 (k_{33} - \sigma_3^2); \\ \dot{k}_{22} &= -2(\mu + \tilde{\mu}_t m_3) k_{22} - 2\tilde{\mu}_t m_2 k_{23} + G_{11}; \\ \dot{k}_{12} &= k_{22} - (\mu + \tilde{\mu}_t m_3) k_{12} - \tilde{\mu}_t m_2 k_{13}; \\ \dot{k}_{13} &= -\alpha_3 k_{13} + k_{23}; \\ \dot{k}_{23} &= -(\alpha_3 + \mu + \tilde{\mu}_t m_3) k_{23} - \\ &\quad - \tilde{\mu}_t m_2 k_{33} + \sigma_3 \sqrt{2\alpha_3} G_{12} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

при начальных условиях $K_{ij}(0) = k_{ij,0}$ ($i, j = 1, 2, 3$) и

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial K_{11}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= K_{12}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{13}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= -\alpha_3 K_{13}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{12}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= -(\mu + \tilde{\mu}_{t_2} m_{2t_2}) K_{12}(t_1, t_2) - \\
&\quad - \tilde{\mu}_{t_2} m_{2t_2} K_{13}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{21}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= K_{22}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{23}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= -\alpha_3 K_{23}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{22}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= -(\mu + \tilde{\mu}_{t_2} m_{3t_2}) K_{22}(t_1, t_2) - \\
&\quad - \tilde{\mu}_{t_2} m_{2t_2} K_{23}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{31}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= K_{32}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{33}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= -\alpha_3 K_{33}(t_1, t_2); \\
\frac{\partial K_{32}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= -(\mu + \tilde{\mu}_{t_2} m_{3t_2}) K_{32}(t_1, t_2) - \\
&\quad - \tilde{\mu}_{t_2} m_{2t_2} K_{33}(t_1, t_2)
\end{aligned} \right\} (15)$$

при начальных условиях $K_{ij}(t, t) = k_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Параметрические гармонические возмущения в уравнениях (14) и (15) приводят, во-первых, к модуляции коэффициента диссипации μ , так что $\bar{\mu}_t^2 = \mu + \tilde{\mu}_t m_3$, $\bar{\mu}_{t_2}^2 = \mu + \tilde{\mu}_{t_2} m_3$, $\bar{\mu}_{t_2}^2 = \mu + \tilde{\mu}_{t_2} m_2$; во-вторых, к появлению в уравнениях для K_{ij} , k_{ij} ($i, j = 1, 2$) дополнительных членов $-2\tilde{\mu}_t m_2 k_{23}$, $-\mu_t m_2 k_{13}$, $-\tilde{\mu}_{t_2} m_{2t_2} K_{23}(t_1, t_2)$.

Совокупность уравнений (9), (14) и (15) определяет аналитическую корреляционную модель приливной внутригодовой неравномерности вращения Земли.

Уравнения (9), (14) и (15) могут быть использованы для расчетов точности и чувствительности моделей к определяющим параметрам p_j . При этом первые функции чувствительности $\partial m_i / \partial p_j$, $\partial k_{ij} / \partial p_j$ будут удовлетворять линейным уравнениям вида (10), (11) и (14).

Рассмотрим основные свойства модели (9), (14) и (15).

В условиях аддитивных гармонических и случайных моментов ($\tilde{M}_{0t} \neq 0$, $X^S(t) \neq 0$, $X^L(t) \neq 0$) при отсутствии диссипативных моментов ($\mu = 0$) имеют место следующие явные выражения для моментов первого и второго порядка:

$$\left. \begin{aligned}
m_1 &= m_{10} + m_{20}t + m_X^{SL} \frac{t^2}{2} + \int_0^t \int_0^{t_1} \tilde{M}_{0t_1} dt_1 dt; \\
m_2 &= m_{20} + m_X^{SL} t + \int_0^t \tilde{M}_{0t_1} dt_1;
\end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned}
k_{11} &= \frac{1}{3} G_{11} t^3 + k_{22,0} t^2 + 2k_{12,0} t + k_{11,0}; \\
k_{22} &= G_{11} t + k_{22,0}; \\
k_{12} &= \frac{G_{11} t^2}{2} + k_{22,0} t + k_{12,0};
\end{aligned} \right\} (17)$$

$$\begin{aligned}
K_{11}(t_1, t_2) &= k_{11}(t_1) + k_{12}(t_1)(t_2 - t_1); \\
K_{12}(t_1, t_2) &= k_{12}(t_1); \quad K_{22}(t_1, t_2) = k_{22}(t_1).
\end{aligned}$$

Из формул (16) и (17) следует, что при нулевых начальных условиях, во-первых, постоянный момент m_X^{SL} вызывает систематические временные дрейфы по переменным $\delta\varphi$ и $\delta\dot{\varphi}$, во-вторых, гармонический момент \tilde{M}_{0t} может приводить к накопленной интегральной ошибке по переменной $\delta\varphi$, в-третьих, аддитивный белый шум V_1 вызывает флуктуационный временной дрейф по переменным $\delta\varphi$ и $\delta\dot{\varphi}$. Ненулевые начальные условия по переменной $\delta\dot{\varphi}$ вызывают флуктуационный дрейф по переменной $\delta\varphi$.

При $\mu \neq 0$ для $t \gg \mu^{-1}$ и начальных условиях $m_{10} = 0$, $m_{20} = 0$, $m_{30} = m_3^*$ и $m_X^{SL} = 0$ усредненные на интервалах времени $2\pi/f_\Gamma$, $2\pi/\nu_m$, $2\pi/\nu_f$ математические ожидания, дисперсии и ковариационные моменты имеют вид:

$$\begin{aligned}
\langle m_1 \rangle &= -\frac{\lambda t^2}{2}; \quad \langle m_3 \rangle = m_3^*; \\
\langle m_2 \rangle &= -\lambda t; \quad \lambda = \langle \tilde{\mu}_t \int_0^t \tilde{M}_{0t_1} dt_1 \rangle; \\
\langle k_{11} \rangle &= \frac{G_{11}}{\mu^2} t; \quad \langle k_{22} \rangle = \frac{G_{11}}{2\mu}; \quad \langle k_{12} \rangle = \frac{G_{11}}{2\mu^2}; \\
\langle k_{13} \rangle &= \sigma_3 \sqrt{2\alpha_3} \frac{G_{12}}{\alpha_3(\mu + \alpha_3)}; \\
\langle k_{23} \rangle &= \sigma_3 \sqrt{2\alpha_3} \frac{G_{u12}}{\mu + \alpha_3},
\end{aligned}$$

где $\langle \dots \rangle$ — символ осреднения по времени t . Отсюда видно, что имеют место систематические дрейфы $\langle m_1 \rangle$, $\langle m_2 \rangle$ и флуктуационный дрейф $\langle k_{11} \rangle$. При этом $\langle k_{ij} \rangle \neq 0$ ($i, j = 2, 3$) постоянны и зависят от интенсивности ν_{11} аддитивного шума V_1 и взаимной интенсивности аддитивного и параметрического шумов V_1 и V_2 . Для $t \ll \mu^{-1}$ соответствующие результаты следуют из (16) и (17).

Уравнения (9), (14) и (15) совместно с уравнениями для функций чувствительности положены

в основу компьютерной модели в среде MATLAB, включенной в состав информационных ресурсов по фундаментальной проблеме «Статистическая динамика вращения Земли». Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают основные свойства корреляционной модели приливной внутрigoдовой неравномерности вращения Земли.

Полученные результаты допускают непосредственное обобщение на случай гармонических возмущений с частотами $f = 3$ и 40 Гц в исходных уравнениях (7).

5 Одно- и многомерные распределения флуктуаций неравномерности вращения Земли

В [10] построены корреляционные модели внутрigoдовой приливной неравномерности вращения Земли, основанные на учете гармонических аддитивных и параметрических, случайных «окрашенных» и широкополосных гравитационно-приливных флуктуаций от Солнца и Луны. В [12–14] разработана теория одно- и многомерных распределений для пуассоновых флуктуаций полюса Земли и неравномерностей вращения Земли. Применительно к гауссовым и негауссовым «окрашенным» и широкополосным флуктуациям неравномерностей вращения Земли построены одно- и многомерные характеристические функции. Вычислены первые четыре статистических момента, а также асимметрия и эксцесс одномерного распределения флуктуаций неравномерности скорости вращения Земли.

Следуя разд. 4, представим дифференциальное уравнение изменения угла собственного осевого вращения $\delta\varphi$ Земли, вызванное гравитационно-приливными гармоническими и «окрашенными» случайными моментами сил от Солнца $M^S(t)$ и Луны $M^L(t)$, в следующем виде:

$$\delta\ddot{\varphi} = M^S(t) + M^L(t); \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} M^S(t) &= M_0^S(t) + Z_1 + Z_2; \\ M_0^S(t) &= M_{10}^S \cos(2\pi f_r t + \chi_1^S) + \\ &+ M_{20}^S \cos(4\pi f_r t + \chi_2^S); \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} M^L(t) &= M_0^L(t) + Z_3 + Z_4; \\ M_0^L(t) &= M_{m0}^L \cos(2\pi\nu_m t + \chi_m^L) + \\ &+ M_{f0}^L \cos(2\pi\nu_f t + \chi_f^L); \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\ddot{Z}_h + 2\varepsilon_h\omega_h\dot{Z}_h + \omega_h^2 Z_h = V_h \quad (h = \overline{1,4}). \quad (21)$$

Здесь дополнительно к обозначениям разд. 4 введены следующие обозначения: $M_0^S(t)$ и $M_0^L(t)$ — регулярные возмущения, обусловленные гравитационно-приливными возмущениями от Солнца и Луны; $f_r, 2f_r, \nu_m, \nu_f, M_{10}^S, M_{20}^S, M_{m0}^L, M_{f0}^L, \chi_1^S, \chi_2^S, \chi_m^L, \chi_f^L$ — частоты, амплитуды и начальные фазы аддитивных гармонических возмущений, соответствующие годовому, полугодовому, месячному и двухнедельному циклам; Z_h ($h = \overline{1,4}$) — удельные «окрашенные» случайные моменты (в общем случае негауссовы случайные процессы), определяемые линейными дифференциальными уравнениями второго порядка формирующего фильтра (21) с параметрами ε_h ($0 < \varepsilon_h < 1$) и ω_h ($\omega_1 = 2\pi f_r, \omega_2 = 4\pi f_r, \omega_3 = 2\pi\nu_m, \omega_4 = 2\pi\nu_f$); V_h ($h = \overline{1,4}$) — независимые негауссовы белые шумы с интенсивностями G_h . Уравнение (21) для $t \gg t_0$ определяет и асимптотически устойчивый формирующий фильтр (ФФ) для «окрашенного» стационарного случайного процесса Z_h , на входе которого действует входной сигнал в виде белого шума V_h .

Для широкополосного случайного процесса Z_h ($h = \overline{1,4}$) уравнения ФФ возьмем в виде [11]:

$$\dot{Z}_h = -\alpha_h Z_h + \sigma_h \sqrt{2\alpha_h} V_h \quad (h = \overline{1,4}), \quad (22)$$

где V_h — белый шум единичной интенсивности, $G_h^V = 1$.

Совокупность уравнений (18)–(21) путем введения информационных $X = [X_1 X_2]^T$ и инструментальных $Y = [Y_1 \dots Y_8]^T$ переменных на основе соотношений

$$\begin{aligned} X_1 &= \delta\varphi; \quad X_2 = \delta\dot{\varphi}; \\ Y_1 &= Z_1; \quad \dot{Z}_1 = Y_2; \quad Y_3 = Z_2; \quad \dot{Z}_2 = Y_4; \\ Y_5 &= Z_3; \quad \dot{Z}_3 = Y_6; \quad Y_7 = Z_4; \quad \dot{Z}_4 = Y_8 \end{aligned}$$

вместе с соответствующими начальными условиями приводится к виду:

$$\dot{X}_1 = X_2; \quad \dot{X}_2 = M_0^S + M_0^L + \sum_{j=1,3,5,7} Y_j; \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_j &= Y_{j+1}; \\ \dot{Y}_{j+1} &= -2\varepsilon_{j+1}\omega_{j+1}Y_{j+1} - \omega_{j+1}^2 Y_j + V_{j+1} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 3, 5, 7) \quad (24)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\dot{X} = a_0 + aX + bY; \quad X(t_0) = X_0; \quad (25)$$

$$\dot{Y} = \alpha_0 + \alpha Y + \beta V; \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (26)$$

где $V = [V_1 \dots V_4]^T$; элементы векторов a_0 и α_0 и матриц a, α, b, β находятся из уравнений (23) и (24).

Для широкополосных случайных процессов Z_h имеем уравнения (18)–(20) и (22). При этом входящие в уравнения (25) и (26) векторы и матрицы a_{01} , α_0 , a , α , b и β определяются из уравнений (18)–(20) и (22).

Линейная дифференциальная стохастическая модель (25) и (26) положена в основу компьютерного статистического моделирования распределений неравномерностей вращения Земли для «окрашенных» и широкополосных флуктуаций.

Обозначим через $\chi^V(\mu; t) = \partial(\ln h_1^V(\mu; t))/\partial t$ логарифмическую производную от одномерной характеристической функции векторного белого шума V . В условиях (25) и (26) точное выражение для n -мерной характеристической функции информационных переменных X для моментов времени t_1, \dots, t_n будет иметь следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} g_n^x(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = & \\ = g_0^x \left(\sum_{k=1}^n u_{11}(t_k, t_0)^T \lambda \right) \times & \\ \times g_0^y \left(\sum_{k=1}^n u_{12}(t_k, t_0)^T \lambda \right) \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^n \lambda_k^T \times \right. & \\ \times \left[\int_{t_0}^{t_k} u_{11}(t_k, \tau) a_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_k} u_{12}(t_k, \tau) \alpha_0(\tau) d\tau \right] + & \\ + \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \chi^V \left(\beta(\tau)^T \sum_{l=k}^n u_{12}(t_l, \tau)^T \lambda_l; \tau \right) d\tau \left. \right\}. & \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь $g_0^x(\sigma)$ и $g_0^y(\rho)$ — характеристические функции начальных значений Y_0 и X_0 ; $u_{11}(t, \tau)$, $u_{12}(t, \tau)$, $u_{22}(t, \tau)$ — фундаментальные решения однородных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_{11} = au_{11}; \quad \dot{u}_{12} = au_{12} + bu_{22}; \quad \dot{u}_{22} = \alpha u_{22}, \quad (28)$$

где a , b , α — матрицы в уравнениях (25) и (26). По известным формулам теории линейных стохастических систем [11] из (27) и (28) находятся плотности и функции распределения.

При нормальных белых шумах V и нормальных начальных условиях X_0 , Y_0 все одно- и многомерные распределения нормальны. Поэтому достаточно использовать формулы корреляционной теории [11] соответственно для «окрашенных» и широкополосных процессов Z_h .

Для стационарных и независимых белых шумов V при $t_0 = -\infty$ с учетом того, что $a_0 = a_0(\tau)$, $\alpha_0 = 0$, $b, \beta = const$, $\chi^V(\mu; t) = \chi^V(\mu)$, формула (27) при $n = 1$ дает следующее точное выражение для нестационарной одномерной характеристической функции информационной переменной $X_2 = \delta\dot{\varphi}$:

$$\begin{aligned} g_1^x(\lambda; t) = g_0^x(u_{11}(t, -\infty)^T \lambda) g_0^y(u_{12}(t, -\infty)^T \lambda) \times \\ \times \exp \left\{ -i \lambda^T \int_{-\infty}^t u_{11}(t, \tau) a_0(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^t \chi^V(\beta^T u_{12}(t, \tau)^T \lambda; \tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Из (8) для центрированной информационной переменной $X_2^0 = X_2 - m_2^x$ (m_2^x — математическое ожидание $\delta\dot{\varphi}$, определяемое $M_0^S(t)$ и $M_0^L(t)$) получаем следующее точное стационарное одномерное распределение:

$$g_1^x(\lambda) = \prod_{j=1,3,5,7} g_1^{y_j}(\lambda). \quad (29)$$

Здесь $g_1^{y_j}(\lambda)$ ($j = 1, 3, 5, 7$) — характеристические функции инструментальных переменных $Z_j = Y_j$ ($j = 1, 3, 5, 7$), определяемые уравнениями $\Phi\Phi$, причем согласно [11] точное решение имеет вид:

$$g_1^{y_j}(\lambda) = \exp \left\{ \int_0^\infty \chi^{V_j}(w_j(\rho)\lambda) d\rho \right\}, \quad (30)$$

где $\chi^{V_j}(\mu)$ — логарифмическая производная одномерной характеристической функции белого шума V_j ($j = 1, 3, 5, 7$); $w_j(\rho)$ — весовая $\Phi\Phi$. В частности, для (21) и (22) функция равна

$$\begin{aligned} w_j(\rho) = \omega_j^{-1} e^{-\varepsilon_j \omega_j \rho} \sin \omega_j \rho; \\ \bar{\omega}_j = \omega \sqrt{1 - \varepsilon_j^2}, \quad 0 < \varepsilon_j < 1 \quad (j = 1, 3, 5, 7); \\ w_h(\rho) = \sigma_h \sqrt{2\alpha_h} e^{-\alpha_h \rho} \quad (h = \bar{1}, \bar{4}). \end{aligned} \quad (31)$$

Для расчета уклонения одномерного распределения информационных переменных X_1 и X_2 от гауссового обычно или составляются уравнения для начальных α_r и центральных μ_r моментов r -го порядка, или непосредственно используются известные формулы [11]:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r^x &= \alpha_{r_1, \dots, r_n}^x = i^{-r} \left[\frac{\partial^r g_1^x(\lambda)}{\partial \lambda_1^{r_1} \dots \partial \lambda_n^{r_n}} \right]_{\lambda=0}; \\ \mu_r^x &= \mu_{r_1, \dots, r_n}^x = \\ &= i^{-r} \left[\frac{\partial^r}{\partial \lambda_1^{r_1} \dots \partial \lambda_n^{r_n}} e^{-i \lambda^T m^x} g_1^x(\lambda) \right]_{\lambda=0}, \\ &(\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_n]^T; \quad r_1 + \dots + r_n = r; \\ & \quad r = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Для информационной переменной X_2^0 выберем в качестве меры уклонения распределения от

гауссового две безразмерные величины: асимметрию (γ_1) и эксцесс (γ_2). Тогда будем иметь следующие расчетные формулы:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \quad (33)$$

где в силу (11)

$$\mu_r = \mu_r^{x_2} = (i)^{-r} \left[\frac{dg_1^r(\lambda)}{d\lambda^r} \right]_{\lambda=0} \quad (r = 2, 3, 4);$$

$$g_1(\lambda) = g_1^{x_2}(\lambda) = \exp \left\{ \sum_{j=1,3,5,7} \int_0^\infty \chi^{V_j}(w_j(\rho)\lambda) d\rho \right\}.$$

Формулы (29)–(33) для независимых гауссовых белых шумов V_j ($j = 1, 3, 5, 7$), когда

$$\chi^{V_j}(\mu) = -\frac{1}{2} \mu^2 G^V \left(G^V = \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V \right),$$

принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} g_1(\lambda) &= \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j} \right\}; \\ I_{2j} &= \int_0^\infty w_j^2(\rho) d\rho; \\ \mu_1 = \mu_3 &= 0; \quad \mu_2 = \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j}; \\ \mu_4 &= 3\mu_2^2; \quad \gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Таким образом, смесь гауссовых «окрашенных» процессов Z_h в уравнениях (18)–(20) приводит к суммарному гауссову процессу. При этом из формул (34) для дисперсии μ_2 вытекает следующее условие эквивалентной замены «окрашенных» гауссовых процессов одним гауссовым «окрашенным» процессом:

$$G^\exists I_2^\exists = \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j}; \quad I_2^\exists = \int_0^\infty [w^\exists(\rho)]^2 d\rho. \quad (35)$$

Аналогично для простых пуассоновых шумов V_j ($j = 1, 3, 5, 7$), когда

$$\chi^{V_j}(\mu) = (e^{i\mu} - 1) G_j^V,$$

находим

$$\left. \begin{aligned} g_1(\lambda) &= \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1,3,5,7} \int_0^\infty (e^{iw(\rho)\lambda} - 1) G_j^V d\rho \right\}; \\ \mu_1 = \mu_3 &= 0; \quad \mu_2 = \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j}; \\ \mu_4 &= \sum_{j=1,3,5,7} [G_j^V I_{4j} + 3(G_j^V I_{2j})^2]; \\ I_{4j} &= \int_0^\infty w_j^4(\rho) d\rho; \quad \gamma_1 = 0; \\ \gamma_2 &= \frac{\sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{4j}}{\left(\sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Таким образом, стационарное негауссово распределение (36) будет симметричным ($\gamma_1 = 0$) с положительным эксцессом $\gamma_2 > 0$. Отсюда при одинаковых шумах $V_j = V$, $G_j^V = G^V$ и ФФ вида $w_j(\rho) = w(\rho)$ получаем:

$$\gamma_2 = \frac{I_4}{4G^V I_2^2} < \frac{\varepsilon\omega}{4G^V}.$$

С ростом интенсивности G^V профильтрованный пуассонов процесс Z_h стремится к гауссовому. Как следует из формул (34) и (36), дисперсии совпадают $\mu_2^\Gamma = \mu_2^\Pi$, а условием эквивалентности будет (35).

Для широкополосных гауссовых шумов единичной интенсивности имеем:

$$\chi^{V_h}(\mu) = -\frac{\mu^2}{2}; \quad g_1(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^4 \sigma_j^2 \right\};$$

$$\mu_1 = \mu_3 = 0; \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^4 \sigma_j^2; \quad \mu_4 = 3\mu_2^2;$$

$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0.$$

Аналогично для простых пуассоновых шумов находим:

$$\left. \begin{aligned} \chi^{V_h}(\mu) &= (e^{i\mu} - 1); \\ g_1(\lambda) &= \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{h=1}^4 \int_0^\infty (e^{iw_h(\rho)\lambda} - 1) d\rho \right\}; \\ \mu_1 = \mu_3 &= 0; \quad \mu_2 = \sum_{h=1}^2 \sigma_h^2; \quad \mu_4 = 2 \sum_{h=1}^4 \sigma_h^4; \\ \gamma_1 &= 0; \quad \gamma_2 = \frac{\sum_{h=1}^4 \sigma_h^4}{2 \left(\sum_{h=1}^4 \sigma_h^2 \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Из (37) видно, что при одинаковых процессах $Z_h = Z$, когда $\sigma_h = \sigma$, имеем $\gamma_2 = 1/8$.

Замечание 2. Для эрдитарных возмущений $M^S(t)$ и $M^L(t)$, ядра которых допускают аппроксимацию линейными дифференциальными уравнениями, соответствующие результаты для $t \ll t_0$ получаются путем расширения вектора состояния и составления линейных уравнений для эрдитарных ядер [12–15].

Полученные уравнения, а также выражения для одно- и многомерных распределений совместно с уравнениями для функций чувствительности определяющих параметров положены в основу компьютерной модели в среде MATLAB. Она включена в состав информационных ресурсов по фундаментальной проблеме «Статистическая динамика вращения Земли». Проведенные вычислительные эксперименты методом статистического моделирования подтверждают основные свойства полученных аналитических моделей распределений флуктуаций неравномерностей вращения Земли.

6 Вероятностные модели флуктуаций неравномерности вращения Земли при нестационарных возмущениях

Следуя [15, 16], рассмотрим вероятностные модели флуктуаций неравномерности вращения Земли, вызванные нестационарными стохастическими возмущениями.

Представим математическую модель флуктуаций неравномерности вращения Земли на годовом интервале времени, вызванных нестационарными возмущениями, в следующем виде:

$$\delta\ddot{\varphi} = M^{SL}(t) + \Delta M^{SL}(t) + M^D(t, \delta\dot{\varphi}); \quad (38)$$

$$\delta\dot{\varphi}(t_0) = \delta\dot{\varphi}_0; \quad \delta\varphi(t_0) = \delta\varphi_0; \quad (39)$$

$$M^{SL} = M^{SL}(t) = M_0^{SL}(t) + \Delta M_0^{SL}(t) + \Delta^0 M^{SL}(t); \quad (40)$$

$$M_0^{SL} = M_0^{SL}(t) = M_{10}^S \cos(2\pi f_{\Gamma} t + \chi_1^S) + M_{20}^S \cos(4\pi f_{\Gamma} t + \chi_2^S) + M_{m0}^L \cos(2\pi\nu_m t + \chi_m^L) + M_{f0}^L \cos(2\pi\nu_f t + \chi_f^L); \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_0^{SL} &= \Delta M_0^{SL}(t) = \\ &= \sum_j^{n^{SL} + \Delta n^{SL}} \Delta M_{0j}^{SL} \cos(\omega_j t + \Delta\chi_j^{SL}); \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Delta^0 M^{SL} &= \Delta^0 M^{SL}(t) = \Delta_0^0 M^{SL}(t) + \\ &+ \sum_j^{n^{SL} + \Delta n^{SL}} \Delta_1^0 M_j^{SL}. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь дополнительно к обозначениям разд. 4 и 5 введены следующие обозначения: M^D — диссипативные возмущения; $\Delta M_0^{SL}(t)$ — полигармонические возмущения на частотах ω_j ; $\Delta^0 M^{SL}(t)$ — случайные составляющие возмущений; $\Delta_0^0 M^{SL}(t)$ — случайные широкополосные возмущения; $\Delta_1^0 M^{SL}(t)$ — случайные «окрашенные» возмущения.

Рассмотрим три практических способа задания вероятностных характеристик нестационарных широкополосных и «окрашенных» случайных возмущений

$$Z(t) = \Delta^0 M^{SL}(t); \quad Z_j(t) = \Delta_1^0 M_j^{SL}. \quad (44)$$

Метод формирующих фильтров [11] основан на представлении (43) и (44) в виде линейных нестационарных фильтров:

$$\dot{Z} + \alpha(t)Z = V; \quad Z(t_0) = Z_0; \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Z}_j + 2\varepsilon_j(t)\omega_j(t)\dot{Z}_j + \omega_j^2(t)Z_j &= V_j; \\ Z_j(t_0) = Z_{j0}; \quad \dot{Z}_j(t_0) &= \dot{Z}_{j0}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где V и V_j — нестационарные нормальные (гауссовы) белые шумы переменной интенсивности $G = G^V(t)$ и $G^V = [G_{jl}^V(t)]$; $Z_0, Z_{j0}, \dot{Z}_{j0}$ — нормальные (гауссовы) начальные условия. Для негауссовых белых шумов и начальных условий обычно задаются одномерные характеристические функции и плотности (44). При этом требуется независимость начальных условий от белых шумов [11].

Согласно методу канонических разложений (КР) [11, 17], нормальные случайные функции (44) и (45) на интервале времени $[0, t_k]$ задаются отрезками КР вида:

$$\left. \begin{aligned} Z(t) &= m^z(t) + \sum_{\nu=1}^H V_{\nu} z_{\nu}(t); \\ Z_j(t) &= m_j^z(t) + \sum_{\nu=1}^H V_{\nu} z_{j\nu}(t), \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где $m^z(t)$ и $m_j^z(t)$ — математические ожидания $Z(t)$ и $Z_j(t)$; V_{ν} — некоррелированные нормальные (гауссовы) случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и известными дисперсиями D_{ν} ; $z_{\nu}(t)$ и $z_{j\nu}(t)$ — детерминированные (в

общем случае комплексные) координатные функции. Для негауссовых (44) КР обычно строят в виде разложений с независимыми компонентами $V_\nu z_\nu(t)$ и $V_\nu z_{j\nu}(t)$, предполагая известным распределение случайных величин V_1, \dots, V_H .

Метод приведения нестационарного гауссового случайного процесса к стационарному путем линейного преобразования с одновременной заменой аргумента основан на формулах [11]:

$$Z(t) = c_0(t) + c_1(t)U(\psi(\sigma));$$

$$Z_j(t) = c_{j0}(t) + \sum_{l=1}^n c_{jl}(t)U_j(\psi(\sigma)),$$

где $c_0(t)$, $c_{j0}(t)$, $c_1(t)$ и $c_{jl}(t)$ — детерминированные функции; $U(\psi(\sigma))$ и $U_j(\psi(\sigma))$ — стационарные гауссовы случайные функции с известными спектрально-корреляционными характеристиками; $\sigma = \psi(t)$ — нелинейная функция, определяющая правило замены аргумента случайной функции.

Замечание 3. Согласно [8], при замене случайной функции $Z(t)$ эквивалентным белым шумом интенсивности $G^V(t)$ с интервалом корреляции $\tau_{\text{кор}}$ пользуются формулами:

$$G^V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_z(t, t + \tau) d\tau;$$

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{2} \max_t \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_z(t, t + \tau)}{K_z(t, t)} d\tau \right\},$$

где $K(t, t + \tau)$ — ковариационная функция $Z(t)$.

Для негауссовых случайных функций U и U_j предполагаются известными их одно- и многомерные распределения [11]. В практических задачах распределения задаются соответствующими отрезками ортогональных разложений на основе методов моментов, квазимоментов, семиинвариантов и других коэффициентов [11, 15]. В тех случаях, когда достаточно ограничиться одно- и двумерными распределениями, пользуются методом нормальной аппроксимации. Тогда достаточно знания первых двух вероятностных моментов для времен t_1 и t_2 .

Согласно методу ФФ [11, 15] при линейных диссипативных возмущениях, когда $M^D(t, \delta\dot{\varphi}) = -D\delta\dot{\varphi}$, корреляционные уравнения нестационарных флуктуаций (39)–(47) имеют вид:

$$\dot{m} = a_0 + am; \quad m(t_0) = m_0;$$

$$\dot{K} = aK + Ka^T + bG^V b^T; \quad K(t_0) = K_0; \quad (48)$$

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K(t_1, t_2)a(t_2)^T;$$

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} K(t_1) & \text{при } t_1 < t_2; \\ K(t_2, t_1)^T & \text{при } t_1 > t_2. \end{cases}$$

Здесь $X = X(t)$ — вектор, составленный из информационных переменных $[\delta\varphi \delta\dot{\varphi}]^T$ в (39) и инструментальных переменных $\Phi\Phi$ так, что

$$\dot{X} = a_0 + aX + bV, \quad (49)$$

где $a_0 = a_0(t)$, $a = a(t)$, $b = b(t)$ — векторные и матричные функции, отвечающие уравнениям (38)–(46); $m = m(t) = MX$ — вектор математического ожидания; K — ковариационная матрица:

$$K = K(t) = MX^0(t)X^{0T}(t) = [k_{ij}(t)];$$

$K(t_1, t_2)$ — матрица ковариационных функций:

$$K(t_1, t_2) = [K_{ij}(t_1, t_2)]_{ij} = MX^0(t_1)\overline{X^0(t_2)}.$$

Одно- и многомерные распределения являются гауссовыми и определяются только $m(t)$, $K(t)$ и $K(t_1, t_2)$. Для негауссовых белых шумов в (49) одно- и многомерные характеристические функции получены в [15]. Они справедливы и для нестационарных негауссовых белых шумов.

Метод КР для информационных переменных $X_1 = \delta\varphi$, $X_2 = \delta\dot{\varphi}$ приводит к следующим уравнениям:

$$X_i = m_i^x(t) + \sum_{\nu=1}^H V_\nu x_{i\nu}(t) \quad (i = 1, 2); \quad (50)$$

$$K_{ij}(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^H D_\nu x_{i\nu}(t_1)\overline{x_{j\nu}(t_2)} \quad (i, j = 1, 2). \quad (51)$$

Здесь $m_i^x(t)$ и $x_{i\nu}(t)$ определяются путем решения однопипных обыкновенных дифференциальных уравнений вида [17]:

$$\dot{m}_1^x = m_2^x; \quad \dot{m}_2^x = M_0^{SL}(t) + \Delta M_0^{SL}(t) - Dm_2^x;$$

$$\dot{x}_{1\nu} = x_{2\nu}; \quad \dot{x}_{2\nu} = \Delta_{0\nu}^0 M^{SL}(t) - Dx_{2\nu};$$

$$k_{ij}^x(t_0) = k_{ij0}^x \quad (i, j = 1, 2),$$

где $\Delta_{0\nu}^0 M^{SL}(t)$ — координатные функции КР (47), отвечающие случайной величине V_ν в (43). При этом $K(t) = \{k_{ij}(t)\}$ и $K(t_1, t_2) = \{K_{ij}(t_1, t_2)\}$ определяются по формулам [11, 17]:

$$k_{ij}(t) = K_{ij}(t, t);$$

$$K_{ij}(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^H D_\nu x_{i\nu}(t_1)\overline{x_{j\nu}(t_2)}.$$

Одно- и многомерные распределения в силу (50) и (51) выражаются через распределения случайных величин V_L по известным формулам вычисления функции случайного аргумента [11, 17].

Метод приведения нестационарной задачи к стационарной основан на известных формулах линейной теории стохастических систем [11, 17].

Замечание 4. Метод КР требует решения одноподобных обыкновенных уравнений, порядок которых равен $Q_{KP} = H + h$ ($h = 4 + n^S + n^L$), в то время как метод ФФ требует решения $Q_{FF} = h(h + 3)/2$ уравнений. Вычислительные преимущества метода КР по сравнению с методом ФФ становятся очевидными при $H + h < h(h + 3)/2$. Метод приведения занимает промежуточное положение между методами КР и ФФ.

Рассмотрим несколько важных частных случаев.

1. Уравнения (48) и (49) при $M_0^{SL} = \Delta M_0^{SL} = 0$ и нестационарном белом шуме, когда $\Delta^0 M^{SL}(t) = V$, имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2; & \dot{X}_2 &= V; \\ \dot{k}_{11} &= 2k_{12}; & \dot{k}_{12} &= k_{22}; & \dot{k}_{22} &= G^V(t). \end{aligned}$$

После интегрирования при нулевых начальных условиях получаем соответственно при «нарастающем» белом шуме $G^V(t) = G_r^V t^r$ ($r \neq -1$):

$$\left. \begin{aligned} k_{22} &= \frac{G_r^V}{r+1} t^{r+1}; \\ k_{12} &= \frac{G_r^V}{(r+1)(r+2)} t^{r+2}; \\ k_{11} &= \frac{G_r^V}{(r+1)(r+2)(r+3)} t^{r+3}; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

при «детектированном» белом шуме $G^V(t) = G_0^V \sin^2 \omega t$:

$$\left. \begin{aligned} k_{22} &= \frac{G_0^V}{2} t - \frac{G_0^V}{4} \sin 2\omega t; & \langle k_{22} \rangle &= \frac{G_0^V}{2} t; \\ k_{12} &= \frac{G_0^V}{4} t^2 - \frac{G_0^V}{8} (1 - \cos 2\omega t); \\ \langle k_{12} \rangle &= \frac{G_0^V}{4} t^2 - \frac{G_0^V}{8}; \\ k_{11} &= \frac{G_0^V}{12} t^3 - \frac{G_0^V}{8} t + \frac{G_0^V}{16} \sin 2\omega t; \\ \langle k_{11} \rangle &= \frac{G_0^V}{12} t^3 - \frac{G_0^V}{8} t; \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

при «детектированном» ускоренном белом шуме $G^V(t) = G_0^V \sin^2 \lambda t^2$:

$$\left. \begin{aligned} k_{22} &= \frac{G_0^V}{2} t - \frac{G_0^V}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} C(t); \\ \langle k_{22} \rangle &\approx \frac{G_0^V}{2} t - \frac{G_0^V}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}; \\ \langle k_{12} \rangle &\approx \frac{G_0^V}{4} t^2 - \frac{G_0^V}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} t; \\ \langle k_{11} \rangle &\approx \frac{G_0^V}{12} t^3 - \frac{G_0^V}{16} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} t^2. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ — символ осреднения по периоду $2\pi/\omega$;

через $C(t) = \int_0^t \cos(\pi/2)\tau^2 d\tau$ обозначен интеграл Френеля [18]. Приближенные выражения вычислены для $C(\infty) = 0,5$. Таким образом, при гауссовом нестационарном возмущении в виде белого шума обнаружены эффекты нарастающих и накапливающихся флуктуационных дрейфов по переменным $\delta\phi$ и $\delta\varphi$. Эффекты сохраняются и для негауссова белого шума, например пуассонового [15, 16].

2. При нестационарном широкополосном гауссовом случайном возмущении, когда $\Delta^0 M^{SL}(t) = X_3$, а X_3 удовлетворяет (46) при $\alpha = const$, уравнения (48) и (49) имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2; & \dot{X}_2 &= X_3; & \dot{X}_3 &= -\alpha X_3 + V_1; \\ \dot{k}_{11} &= 2k_{12}; & \dot{k}_{22} &= 2k_{23}; \\ \dot{k}_{33} &= -2\alpha k_{33} + G_1(t); \\ \dot{k}_{12} &= k_{22} + k_{13}; \\ \dot{k}_{13} &= k_{23} - \alpha k_{13}; \\ \dot{k}_{23} &= k_{33} - \alpha k_{23}. \end{aligned} \quad (55)$$

При $t \ll \alpha^{-1}$ в силу замечания 1 из третьего уравнения (55) имеем $G^V(t) = G_1(t)\alpha^{-2}$, $\tau_{кор} \approx \alpha^{-1}$. Поэтому приходим к формулам (52)–(54). При этом уровень флуктуационных дрейфов снижается по сравнению с чистым белым шумом за счет фильтрующих свойств ФФ. Для негауссовых белых шумов V_1 ФФ оказывает дополнительно и нормализующее воздействие. Поэтому эффекты сохраняются, например, для пуассонового возмущения той же интенсивности [15, 16].

3. При $\Delta^0 M^{SL} = X_3$ (X_3 удовлетворяет (46) при $\varepsilon, \omega = const$) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2; & \dot{X}_2 &= X_3; & \dot{X}_3 &= X_4; \\ \dot{X}_4 &= -2\varepsilon\omega X_4 - \omega^2 X_3 + V_2; \\ \dot{k}_{11} &= 2k_{12}; & \dot{k}_{22} &= 2k_{23}; & \dot{k}_{33} &= 2k_{34}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{k}_{44} &= -2(\omega^2 k_{34} + 2\varepsilon\omega k_{44}) + G_2(t); \\ \dot{k}_{12} &= k_{22} + k_{13}; \quad \dot{k}_{13} = k_{23} + k_{14}; \\ \dot{k}_{23} &= k_{33} + k_{24}; \\ \dot{k}_{14} &= k_{24} - \omega^2 k_{13} - 2\varepsilon\omega k_{14}; \\ \dot{k}_{24} &= k_{34} - \omega^2 k_{23} - 2\varepsilon\omega k_{24}; \\ \dot{k}_{34} &= k_{44} - \omega^2 k_{33} - 2\varepsilon\omega k_{34}. \end{aligned}$$

Аналогично случаю 2 при $t \ll (\varepsilon\omega)^{-1} = \tau_{\text{кор}}$, полагая $G^V(t) = G_2(t)/(2\varepsilon\omega^4)$, приходим к формулам (52)–(54). Уровень гауссовых и негауссовых флуктуационных дрейфов снижается, при этом имеет место их «окрашивание» и нормализация.

Полученные совокупности стохастических уравнений представляют собой дифференциальные стохастических модели флуктуаций неравномерности вращения Земли вследствие полигармонических и случайных нестационарных широкополосных и «окрашенных» флуктуаций на внутригодовых интервалах времени. Они лежат в основе статистического моделирования процессов в составе информационных ресурсов по проблеме «Статистическая динамика вращения Земли».

В [13–15] подробно рассмотрены нелинейные методы вероятностного анализа распределений стационарных и нестационарных флуктуаций неравномерности вращения Земли по априорным данным, основанные на параметризации распределений. Особое внимание уделено моментным методам.

7 Параметрические линейные регрессионные модели на основе апостериорных данных

Рассмотрим уравнения (4)–(6) при дополнительных к 1–4 допущениях [4–6]:

$$5. u_3 \sim u_{15} \gg u_{16}; u_5 \sim u_9 \gg u_{16}.$$

6. Приливные коэффициенты χ_{1r}^{SL} и χ_{2r}^{SL} являются периодическими функциями с частотами ϑ_j лунно-солнечных приливных воздействий следующего вида:

$$\begin{aligned} \chi_{ir}^{SL} &= b_{i0,r}^{SL}(t) + \\ &+ \sum_j b_{ij,r}^{SL}(t) \cos [2\pi\vartheta_j t + \beta_{ij,r}^{SL}(t)] \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (56)$$

Входящие в (56) коэффициенты $b_{i0,r}^{SL}(t)$, $b_{ij,r}^{SL}(t)$, $\beta_{ij,r}^{SL}(t)$ можно определить методом линейной регрессии на основе апостериорных данных о l.o.d. (t) [4–6].

Интегрируя уравнение (6) для компоненты осевого вращения Земли $r(t)$, получим с учетом меняющихся приливных коэффициентов (56) структуру вариаций длительности суток

$$\text{l.o.d.}(t) = d_1(t) + d_2(t) + \Delta d(t);$$

$$\left. \begin{aligned} d_1(t) &= a_0 + \sum_{i=1}^4 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i t + \alpha_i); \\ d_2(t) &= \sum_{i=5}^6 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i t + \alpha_i); \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \Delta d(t) &= -\chi_{3r} \left(a_0 + \sum_{i=1}^4 a_{i0} \sin(2\pi\nu_i t + \alpha_i) \right) + \\ &+ \sum_{ij} \int a_{ij} \cos(2\pi\vartheta_j \tau + \beta_{ij}) \cos(2\pi\nu_i \tau + \alpha_i) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 13,28$, $\nu_4 = 26,68$, $\nu_5 = 3$, $\nu_6 = 40$ — частоты, обусловленные лунно-солнечным возмущением; α_i — фазы соответствующих колебаний; неизвестные a_{ij} — величины, подлежащие вычислению по измерениям МСВЗ. Эти коэффициенты однозначно связаны с неизвестными.

Первое слагаемое $d_1(t)$ в выражении l.o.d. (t) представляет собой основную 9-параметрическую модель, изученную в [4–6], второе — $d_2(t)$ содержит дополнительные члены более высокого порядка, получаемые из разложения лунно-солнечного гравитационно-приливного момента, а третье слагаемое — резидиум $\Delta d(t)$, обусловленный приливными возмущениями тензора инерции Земли и представленный в виде поправки между 13-параметрической моделью и данными измерений.

Рассмотрим результаты численного моделирования внутригодовой приливной неравномерности осевого вращения Земли на основе построенной модели (57). Численные расчеты проводились с помощью метода «взвешенных» наименьших квадратов согласно расширенной модели, соответствующей выражению (57). Алгоритм применялся независимо к слагаемым $d_1(t) + d_2(t)$ и $\Delta d(t)$. При этом было принято:

$$\left. \begin{aligned} d_1(t) + d_2(t) &= (\zeta, f(t)); \\ \zeta &= (\zeta_1, \dots, \zeta_9, \zeta_{10}, \dots, \zeta_{13})^T; \\ f(t) &= (1, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \cos 4\pi t, \sin 4\pi t, \\ &\cos 2\pi\nu_3 t, \sin 2\pi\nu_3 t, \cos 2\pi\nu_4 t, \sin 2\pi\nu_4 t, \\ &\cos 6\pi t, \sin 6\pi t, \cos 2\pi\nu_6 t, \sin 2\pi\nu_6 t)^T, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где ζ_i — неизвестные параметры; $f(t)$ — вектор опорных функций; t — время, измеряемое в годах;

$$\left. \begin{aligned} \Delta d(t) &= f(t)^T \mathbf{A} g(t); \quad \mathbf{A} = \|a_{ij}\|; \\ f(t) &= \|\dots, \cos 2\pi\nu_i t, \sin 2\pi\nu_i t \dots\|^T; \\ g(t) &= \|\dots, \cos 2\pi\vartheta_j t, \sin 2\pi\vartheta_j t \dots\|^T. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Здесь \mathbf{A} — матрица неизвестных параметров; $f(t)$, $g(t)$ — векторы опорных функций; t — время, измеряемое годами.

Наконец, приведем графические результаты разложения вращательного движения Земли на составляющие $d_1(t)$, $d_2(t)$, $\Delta d(t)$ в соответствии с построенной моделью (58) и (59). На рис. 1, *a* представлена интерполяция основной модели $d_1(t)$ (рассмотренной в [6]) на 2008 г. в сравнении с данными наблюдений и измерений МСВЗ (здесь и далее на графиках контрастные кривые — теоретическая кривая; тонкие кривые — данные наблюдений). Невязка между основной моделью и данными наблюдений может быть представлена в виде двух слагаемых, обусловленных наличием неучтенных частот в разложении гравитационно-приливного момента $d_2(t)$ и возмущениями зонального приливного потенциала Земли $\Delta d(t)$, которые описываются построенными выше моделями. Интерполяции указанных процессов представлены на рис. 1, *b* и *в* в сравнении с проведенным расщеплением данных наблюдений МСВЗ. Среднеквадратические отклонения (с.к.о.) основной 9-параметрической и расширенной 13-параметрической моделей соответственно равны:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(9)} &= 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ с}; \\ \sigma^{(13)} &= 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ с}. \end{aligned}$$

Прогноз на 2009 г., выполненный по результатам предыдущей интерполяции, представлен на рис. 2. Он качественно соответствует данным наблюдений и может быть использован для анализа геофизических процессов глобального характера. Также на основе проведенного численного моделирования можно сделать заключение о целесообразности использования расширенной модели (57) для прогнозирования на короткие интервалы времени — в пределах одного месяца. Средние квадратические ошибки прогнозов для 15-суточного интервала, выполненных на основе 9- и 13-параметрической l.o.d.(t) моделей, соответственно равны:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(9)} &= 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ с}; \\ \sigma^{(13)} &= 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ с}. \end{aligned}$$

8 Линейные и квазилинейные информационные модели флуктуаций неравномерности вращения Земли по апостериорным данным

Примем за информационные переменные Z_1 и Z_2 , допускающие измерения X_1 и X_2 . Положим

$$Z_1 = X_1 + V_3; \quad Z_2 = X_2 + V_4, \quad (60)$$

где $X_1 = \delta\varphi$; $X_2 = \delta\dot{\varphi}$; V_3 и V_4 — независимые нормальные белые шумы с интенсивностями G_3 и G_4 соответственно. Тогда совокупность уравнений (7), (8) и (60) будет представлять собой исходную систему уравнений для синтеза квазилинейного фильтра для обработки информации о флуктуациях неравномерности вращения Земли по апостериорным данным, т. е. результатам измерения Z_1 и Z_2 .

Для построения квазилинейного нормального фильтра согласно [17, 19, 20] перепишем уравнения (39), (40) и (60) в следующем стандартном виде:

$$\dot{X} = a(X, t) + b(t)\bar{V}_1; \quad Z = a_1(X, t) + \bar{V}_2. \quad (61)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} X &= [X_1 X_2 X_3 X_4]^T; \quad Z = [Z_1 Z_2]^T; \\ \bar{V}_1 &= [V_1 V_2]^T; \quad \bar{V}_2 = [V_3 V_4]^T; \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= a(X, t) = \begin{bmatrix} X_2 \\ \tilde{M}_{0t} + m_0^{SL} - [(\mu + \tilde{\mu}_t) + \mu X_3] X_2 \\ -\alpha_3(X_3 - m_3^*) \\ -\alpha_4(X_4 - m_4^*) \end{bmatrix}; \\ a_1 &= a_1(X, t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \\ b &= b(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \sqrt{2\alpha_3} \\ 0 & \sigma_4 \sqrt{2\alpha_4} \end{bmatrix}; \\ \bar{G}_1 &= \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}; \quad \bar{G}_2 = \begin{bmatrix} G_3 & 0 \\ 0 & G_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Заменим (61)–(63) статистически линеаризованной системой уравнений, нелинейной относительно математических ожиданий $m^x = [m_1^x m_2^x m_3^x m_4^x]^T$, $m^z = [m_1^z m_2^z]^T$ и линейной относительно центрированных составляющих $X^0 = X - m^x$:

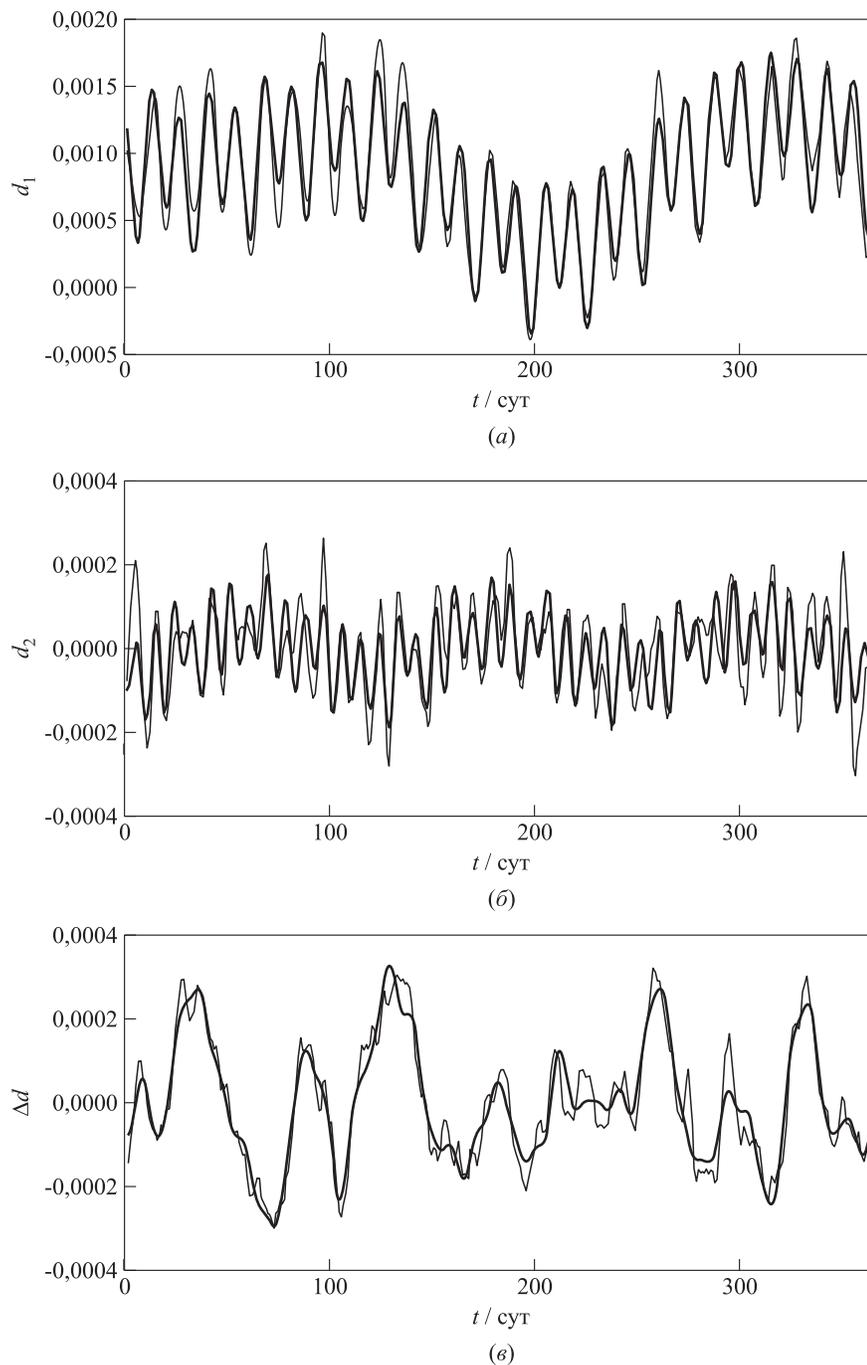


Рис. 1 Интерполяция: (а) вариаций длительности суток с помощью основной модели $d_1(t)$ (контрастная кривая); тонкая кривая — данные наблюдений МСВЗ; (б) составляющей $d_2(t)$ (контрастная кривая); тонкая кривая — колебания составляющей $d_2(t)$, выделенной из данных наблюдений МСВЗ; (е) резидуума $\Delta d(t)$ (контрастная кривая); тонкая кривая — колебания резидуума $\Delta d(t)$, выделенного из данных наблюдений МСВЗ

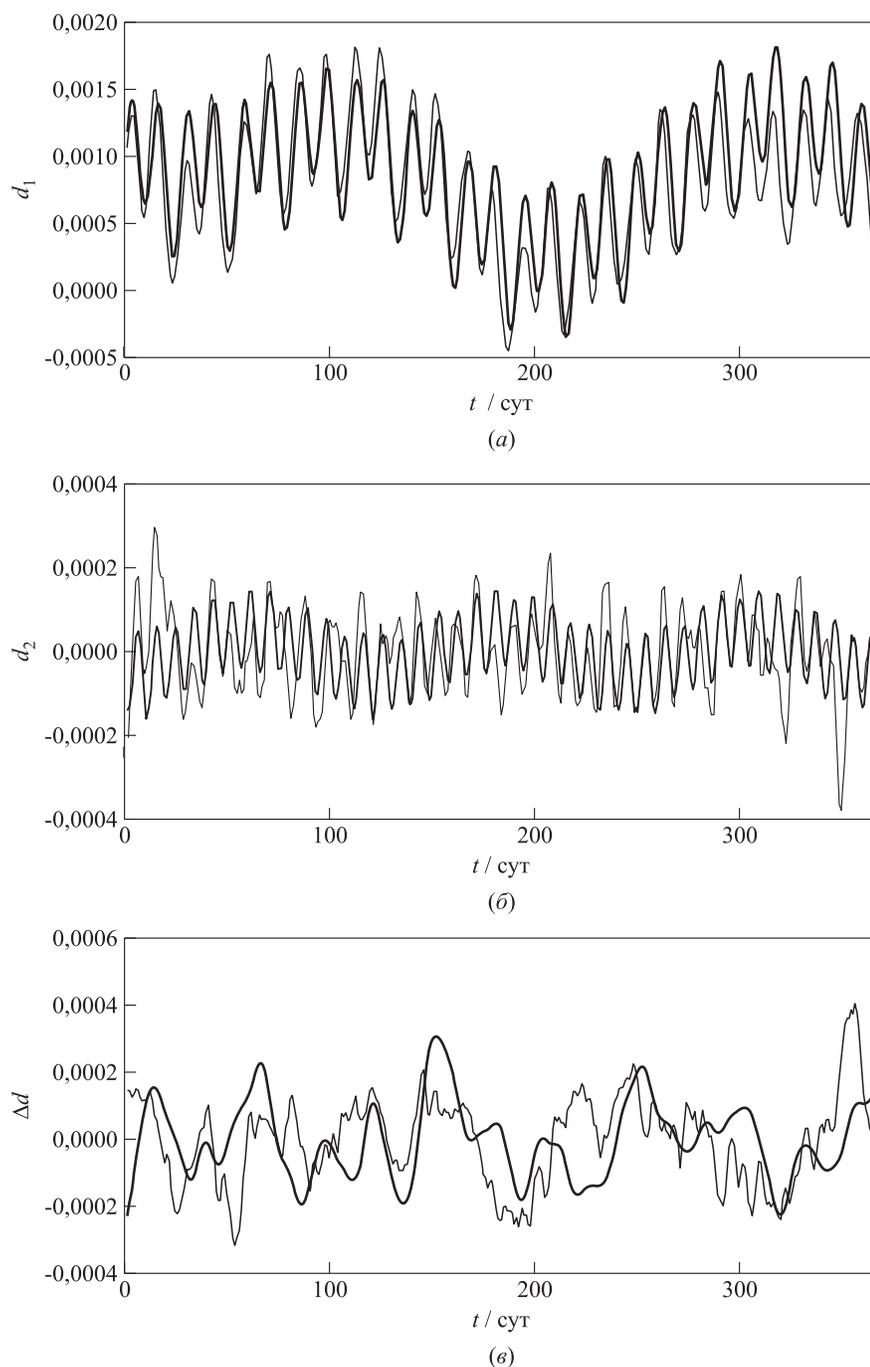


Рис. 2 Прогноз на 2009 г.: (а) вариаций длительности суток с помощью основной модели $d_1(t)$ (контрастная кривая) в сравнении с данными наблюдений МСВЗ (тонкая кривая); (б) составляющей $d_2(t)$ (контрастная кривая) в сравнении с колебаниями составляющей $d_2(t)$, выделенной из данных наблюдений МСВЗ (тонкая кривая); (в) резидуума $\Delta d(t)$ (контрастная кривая) в сравнении с колебаниями резидуума $\Delta d(t)$, выделенного из данных наблюдений МСВЗ (тонкая кривая)

$$\dot{m}^x = a_{00}; \quad m^z = a_{10}; \quad (64)$$

$$\dot{X}^0 = a_{01}X^0 + \psi(t)\bar{V}_1; \quad Z^0 = a_{11}X^0 + V_2. \quad (65)$$

Здесь $a_{ij} = a_{ij}(m^x, K^x, t)$ ($i, j = 0, 1$) — коэффициенты статистической линеаризации функций $a = a(X, t)$ и $a_1 = a_1(X, t)$. При этом ковариационная матрица K^x определяется уравнением вида (12):

$$\dot{K}^x = a_{01}K^x + K^x a_{01}^T + b\bar{G}_1 b^T.$$

Применяя к (64) и (65) уравнения фильтра Калмана–Бьюси [19, 20], получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= a_{00} - a_{01}m^x + a_{01}\hat{X} + \\ &+ Ra_{11}\bar{G}_2^{-1}(Z - a_{11}\hat{X} - a_{10} + a_{11}m^x); \end{aligned} \right\} (66)$$

$$\hat{X}_0 = MX(t_0);$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &= a_{01}R + Ra_{01}^T - Ra_{11}^T\bar{G}_2^{-1}a_{11}R + b\bar{G}_1 b^T; \\ R_0 &= M \left[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T \right]. \end{aligned} \right\} (67)$$

Совокупность фильтрационных уравнений (66) и (67) определяет искомый квазилинейный нормальный фильтр для обработки информации о флуктуациях неравномерности вращения Земли по апостериорным данным, в том числе в темпе получения результатов наблюдения.

Фильтрационные уравнения (66) и (67) для произвольного линейного наблюдения, когда $a_1(X, t) = b_1(t)X + b_0$, $a_{11} = b_1(t)$, если через β обозначить коэффициент усиления фильтра $\beta = Rb_1(t)^T\bar{G}_2^{-1}$, принимают следующий вид:

$$\dot{\hat{X}} = a_{00} - a_{01}m^x + a_{01}\hat{X} + \beta[Z - b_1(t)\hat{X} - b_0(t) + b_1(t)m^x];$$

$$\hat{X}_0 = MX_0;$$

$$\dot{R} = a_{01}R + Ra_{01}^T - \beta b_1(t)R + b(t)\bar{G}_1(t)b(t)^T;$$

$$R_0 = M \left[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T \right].$$

Коэффициенты статистической линеаризации a_{00}, a_{01} и вспомогательная инструментальная матрица ошибки фильтрации R не содержат результатов наблюдений и могут быть определены отдельно (до получения результатов наблюдений). Таким образом, возможна априорная оценка точности квазилинейного фильтра.

В случае, когда известны канонические представления возмущений в (7), используются соответствующие версии квазилинейного метода [17, 19, 20].

Для негауссовских возмущений в (7) можно воспользоваться методом эквивалентной линеаризации, взяв в качестве осредняющего распределения отрезок параметризованного распределения,

например плотности, а затем использовать уравнения фильтра Калмана–Бьюси или Пугачёва [19, 20].

Рассмотрим типовые линейные фильтры для обработки информации о неравномерности скорости вращения Земли.

1. Пусть сначала отсутствуют диссипативные силы ($\mu = 0$). Тогда искомые уравнения можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= \tilde{M}_{0t} + m_0^{SL} + V_1, \quad Z_2 = X_2 + V_2; \\ \dot{\hat{X}}_2 &= \tilde{M}_{0t} + m_0^{SL} + RG_2^{-1}(Z_2 - \hat{X}_2); \\ \dot{\hat{X}}_{2,t_0} &= 0; \\ \dot{R} &= -R^2G_2^{-1} + G_1; \quad R_{t_0} = R_0. \end{aligned} \quad (68)$$

Решение (68) допускает аналитическую запись [19]:

$$R = \sqrt{G_1G_2} \frac{1 + \gamma \exp(-2\gamma_0 t)}{1 - \gamma \exp(-2\gamma_0 t)},$$

где

$$\gamma = \frac{R_0 - R_\infty}{R_0 + R_\infty}; \quad \gamma_0^2 = G_1G_2^{-1}; \quad R_\infty = \sqrt{G_1G_2}.$$

При $t \rightarrow \infty R \rightarrow R_\infty$ и

$$\dot{\hat{X}}_2 = \tilde{M}_{0t} + m_0^{SL} + \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}(Z_2 - \hat{X}_2).$$

2. В случае чисто линейных диссипативных сил ($\mu \neq 0, \tilde{\mu}_t \equiv 0$) искомые уравнения можно представить в виде:

$$\dot{X}_2 = -\mu X_2 + \tilde{M}_{0t} + m_0^{SL} + V_1; \quad Z_2 = X_2 + V_2; \quad (69)$$

$$\dot{\hat{X}}_2 = -\mu \hat{X}_2 + \tilde{M}_{0t} + m_0^{SL} + \beta(Z_2 - \hat{X}_2);$$

$$\hat{X}_{2,t_0} = m_0; \quad \beta = RG_2^{-1};$$

$$\dot{R} = -2\mu R - R^2G_2^{-1} + G_1; \quad R_{t_0} = R_0. \quad (70)$$

Решение (70) имеет вид [19]:

$$R = R_\infty + \rho; \quad R_\infty = R_\infty^+;$$

$$R_\infty^\pm = G_2 \left(\sqrt{\mu^2 + G_1G_2^{-1}} \pm \mu \right);$$

$$\rho = (R_\infty^+ + R_\infty^-) \left/ \left((R_0 + R_\infty^-)(R_0 + R_\infty^+)^{-1} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \exp \left(2\sqrt{\mu^2 + G_1G_2^{-1}}t \right) - 1 \right) \right.,$$

причем при $t \rightarrow \infty R \rightarrow R_\infty$.

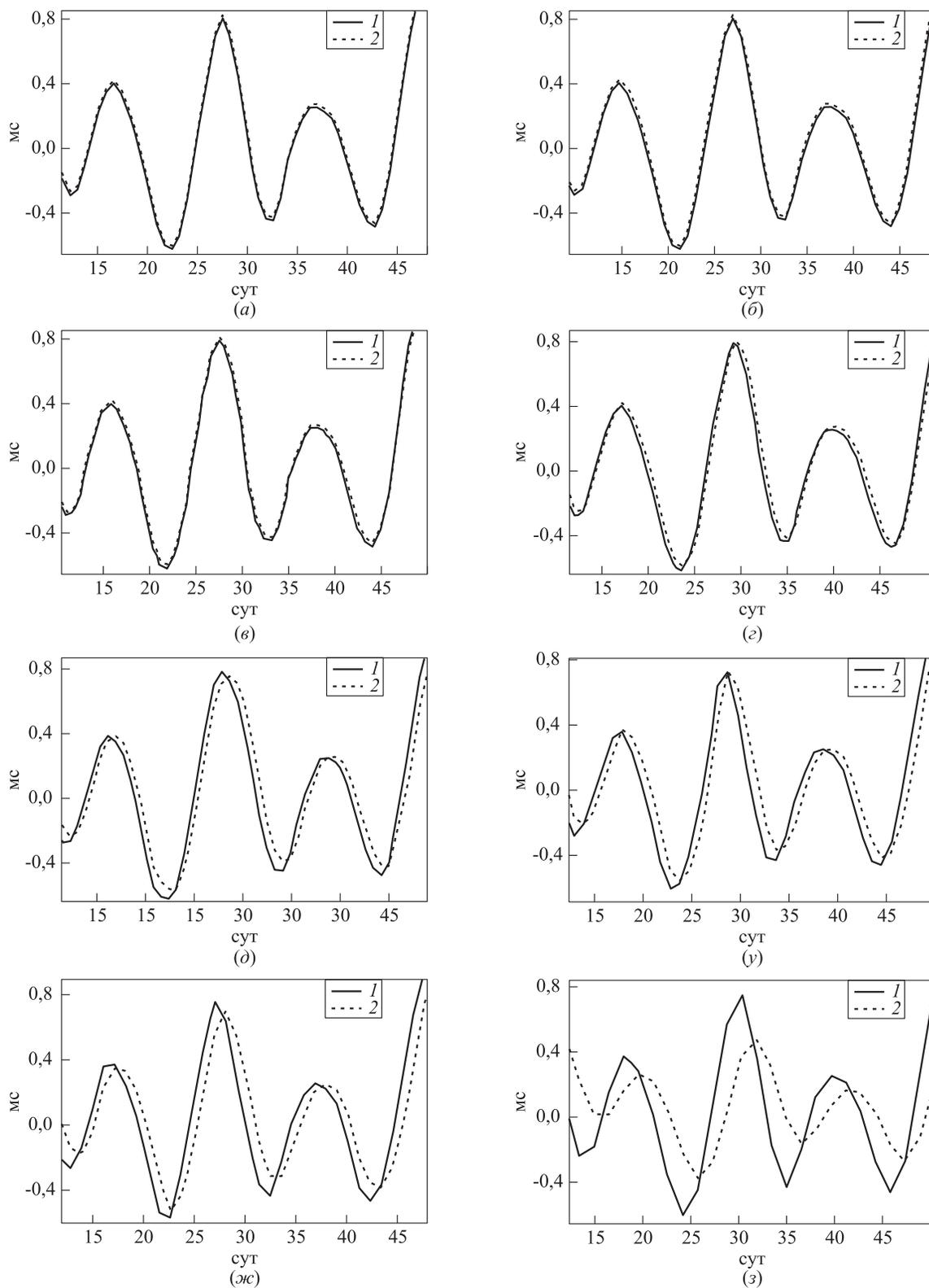


Рис. 3 Реализации (1) и результаты фильтрации (2) при $G_1 = 10^{-15}$ и при различных значениях интенсивности G_2 : (а) 10^{-19} ($R = 0,1$); (б) 10^{-18} ($R = 0,31$); (в) 10^{-17} ($R = 1$); (г) 10^{-16} ($R = 3,162$); (д) $5 \cdot 10^{-16}$ ($R = 7,07$); (е) $9 \cdot 10^{-16}$ ($R = 9,5$); (ж) $1,5 \cdot 10^{-15}$ ($R = 12,25$); (з) 10^{-14} ($R = 31,62$)

3. Если нормальные шумы V_1 и V_2 коррелированы ($G_{12} \neq 0$), искомые уравнения имеют вид (69) и

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_2 &= -\mu \hat{X}_2 + \tilde{M}_{0t} + m_0^{SL} + \\ &\quad + (R + G_{12})G_2^{-1}(Z_2 - \hat{X}_2); \\ \dot{R} &= -2(\mu + G_{12}G_2^{-1})R + R^2 + G_2^{-1} + \\ &\quad + G_1 - G_{12}^2G_2^{-1}; \\ R &= R_\infty + \rho; \\ \rho &= \frac{(R_\infty^+ + R_\infty^-)(R_0 + R_\infty^+)}{(R_0 + R_\infty^-) \exp(\gamma t) - (R_0 + R_\infty^+)}; \\ \gamma^2 &= (\mu + G_{12}G_2^{-1}) + G_1G_2^{-1}; \\ R_\infty^\pm &= G_2(\gamma \pm \mu - G_{12}G_2^{-1}). \end{aligned}$$

На рис. 3 для различных интервалов времени показаны реализации и результаты фильтрации при $G_1 = 10^{-15}$ и при различных значениях интенсивности G_2 белых шумов. Там же указаны значения дисперсии R ошибок фильтрации.

В [12] приведены уравнения квазилинейных фильтров для обработки информации о неравномерности вращения Земли в случае нелинейного рэлеевского механизма диссипации.

Разработанные линейные и квазилинейные методы построения информационных моделей флуктуаций неравномерности вращения Земли по априорным и апостериорным данным реализованы в виде экспериментального программного обеспечения в среде MATLAB.

Квазилинейные методы, как показали вычислительные эксперименты и сравнение с результатами статистического моделирования, обеспечивают высокую точность фильтрации скорости $\delta\dot{\varphi}$ (около 2%–3% для априорной стационарной информации и 0,5%–1% при апостериорной информации). Из-за отсутствия возвращающей силы по $\delta\varphi$, как видно из уравнения (7), появляются дрейфы и накапливающиеся ошибки, поэтому так необходимы точные измерения $\delta\varphi$.

Методы, алгоритмы, программное обеспечение и тестовые примеры включены в состав информационных ресурсов по фундаментальной проблеме «Статистическая динамика вращения Земли».

9 Заключение

Среди направлений дальнейших исследований следует выделить следующие:

- (1) учет влияния автокоррелированности различных возмущений;

- (2) оценка негауссовости распределений возмущений для оценок больших уклонений по $\delta\varphi$;
- (3) оценивание потенциальной точности. Экстраполяция и интерполяция апостериорных данных измерений;
- (4) оценивание и распознавание возмущений в исходных уравнениях на основе апостериорной информации от нескольких нелинейных измерительных систем различной точности;
- (5) разработка многомерных комплексных статистических моделей вращения Земли, учитывающих флуктуации полюса и неравномерности вращения Земли.

Литература

1. Марков Ю. Г., Рыхлова Л. В., Сеницын И. Н. Развитие методов построения моделей движения полюса Земли // *Астроном. журнал*, 2010. Т. 87. № 9. С. 322–340.
2. IERS Annual Reports, 2000/2002/ Frankfurt am Mein: BKG. 2001/2003); NCEP/NCAR (ftp://ftp/aer.com/).
3. Сидоренков Н. С. Физика нестабильностей вращения Земли. — М.: Наука, Физматлит, 2002. 384 с.
4. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Неравномерности вращения Земли // *ДАН*, 2007. Т. 417. № 4. С. 341–347.
5. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В., Рыхлова Л. В. Внутригодовые неравномерности вращения Земли // *Астроном. журнал*, 2008. Т. 85. № 7. С. 657–664.
6. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Небесномеханическая модель неравномерности вращения Земли // *Космические исследования*, 2009. Т. 47. № 5. С. 452–459.
7. Одуан К., Гино Б. Измерение времени. Основы GPS. — М.: Техносфера, 2002.
8. Сеницын И. Н. Стохастические модели флуктуаций движения Земли в условиях пуассоновских возмущений // *Системы и средства информатики. Спец. вып. Геоинформационные технологии*. — М.: ИПИ РАН, 2004. С. 37–55.
9. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Спектрально-корреляционные и кинетические модели движения Земли // *Астроном. журнал*, 2004. Т. 81. № 2. С. 184–192.
10. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Корреляционная модель приливной неравномерности вращения Земли // *ДАН*, 2008. Т. 419. № 3. С. 338–341.
11. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Теория стохастических систем. — 2-е изд. — М.: Логос, 2004.
12. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Одно- и многомерные распределения флуктуаций неравномерности вращения Земли // *ДАН*, 2009. Т. 428. № 5. С. 616–619.
13. Сеницын И. Н. Методы построения информационных моделей эргодических флуктуаций неравномерности вращения Земли // *Информатика и её применения*, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 2–7.

14. *Синицын И. Н.* Вероятностные методы построения информационных моделей неравномерности вращения Земли // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 4. С. 2–11.
15. *Синицын И. Н.* Квазилинейные методы построения информационных моделей флуктуаций неравномерности вращения Земли // Информатика и её применения, 2008. Т. 2. Вып. 1. С. 35–43.
16. *Марков Ю. Г., Синицын И. Н.* Вероятностные модели флуктуаций неравномерности вращения Земли при нестационарных возмущениях // ДАН, 2010. Т. 432. № 3. С. 1–5.
17. *Синицын И. Н.* Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009.
18. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича, И. Стигана. — М.: Наука, 1979.
19. *Синицын И. Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007.
20. *Синицын И. Н.* Развитие теории фильтров Пугачева для оперативной обработки информации в стохастических системах // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. Вып. 1. С. 3–13.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ НА ОСНОВЕ ФИЛЬТРОВ ПУГАЧЁВА*

Э. Р. Корепанов¹

Аннотация: Дан обзор современного состояния и новых результатов в области теории и практики синтеза нелинейных условно оптимальных фильтров Пугачёва для обработки сигналов в многомерных динамических системах со случайными возмущениями. Описано методическое и инструментальное программное обеспечение «СтС-Фильтр» в среде *MATLAB*.

Ключевые слова: информационные технологии; фильтрация; стохастические системы; фильтры Калмана; фильтры Пугачёва

1 Введение

В 1978 г. В. С. Пугачёв предложил принципиально новый подход в теории нелинейной оптимальной фильтрации, основанный на идее условно оптимальной фильтрации [1–8]. Была разработана теория условно оптимальной (в реальном масштабе времени) фильтрации процессов в стохастических дифференциальных системах.

Полученный метод позволил оценивать не только состояние системы, но и неизвестные параметры в ее уравнениях. Для решения уравнений, определяющих коэффициенты усиления и смещения в дифференциальном уравнении условно оптимального фильтра (фильтра Пугачёва), было использовано уравнение Пугачёва для одномерной характеристической функции. В этом случае все коэффициенты определяются заранее в процессе проектирования фильтра, а не во время его работы. Для синтеза фильтра Пугачёва используется только априорная информация. При практическом применении фильтров Пугачёва необходимо лишь интегрирование дифференциального уравнения фильтра в процессе получения текущей измерительной информации.

В [9–11] метод условно оптимальной фильтрации был распространен на задачи экстраполяции процессов в стохастических дифференциальных системах, в том числе со случайно изменяющейся структурой. В статьях [3, 12–14] В. С. Пугачёвым был разработан метод условно оптимальной фильтрации и экстраполяции для дискретных марковских систем. Публикации [15–18] содержат обобщение этого метода на произвольные марковские системы — как непрерывные, так и дискретные с извест-

ным переходным распределением. Итогом работы В. С. Пугачёва, его учеников и последователей в области прикладной теории стохастических систем (СтС), в том числе фильтрации, экстраполяции и оценивания процессов в таких системах, стала монография [19].

В [20] Пугачёвым предложен метод условно оптимального управления. Применение теории условно оптимальной фильтрации и экстраполяции для управления летными испытаниями летательных аппаратов описано в его статье [21].

В публикации [22] Пугачёвым и Синицыным поставлены задачи теории условно оптимальной фильтрации и экстраполяции применительно к проблемам управления и информатики. В обеспечение поставленных в [22, 23] задач был выполнен ряд важных теоретических исследований для различных классов СтС [17, 24–26] и прикладных работ по алгоритмическому обеспечению синтеза условно оптимальных фильтров Пугачёва [27–29].

В [27–30] Корепановым дано развитие теории дискретной условно оптимальной фильтрации Пугачёва по критерию минимума средней квадратической ошибки для фильтров с памятью относительно наблюдений и оценок в предшествующие моменты времени. Такие фильтры нашли применение, в первую очередь, в задачах фильтрации эргодических СтС.

Теория фильтрации Пугачёва была обобщена в [31, 32] на задачи фильтрации процессов и оценки параметров в непрерывных и дискретных СтС по сложным статистическим критериям, представляющим собой функционалы от математического ожидания и матрицы вторых моментов ошибки оценивания. Примерами таких критериев

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 10-07-00021) и программой фундаментальных исследований ОНИТ РАН «Информационные технологии и методы анализа сложных систем» (проект 1.5).

¹Институт проблем информатики Российской академии наук, E.Korepanov@ipiran.ru

могут служить критерий максимума вероятности попадания вектора ошибки оценивания в заданную область пространства, критерий минимума величины, которую с заданной вероятностью не превзойдет модуль вектора ошибки. Получены уравнения фильтра Калмана по сложному статистическому критерию. Дано обобщение результатов на случай автокоррелированных помех. Полное систематическое изложение теории условно оптимальной фильтрации и оценивания в стохастических дифференциальных и разностных системах в форме обновляющих процессов, а также по сложным статистическим критериям дано в [32]. Особое внимание уделено вопросам синтеза алгоритмов фильтрации с памятью как по наблюдениям, так и по оценкам. Там же рассмотрены возможности применения теории в задачах информатики, автоматизации и управления. В [33] разработана общая теория условно оптимальной фильтрации по байесовым критериям, представляющим собой математическое ожидание от произвольной достаточно гладкой функции потерь. Здесь получены уравнения фильтра Калмана по байесовому критерию. Особое внимание уделено принципам построения условно оптимальных фильтров при наличии ограничений на коэффициенты фильтра. Предложены приближенные приемы решения задачи для негладких функций потерь, основанные на нормальной аппроксимации. Анализ развития теории условно оптимальной фильтрации Пугачёва и ее приложений в период 1978–1993 гг. был дан в [34].

Панкову [35] принадлежат важные результаты по условно-минимаксной нелинейной фильтрации в дискретных и непрерывно-дискретных динамических системах на базе использования методов статистического моделирования. Большое значение для теории условно оптимальной фильтрации и управления имеют работы И. Е. Казакова и его учеников в области синтеза фильтров Пугачёва заданной сложности и условно оптимального управления на основе статистической линеаризации нелинейностей [36]. В 1980–1990-е гг. В. В. Домбровским и его учениками были выполнены работы по синтезу линейных фильтров пониженного порядка. Принципиальное значение для практического применения теории условно оптимальной фильтрации имеют работы Е. А. Руденко [37–39] в области алгоритмического синтеза фильтров конечного порядка и, в частности, оптимального выбора структурных функций фильтра.

Для решения широкого круга задач аналитического и статистического моделирования процессов в многомерных СтС были разработаны эффективные методы структурной параметризации одно- и многомерных распределений, основанные

на канонических разложениях, эллипсоидальной аппроксимации и линеаризации. Однако в середине 1980-х гг. стало понятно, что эффективное исследование сложных нелинейных СтС практически невозможно без разработки принципиально новых подходов к построению программного обеспечения. Классические подходы к анализу динамических систем того времени базировались на хорошо отработанных алгоритмах численного решения дифференциальных уравнений методами Рунге–Кутты 4-го порядка на больших или средних ЭВМ (ЕС-ЭВМ, СМ, *IAX* и т. п.). Однако, чтобы привести нелинейные СтС к виду, пригодному для расчета вероятностных моментов с использованием классических алгоритмов и библиотек, требовался огромный ручной труд по составлению системы дифференциальных уравнений. Даже для небольшой задачи анализа СтС число составляемых уравнений могло достигать сотен, что существенно увеличивало вероятность ошибки при их выводе, а также требовало повторного проведения всей аналитической работы при незначительных изменениях исходной СтС.

Пугачёв с Сеницыным кардинально меняют подход к численному анализу СтС, переориентируясь на появившиеся 8-разрядные (*Yamaha MSX*) и 16-разрядные (*IBM XT*) персональные ЭВМ (ПЭВМ). Несмотря на очень ограниченные вычислительные ресурсы, ПЭВМ предоставляли возможности интерактивной работы, когда исследователь на любом шаге мог проконтролировать состояние вычислительного процесса, моментально внести изменения как в программу, так и в данные. Наличие графических возможностей позволяло непосредственно в момент счета контролировать основные параметры динамических СтС и, самое главное, решить задачу предварительных «символьных вычислений», т. е. по записи исходной системы стохастических дифференциальных уравнений в естественной математической нотации при помощи разработанного специального графического редактора получать автоматически систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вероятностных моментов СтС и сразу же приступать к ее решению и отображению результатов. Интерактивный программный продукт «СтС-Анализ» (1989), совместивший в себе всю совокупность сервисных и вычислительных возможностей, до сих пор используется для вычислительных экспериментов и обучения студентов МАИ и других учебных заведений [19].

Создание программных средств, реализующих методы условно оптимальной фильтрации, представляет собой нетривиальную задачу. Сложность задачи заключается в том, что программное обес-

печение должно автоматически по исходным нелинейным стохастическим уравнениям объекта и измерительной системы составлять и решать систему уравнений высокого порядка для определения неизвестных параметров распределения переменных состояния и их оценок, а также вычислять коэффициенты условно оптимального фильтра.

Особенно важным интерактивный режим работы становится при решении задач синтеза условно оптимальных фильтров Пугачёва (пакет «СтС-Фильтр», 1991) [19, 40], так как одним из факторов, повышающих их точность, становится выбор структуры фильтра. Возможность провести за несколько часов десятки экспериментов с фильтрами разной структуры и очень наглядным графическим отображением результатов позволяла исследователю почувствовать предметную область, особенности поведения СтС, выделить направления оптимизации структуры фильтра.

Подход, ориентированный на использование ПЭВМ с интерактивным режимом работы и отличной графикой для решения подобных проблем, оказался провидческим. В скором времени была решена и проблема производительности — с начала 1990-х гг. широкое распространение получают высокопроизводительные параллельные 32-разрядные транспьютерные вычислители на базе технологий британской фирмы *INMOS*. Конструктивно платы с несколькими транспьютерами размещались в корпусе ПЭВМ типа *IBM PC AT* и выполняли роль супервычислителя. При этом обычная ПЭВМ, оснащенная транспьютерным ускорителем с 4–8 транспьютерами серии T400, по быстродействию превосходила лучшие отечественные ЕС-ЭВМ. В это время особое внимание уделяется методам и алгоритмам параметризации распределений в многомерных нелинейных СтС, допускающих эффективное распараллеливание, завершающееся созданием библиотек *TransStatLib* (1991–1993) и *NaLib* (1991–1993).

В дальнейшем разработанные методы анализа и синтеза СтС были использованы для решения практических задач на супер-ЭВМ с параллельной архитектурой [18, 30, 40].

Таким образом, в ИПИ РАН создано богатое инструментальное, предметно-ориентированное программное обеспечение анализа и обработки информации: «СтС-Анализ», «СтС-Фильтр», «СтС-Модель», *NaLib*, *TransStatLib*, нашедшее широкое применение в науке и технике (*CAD/CAM/CAE* технологии, калибровка прецизионных приборов и систем, автоматизация научных исследований).

Целью статьи является изложение методов, алгоритмов и инструментального программного обеспечения стохастических информационных техно-

логий (ИТ) на основе фильтров Пугачёва, разработанных в ИПИ РАН за последнее время.

2 Новые результаты в теории синтеза фильтров Пугачёва

Широкий класс дискретных СтС (ДСтС) описывается стохастическими разностными уравнениями вида

$$X_{n+1} = \omega_n(X_n, V_n, \varepsilon), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $X_n = X(n)$ — вектор состояния размерности p ДСтС в момент времени t_n ; $\omega_n = \omega(n, X_n, V_n)$ — известная векторная функция вектора состояния X_n и шума V_n ; $\{V_n\}$ — последовательность независимых случайных величин (СВ) с известным распределением, независимых от начального значения $X(0)$ вектора состояния X_n . Этот класс охватывает все ДСтС, генерирующие марковские случайные последовательности [7, 8, 19, 41], ε — числовой параметр. При $\varepsilon \ll 1$ ДСтС называется регулярной, а при $\varepsilon \gg 1$ — сингулярной.

Часто встречаются авторегрессионные ДСтС, для которых функция ω_n является линейной функцией V_n , т. е.

$$X_{n+1} = a_n(X_n, \varepsilon) + b_n(X_n, \varepsilon)V_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Здесь $a_n = a_n(X_n, \varepsilon)$ и $b_n = b_n(X_n, \varepsilon)$ — известные функции, $a_n : R \times R^p \rightarrow R^p$; $b_n : R \times R^p \rightarrow R^{pr}$, $p = \dim X_n$, $r = \dim V_n$.

К уравнению в форме (1) приводятся также ДСтС, для которых СВ V_n в (1) зависимы, при условии, что они определяются стохастическим разностным уравнением

$$V_{n+1} = \omega'_n(V_n, W_n, \varepsilon) \quad (3)$$

относительно последовательности СВ $\{W_n\}$, независимых от случайной величины $V(0)$. Уравнения (1) и (3) в данном случае представляют собой уравнения типа (1) для расширенного вектора состояния $[X_n^T V_n^T]^T$.

В случае, когда функция ω_n в уравнении (1) зависит от конечномерного случайного параметра θ , ($\omega_n = \omega_n(X_n, V_n, \varepsilon, \theta)$) вводится последовательность СВ $\{\Theta_n\}$, $\Theta_n = \theta$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. В результате получаем следующую систему стохастических разностных уравнений:

$$X_{n+1} = \omega_n(X_n, V_n, \Theta_n, \varepsilon), \quad \Theta_{n+1} = \Theta_n. \quad (4)$$

Включая вектор Θ в вектор состояния X_n , приведем уравнение (4) к стохастическому разностному уравнению в форме (1).

Иногда приходится встречаться со стохастическими разностными уравнениями в форме (1), в которых функция ω_n является нормальной случайной функцией вектора состояния X_n и времени n . В этом случае уравнение (1) можно записать в форме:

$$X_{n+1} = \Omega_n(X_n, V_n, \varepsilon), \quad (5)$$

где $\Omega_n = \Omega_n(X_n, V_n)$ — некоторая нормально распределенная случайная функция вектора состояния и времени. Уравнение (5) с любой степенью точности может быть приведено к уравнению (1). Для этого представим случайную функцию Ω_n в некоторой достаточной большой области \mathfrak{D} , $X_n \in \mathfrak{D}$ в виде канонического разложения [8]:

$$\begin{aligned} \Omega_n(X_n, V_n, \varepsilon) &= \\ &= \Omega_{0n}(X_n, V_n, \varepsilon) + \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_{in}(X_n, V_n, \varepsilon) \Theta_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\Omega_{0n}(X_n, V_n)$ и $\Omega_{in}(X_n, V_n)$ — известные функции; $\{\Theta_i\}$ — последовательность независимых нормально распределенных скалярных СВ с нулевыми математическими ожиданиями и известными дисперсиями, независимых от начального состояния $X(0)$. Взяв первые N членов в сумме (6), сведем задачу к уже рассмотренному случаю стохастического разностного уравнения с конечномерным случайным векторным параметром $\Theta^{(N)} = [\Theta_1 \dots \Theta_N]^T$ с известным распределением. В [8] получено обобщение для негауссовых случайных функций.

В общей постановке задачи оперативной условно оптимальной фильтрации, а также оценивания неизвестных параметров рассмотрены в [7, 16, 19, 40]. Приведем сначала постановку задач условно оптимальной фильтрации и оценивания неизвестных параметров (идентификации) в наиболее важном для практики случае ДСтС вида (2) и дискретного условно оптимального фильтра, линейного относительно наблюдений на основе методов параметризации распределений, например нормальной аппроксимации и эквивалентной линейризации моментов, квазимоментов, семиинвариантов, ортогональных разложений [7, 19, 42].

Рассмотрим ДСтС, описываемую разностным уравнением (2). Предположим, что наблюдается последовательность случайных векторов $\{Y_n\}$:

$$Y_n = a_{1n}(X_n, \varepsilon) + b_{1n}(X_n, \varepsilon)V_n, \quad (7)$$

где Y_n — вектор наблюдений; $\{W_n\}$ — последовательность случайных векторов (ошибки наблюдений) с известным распределением; $a_{1n} = a_{1n}(X_n)$ и $b_{1n} = b_{1n}(X_n)$ — известные функции; $a_{1,n} :$

$R \times R^p \rightarrow R^m$, $b_{1,n} : R \times R^p \rightarrow R^{mr}$, $m = \dim Y_n$, $r = \dim (V_n, W_n)$. Примем, что начальное значение $[X_0^T Y_0^T]^T$ не зависит от последовательностей $\{V_n\}$ и $\{W_n\}$; $\{V_n\}$ и $\{W_n\}$ — независимые последовательности случайных векторов. Требуется определить оптимальную оценку \hat{X}_n вектора состояния X_n в классе функций наблюдаемых величин Y_1, \dots, Y_n , определяемых следующим разностным уравнением фильтра Пугачёва:

$$\hat{X}_{n+1} = \alpha_n \xi_n(\hat{X}_n, \varepsilon) + \beta_n \eta_n(\hat{X}_n, \varepsilon) Y_n + \gamma_n. \quad (8)$$

Здесь $\xi_n = \xi_n(\hat{X}_n)$ и $\eta_n = \eta_n(\hat{X}_n)$ — заданные матричные структурные функции фильтра; $\alpha_n = \alpha(n)$, $\beta_n = \beta(n)$, $\gamma_n = \gamma(n)$ — неизвестные матрицы (коэффициенты фильтра), определяемые при каждом n из условия минимума среднего квадрата ошибки (с. к. о.):

$$I_{h+1} = M \left(\hat{X}_{n+1} - X_{n+1} \right)^T \left(\hat{X}_{n+1} - X_{n+1} \right) \quad (9)$$

при известных значениях $\alpha_l = \alpha(l)$, $\beta_l = \beta(l)$, $\gamma_l = \gamma(l)$ для $l < h$ в случае, если совместное распределение $[X_n^T \hat{X}_n^T]^T$ аппроксимировано распределением параметризованной структуры.

В теории условно оптимальной фильтрации по критерию минимума с. к. о. фильтр, определяемый (8), называется условно оптимальным фильтром или фильтром Пугачёва (ФП). Фильтр Пугачёва, предназначенный для оценки параметров, называется условно оптимальным идентификатором [7, 40]. Фильтр Пугачёва, основанный на теории параметризации распределений, назовем параметризованным фильтром Пугачёва (ПФП), в отличие от непараметризованного фильтра Пугачёва [30].

Рассмотрим случай регулярных разностных стохастических уравнений, описывающих состояние, наблюдение и ПФП. Тогда оптимальные (в смысле минимума с.к.о.) значения коэффициентов $\alpha_l = \alpha(l)$, $\beta_l = \beta(l)$, $\gamma_l = \gamma(l)$ в (8) при $W_n = V_n$ определяются следующей системой линейных уравнений:

$$\alpha_n k_{11}^{(n)} + \beta_n k_{21}^{(n)} = k_{01}^{(n)}; \quad \alpha_n k_{12}^{(n)} + \beta_n k_{22}^{(n)} = k_{02}^{(n)}; \quad (10)$$

$$\gamma_n = l_0^{(n)} - \alpha_n l^{(n)} - \beta_n l_2^{(n)}. \quad (11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$m_{n+1} = l_0^{(n)} = M a_n(X_n); \quad (12)$$

$$l_1^{(n)} = M \xi_n(\hat{X}_n); \quad (13)$$

$$l_2^{(n)} = M \eta_n(\hat{X}_n) a_{1n}(X_n); \quad (14)$$

$$k_{11}^{(n)} = M \left[\xi_n(\hat{X}_n) - l_1^{(n)} \right] \xi_n(\hat{X}_n)^T; \quad (15)$$

$$k_{12}^{(n)} = [k_{21}^{(n)}]^T = M \left[\xi_n (\hat{X}_n) - l_1^{(n)} \right] a_{1n} (X_n)^T \eta_n (\hat{X})^T; \quad (16)$$

$$k_{22}^{(n)} = M \left[\eta_n (\hat{X}_n) a_{1n} (X_n) - l_2^{(n)} \right] a_{1n} (X_n)^T \eta_n (\hat{X}_n)^T + M \eta_n (\hat{X}_n) b_{1n} (X_n) G_n b_{1n} (X_n)^T \eta_n (\hat{X}_n)^T; \quad (17)$$

$$\det \begin{bmatrix} k_{11}^{(n)} & k_{12}^{(n)} \\ k_{21}^{(n)} & k_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \neq 0; \quad (18)$$

$$k_{01}^{(n)} = M [a_n (X_n) - m_{n+1}] \xi_n (\hat{X}_n); \quad (19)$$

$$k_{02}^{(n)} = M [a_n (X_n) - m_{n+1}] a_{1n} (X_n)^T \eta_n (\hat{X}_n)^T + M b_n (X_n) G_n b_{1n} (X_n)^T \eta_n (\hat{X}_n)^T, \quad (20)$$

где G_n — ковариация шума V_n . Необходимое для расчетов по формулам (14)–(20) совместное одномерное распределение $[X_n^T \hat{X}_n^T]^T$ находится по формулам теории параметризации распределений [19, 42].

Предложение 1 [7, 16]. Пусть векторная последовательность $\{[Y_n^T X_n^T]^T\}$ удовлетворяет регулярным нелинейным авторегрессионным уравнениям (2) и (7). Тогда оптимальные по критерию минимума с.к.о. значения матричных коэффициентов смещения γ_n регулярного ПФП (18) определяются уравнениями (10) и (11) при условиях (12)–(20).

Если векторная последовательность описывается уравнениями (1) и

$$Y_n = \omega_{1n} (X_n, W_n, \varepsilon), \quad (21)$$

тогда регулярный ПФП следует принять в виде:

$$\hat{X}_{n+1} = \delta_n \zeta_n (\hat{X}_n, Y_n, \varepsilon) + \gamma_n. \quad (22)$$

Входящие сюда структурная функция $\zeta_n = \zeta_n (\hat{X}_n, Y_n)$ и коэффициенты δ_n и γ_n определяются из следующих уравнений:

$$\delta_n K_n = L_n; \quad (23)$$

$$\gamma_n = m_n - \delta_n l_n, \quad (24)$$

где

$$L_n = M \zeta_n (\hat{X}_n, Y_n); \quad (25)$$

$$K_n = M \left[\zeta_n (\hat{X}_n, Y_n) - l_n \right] \zeta_n (\hat{X}_n, Y_n)^T; \quad (26)$$

$$\det |K_n| \neq 0; \quad (27)$$

$$m_n = M X_{n+1} = M \omega_n (X_n, V_n); \quad (28)$$

$$L_n = M (X_{n+1} - m_n) \zeta_n (\hat{X}_n, Y_n). \quad (29)$$

При этом совместное одномерное распределение $[X_n^T \hat{X}_n^T]^T$ находится по формулам теории параметризации распределений [19, 42].

Предложение 2 [7, 16]. Пусть векторная последовательность $\{[Y_n^T X_n^T]^T\}$ нелинейной ДСтС удовлетворяет регулярным нелинейным регрессионным уравнениям (1), (21). Тогда оптимальные по критерию минимума с.к.о. значения коэффициентов δ_n и γ_n регулярного ПФП (22) определяются уравнениями (23) и (24) при условиях (25)–(29).

В качестве характеристики точности фильтрации обычно принимается начальный момент второго порядка или с.к.о.:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n &= M \left(\hat{X}_n^T - X_n^T \right) \left(\hat{X}_n - X_n \right) = R_n; \\ R_n &= M \left(\hat{X}_n - X_n \right) \left(\hat{X}_n - X_n \right)^T. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Если в условиях предложений 1 и 2 предположить, что нелинейные функции допускают эквивалентную линейризацию, тогда в силу линейности уравнений можно формально воспользоваться основными уравнениями линейной теории фильтрации, например фильтрацией Калмана–Бьюси [7, 19, 40–43].

Таким образом, линейризованные уравнения (2) и (7) при b_n и b_{1n} , не зависящих от X_n , будут иметь следующий вид:

$$X_{n+1} = \bar{\alpha}_{0,n}^a + \bar{\alpha}_{1,n}^a X_n + b_n V_n; \quad (31)$$

$$Y_n = \bar{\alpha}_{0,n}^{a_1} + \bar{\alpha}_{1,n}^{a_1} X_n + b_{1,n} V_n. \quad (32)$$

Здесь

$$\bar{\alpha}_{0,n}^a = \alpha_{0,n}^a - \alpha_{1,n}^a m_n^x; \quad \bar{\alpha}_{0,n}^{a_1} = \alpha_{0,n}^{a_1} - \alpha_{1,n}^{a_1} m_n^x; \quad (33)$$

$\alpha_{0,n}^a, \alpha_{0,n}^{a_1}, \alpha_{1,n}^a, \alpha_{1,n}^{a_1}$ — коэффициенты эквивалентной линейризации линейных функций a_n и $a_{1,n}$, зависящие от неизвестных первых и вторых моментов и известных параметров c_1 совместного параметризованного распределения X_n и \hat{X}_n [7, 19, 40].

Применяя линейную теорию фильтрации, приходим к следующей системе уравнений, определяющей линейризованный ПФП:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= \\ &= \alpha_{1,n}^a \hat{X}_n + \bar{\alpha}_{0,n}^a + \beta_n (Y_n - b_n \hat{X}_n - \bar{\alpha}_{1,n}^{a_1}); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\beta_n = (\alpha_{1,n}^a R_n b_n^T + b_n G_n b_{1,n}^T)(b_n R_n + b_{1,n} G_n b_{1,n}^T)^{-1}; \quad (35)$$

$$R_n = K_{X_n} - K_{\hat{X}_n} = (\alpha_{1,n}^a - \beta_n b_n) R_n (\alpha_{1,n}^a)^T + (b_n - \beta_n b_{1,n}) G_n b_n^T \quad (36)$$

при условии

$$\det |b_n R_n - b_{1,n} G_n b_{1,n}^T| \neq 0. \quad (37)$$

Предложение 3 [36]. *В условиях предложения 1 при аддитивных шумах $b_n V_n$ и $b_{1,n} V_n$ и функциях a_n и $a_{1,n}$, допускающих эквивалентную линеаризацию, уравнения линеаризованного регулярного ПФП имеют вид (34)–(36) при условии (37).*

Так как задача нахождения совместного распределения X_n и \hat{X} (в предположении его существования) всегда может быть решена методами параметризации распределений для любых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ или $\{\delta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, то при синтезе регулярного ПФП точность оценивания любым допустимым фильтром (идентификатором) на каждом шаге будет определяться согласно (30) или доверительными областями. Возможность априорной оценки точности является важным преимуществом методов условно оптимальной фильтрации (идентификации) по сравнению с методами субоптимального оценивания [7, 19].

В [7, 8, 19] описаны методы синтеза ПФП на основе методов субоптимальной фильтрации. Новые возможности открывают уравнения субоптимальной фильтрации на базе использования уравнения Закай–Уонхэма для ненормированной характеристической функции. Показано, что если выбирать структурные функции ПФП так, чтобы класс допустимых ПФП содержал произвольно заданный субоптимальный фильтр, то ПФП всегда будет точнее заданного субоптимального фильтра. Выбрав в качестве компонент функций ξ_n , $\eta_n(\zeta_n)$ конечный отрезок некоторого базиса в соответствующем гильбертовом пространстве L_2 , можно получить приближение с любой степенью точности к неизвестным оптимальным функциям ξ , $\eta(\zeta)$ при условиях предложений 1–3. Такой подход к выбору классов оказывается весьма эффективным в задачах синтеза адаптивных и гибридных фильтров Пугачёва.

Вопрос выбора структурных функций регулярного ПФП в общем случае остается открытым. В прикладных задачах структуру регулярного ПФП обычно выбирают из следующих соображений:

- близости структур уравнений нелинейной динамической системы к структуре регулярного ПФП;

- на основе уравнений субоптимальной фильтрации;
- с учетом качества синтезируемых регулярных ПФП (устойчивости, чувствительности, грубости и др.).

В [40, 44, 45] рассмотрены методы синтеза эллипсоидальных фильтров Пугачёва.

При синтезе регулярного ПФП используется только априорная информация. Она включает, во-первых, уравнение предполагаемой модели динамической системы, для которой эта модель строится; во-вторых, характеристики измерительных устройств, применяемых при наблюдениях (измерениях) функционирования системы, определяющие уравнения формирования наблюдаемой последовательности величин; в-третьих, распределение СВ в уравнении системы и в уравнении ошибок наблюдений.

Методы синтеза фильтров Калмана и Пугачёва на основе канонических разложений и интегральных канонических представлений случайных функций разработаны в [46–51].

В [41, 52–54] для ДСтС высокой размерности с сингулярными возмущениями удалось декомпозировать уравнения ПФП на «быстрые» и «медленные» компоненты и тем самым сократить объем вычислений за счет того, что для «медленных» переменных приходится решать не разностные уравнения, а конечные. Получены аналоги предложений 1–3 для «быстрых» и «медленных» компонент в нелинейных ДСтС, а также уравнения сингулярных дискретных фильтров Калмана для линейных нестационарных ДСтС. Разработана теория синтеза сингулярных линейных формирующих фильтров. Для нелинейных ДСтС, описывающих типовые сингулярные системы массового обслуживания разработаны методы синтеза сингулярных ПФП на основе принципов нормализации и эллипсоидализации распределений.

Ряд интересных подходов к синтезу структурных функций ПФП для различных архитектур вычислительных систем, учитывающих адаптацию и обучение, рассмотрен в [55–68].

3 Информационные технологии быстрого исследования нелинейных стохастических систем

Центральной задачей быстрого (оперативного) исследования СтС является задача построения адекватных стохастических моделей реальных систем.

Решение этой задачи неизмеримо усложняется в силу того, что, во-первых, статистическому оцениванию и идентификации подлежат не только параметры в уравнениях, их порядок и структура, но и статистические характеристики действующих на систему внешних и внутренних случайных возмущений и, во-вторых, необходимо проведение быстрого исследования в темпе поступления данных.

Для быстрого оценивания текущего состояния и параметров СтС и оценивания будущих состояний СтС в реальном масштабе времени применяются оптимальные и субоптимальные методы, основанные на упрощении уравнений нелинейной фильтрации (фильтр метода нормальной аппроксимации, обобщенный фильтр Калмана–Бьюси, фильтры второго порядка и др.). Стремление получить практически реализуемые фильтры в задачах большой размерности приводит к теории условно оптимальной фильтрации Пугачёва. Теория фильтрации Пугачёва лежит в основе ряда быстрых методов построения математических моделей по экспериментальным и статистическим данным в реальном масштабе времени.

Следуя [69], введем понятие «обработки» информационных процессов. В настоящее время в понятие «обработка информационных процессов с помощью ЭВМ» вкладывается более широкий смысл, чем в традиционный термин «цифровая обработка сигналов». Последний обычно означает преобразование одного сигнала в другой с использованием математических методов, реализованных на ЭВМ. Современное понятие «обработки» информационных процессов с помощью ЭВМ предполагает взаимозависимое в рамках единой технологии решение комплекса методологических, алгоритмических и технических вопросов, обеспечивающих возможность использования информационных процессов для решения разнообразных практических задач [69]. Такое понимание «обработки» с помощью ЭВМ позволяет выделить общие аспекты решения задач, связанных с обработкой информационных процессов, и более четко сформулировать понятие ИТ исследования СтС как эффективных средств решения таких задач. Кроме того, это дает возможность создать единую теоретическую и практическую базу для таких направлений обработки информационных процессов, как «обработка сигналов», «распознавание и понимание сигналов», которые обычно рассматривались независимо.

В современной литературе по теории и практике обработки информационных процессов существуют различные варианты классификации задач, которые преследуют различные цели. Если стремиться к соответствию между принципами класси-

фикации и возможностью эффективной реализации задач статистических исследований на основе ИТ, то, следуя [69], представляется целесообразным различать три класса задач обработки информационных процессов: синтез, преобразование и анализ. В рамках этих трех классов имеет смысл выделить типовые, часто встречающиеся задачи обработки, ориентируясь на практическую их реализацию в виде соответствующей ИТ. Такая типизация становится особенно необходимой при создании персональных ИТ, ориентированных на использование массовых ЭВМ и, в первую очередь, ПЭВМ.

Под ИТ обычно понимают совокупность систематических и массовых способов создания, накопления, обработки, хранения, передачи и распределения информации (данных, знаний) с помощью средств вычислительной техники и связи [70].

На практике обычно создается ИТ, рассчитанная на выполнение с ее помощью некоторой основной функции, что связано с необходимостью решения нескольких типовых задач статистических исследований. Перечень основных функций довольно ограничен; с другой стороны, выполнение этих функций может потребоваться во многих применениях. Это делает целесообразным выделение функционально-ориентированных, предметно-ориентированных и проблемно-ориентированных ИТ.

Функционально-ориентированные ИТ предназначены для реализации типовых, относительно автономных задач исследования СтС. Такие ИТ могут обладать довольно высокой степенью универсальности и быть доступными для разработки и воспроизводства при минимальном участии будущего пользователя.

Предметно-ориентированные ИТ предназначены для решения специфической задачи статистических исследований в конкретной области. Они максимальным образом удовлетворяют частным требованиям данного применения и могут обладать наименьшей степенью универсальности. Как правило, их появление невозможно без будущего пользователя.

Часто удается обобщить требования со стороны ряда конкретных приложений и выделить некоторые общие прикладные проблемы исследований СтС. Отсюда возникает понятие проблемно-ориентированной ИТ, которая занимает промежуточное положение между функционально-ориентированной и предметно-ориентированной ИТ. Потенциальные пользователи такой ИТ статистических исследований могут принять участие в ее разработке только на начальной стадии обобщения и типизации конкретных задач или конечной стадии при разработке некоторых специальных дополне-

ний. Это позволяет основную часть ИТ создавать автономно от пользователя и применять унифицированные программные и технические решения.

К функционально-ориентированным ИТ исследования информационные процессы в СтС относятся, например, ИТ вычисления:

- математических ожиданий, дисперсий, ковариаций, коэффициентов корреляции, моментов и квазимоментов различных порядков для каждого момента времени;
- ковариационных и взаимных ковариационных функций (спектральных и взаимных спектральных плотностей для стационарных СтС), моментов и квазимоментов различных порядков для различных моментов времени;
- одномерных распределений (плотностей, характеристических функций и функционалов, доверительных областей) для каждого момента времени;
- многомерных распределений (плотностей, характеристических функций и функционалов, доверительных областей) для различных моментов времени и т. д.

К проблемно-ориентированным ИТ могут быть отнесены, например, следующие:

- анализ качества (точности, чувствительности, быстродействия, устойчивости, помехозащищенности, надежности);
- фильтрация, интерполяция, экстраполяция, реставрация и редактирование информационных процессов;
- кодирование и декодирование, компрессия и декомпрессия информационных процессов;
- идентификация и построение математических моделей, распознавание и понимание информационных процессов;
- оптимизация параметров, структуры, синтез оптимальных систем управления исследованиями и др.

Примерами предметно-ориентированных ИТ статистических исследований могут служить технологии:

- научных исследований и профессионального образования;
- автоматизированного проектирования и испытаний;
- медицинских систем, здравоохранения и экологии;
- систем экономических, социально-экономических, финансовых, банковских и других расчетов.

Использование ПЭВМ для реализации ИТ исследования СтС определяет такие новые специфические (персональные) свойства технологии исследования СтС, как интерактивность, доступность для пользователя, не являющегося профессионалом в области информатики и теории СтС, относительная универсальность, сбалансированные технико-экономические показатели. При этом ИТ должны обладать такими свойствами, как диалоговая реактивность, тиражируемость, приспособляемость к конкретной задаче, возможность создания банков информации (данных и знаний), самостестированность, унифицированность программных и аппаратных средств, защищенность от некорректных действий оператора и др.

4 Этапы создания информационных технологий для быстрой обработки информации в регулярных и сингулярных стохастических системах

Для того чтобы создать достаточно эффективную ИТ синтеза фильтров Пугачёва, необходимо провести тщательный анализ этапов решения задачи по созданию систем обработки результатов измерений в реальном масштабе времени. Яркими примерами областей применения таких систем могут служить наземные и бортовые системы измерения и управления летательных аппаратов [71–73].

Анализ практического опыта создания систем такого рода позволяет выделить характерные этапы разработки. При этом предполагается, что началу следующего этапа предшествует успешное завершение предыдущего. При неудаче на определенном этапе анализируются ее причины и происходит возврат к одному из предшествующих этапов разработки и выбор других решений. Выделим 8 основных этапов [40].

Этап 1. Постановка задачи. На данном этапе коллектив разработчиков получает задачу по созданию фильтра для быстрой обработки информации, а также исходные данные для ее решения. Исходные данные должны содержать общие характеристики объекта и измерительных устройств, данные о возможностях вычислительных устройств обработки информации в реальном времени. В состав исходных данных также включаются тактико-технические требования на разрабатываемую систему

быстрой обработки, в том числе требования по точности, скорости, сложности и надежности. Крайне желательным элементом исходных данных служит доступная экспериментальная информация, полученная в ходе функционирования объекта и измерительных устройств. Однако это возможно только в тех случаях, когда задача создания системы быстрой обработки решается после создания реального объекта, а не в ходе его проектирования. Дополнительными данными, существенно влияющими на последующие этапы разработки, являются организационные вопросы, такие как сроки разработки, количество и квалификация специалистов, наличие необходимых вычислительных мощностей для решения задачи и др.

Этап 2. Построение адекватной математической модели объекта и измерительных устройств. На этом этапе делается попытка построения математической модели реального объекта, а также используемых измерительных устройств. Построенная таким образом модель может содержать большое число параметров, связанных между собой уравнениями различного типа. При этом основной целью данного этапа является построение именно адекватной модели без учета жестких требований к ее структуре. К сожалению, непосредственная проверка достоверности математической модели чаще всего сделана быть не может, и поэтому требуется выполнение следующего этапа.

Этап 3. Построение компьютерной модели рассматриваемого объекта. Для проверки адекватности математической модели, созданной на предыдущем этапе, строится соответствующая ей компьютерная модель (программа) и проводятся необходимые вычислительные эксперименты. На этом этапе для сравнения привлекаются экспериментальные данные.

Этап 4. Выбор метода быстрой обработки результатов измерений (фильтрации). Учитывая полученные на этапе 1 исходные данные, сложность и структуру математической модели, полученной на втором этапе, возможности вычислительной техники, разработчик выбирает наиболее подходящий класс фильтров, а также методы построения фильтров выбранного класса.

Этап 5. «Подгонка» математической модели. В большинстве случаев математическая модель объекта и измерительных устройств, разработанная на втором этапе, не «попадает» под требования классических постановок задач фильтрации и, соответственно, не позволяет использовать отработанные методы их решения. Поэтому требуется приведение математической модели к виду, пригодному

для решения задачи фильтрации, но с сохранением ее адекватности. Типичным примером такой модификации может служить замена системы дифференциальных уравнений системой разностных уравнений. Во многих случаях путем введения дополнительных переменных удастся упростить (унифицировать) типы уравнений.

Этап 6. Решение задачи синтеза фильтра. На этом этапе путем проведения математических выкладок исходная система уравнений приводится к системе уравнений для вероятностных характеристик и коэффициентов фильтра. Далее с использованием одного из приближенных аналитических методов проводится так называемое замыкание системы уравнений, т. е. неизвестные характеристики, присутствующие в правых частях уравнений, выражаются по определенным правилам через известные. Например, вероятностные моменты высоких порядков путем применения рекуррентных соотношений выражаются через моменты низших порядков. Таким образом получается система уравнений, пригодная для проведения численных расчетов. Далее происходит последовательное вычисление всех необходимых характеристик и коэффициентов фильтра на каждом шаге.

Этап 7. Вычислительные эксперименты по проверке фильтров. После того как проведены основные расчеты, связанные с нахождением коэффициентов фильтра, целесообразно провести вычислительные эксперименты по моделированию и анализу результатов фильтрации. При этом имеет смысл также проверить помехоустойчивость синтезированного фильтра.

Этап 8. Создание базы данных (знаний) и информационных ресурсов по типовым фильтрам. Накопленный опыт как успешного решения поставленной задачи, так и неудачных реализаций фильтров следует документировать с указанием основных проблем, а также использованных методов решения.

5 Основные подходы к синтезу инструментального программного обеспечения для фильтров Пугачёва

С точки зрения ИТ наибольший интерес представляет этап 6 — синтез фильтра, тесно связанный с особым применением средств вычислительной техники. Для того чтобы понять особенности реализации изложенных в разд. 3 алгоритмов синтеза

ПФП в виде ИТ, необходимо рассмотреть общие принципы реализации методов фильтрации в реальном масштабе времени в вычислительных системах.

Можно сформулировать два основных подхода к ИТ синтеза фильтров:

- (1) создание библиотек фильтрационных подпрограмм для различных языков программирования, таких как *Fortran*, *C*, *C++*, *Pascal*;
- (2) создание самостоятельных диалоговых пакетов.

Для задачи линейной фильтрации используются обе ИТ, причем предпочтение оказывается библиотечному варианту (например, библиотека *NaLib*). Также имеются эффективные диалоговые пакеты решения задачи анализа и синтеза линейных СтС (пакет *LCOFC*). Коренным образом ситуация меняется при переходе от линейных к нелинейным СтС. Для понимания этого отличия необходимо рассмотреть типовой способ использования библиотек пользователем. Например, для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений пользователь должен:

- создать подпрограмму (функцию), вычисляющую правые части системы дифференциальных уравнений по имеющимся в данный момент времени значениям переменных. При этом совершенно не важно, каким образом пользователь будет вычислять правые части уравнений и какую структуру они имеют. Специфицируется только число и порядок входных параметров;
- создать на каком-либо языке основную программу, обеспечивающую ввод начальных значений переменных состояния системы, организацию итерационного процесса по времени и вывод результатов расчетов. Внутри временного цикла размещаются вызовы библиотечной подпрограммы, осуществляющей вычисление необходимых характеристик, например подпрограммы методов Рунге–Кутты. При этом в качестве параметра для библиотечной подпрограммы передается имя функции пользователя, осуществляющей вычисление правых частей системы уравнений;
- произвести компиляцию программы, подключение библиотеки и запуск исполняемого модуля.

Таким образом, библиотечная программа работает с функцией вычисления правых частей как с «черным ящиком», что следует из специфики

используемого численного метода. В случае решения задачи анализа СтС и синтеза ПФП требуется решать не исходную систему уравнений, а систему уравнений, полученную путем достаточно сложного аналитического вывода из исходной системы. Для линейных СтС, в которых уравнения полностью определяются набором матриц, не зависящих от значений переменных состояния, такой вывод сводится к набору матричных операций, для нелинейных СтС в общем случае такая задача не решается. Причем по трудоемкости сам вывод уравнений может составлять от 80% до 99% всей проделанной работы и, конечно, ИТ должна прежде всего решать эту задачу. В этой ситуации использование библиотечного подхода крайне затруднено. Библиотечный подход для работы с нелинейными СтС может быть практически использован в двух случаях. Во-первых, когда по смыслу допускается линеаризация исходной СтС и, во-вторых, когда вычисление необходимых вероятностных характеристик осуществляется методом статистического моделирования. Оба случая хорошо проработаны и имеют ряд практических реализаций. Во всех остальных случаях использование библиотечного подхода к созданию ИТ оказывается крайне неэффективным и необходимо создание диалоговых пакетов прикладных программ (ППП), реализующих основные операции анализа нелинейных СтС и решения задачи синтеза ПФП.

Оба подхода хорошо проработаны и имеют множество практических реализаций. Во всех остальных случаях использование библиотечного подхода к созданию ИТ оказывается крайне неэффективным. Поэтому необходимо создание диалоговых ППП, реализующих основные операции анализа нелинейных СтС и решения задачи синтеза ПФП.

6 Особенности критериев оценки пакетов синтеза параметризованных фильтров Пугачёва в сингулярных стохастических системах

Развивая [30, 40], сформулируем критерии, по которым можно классифицировать как созданные, так и возможные в будущем пакеты.

1. Степень полноты пакета. Степень полноты пакета служит, по-видимому, одной из важнейших характеристик и оказывает существенное влияние на все остальные признаки. Можно разделить все пакеты на две группы: полные и неполные пакеты.

Полные (замкнутые) пакеты содержат все необходимые инструментальные средства для синтеза фильтров Пугачёва и не требуют дополнительных инструментальных средств, например таких, как компиляторы языков высокого уровня. Полный пакет, по-видимому, должен содержать следующие компоненты:

- редактор для ввода исходных данных (уравнений объекта, измерителя, класса фильтров, а также начальных условий);
- подсистему формирования уравнений для решения на основе исходных данных;
- решающую подсистему;
- подсистему выдачи результатов.

Далее критерии наличия таких подсистем (модулей) будут рассмотрены отдельно.

Неполные пакеты реализуют только некоторые элементы ИТ проектирования, например построение систем уравнений, возлагая решение остальных элементов на другие инструментальные средства (компиляторы языков высокого уровня совместно с математическими библиотеками или математические пакеты общего назначения типа *MATLAB*, *Mathematica* и т. д.).

Среди достоинств полных (замкнутых) пакетов, прежде всего, можно отметить их автономность и легкость использования, так как, во-первых, от конечного пользователя не требуется знание дополнительных программных средств и, во-вторых, полные пакеты оптимизированы для решения конкретной задачи. Однако у полных пакетов есть один существенный и распространенный недостаток — они практически не позволяют пользователю каким-либо образом модифицировать пакет, т. е. вносить изменения в методы решения задач. Неполные пакеты, напротив, часто поставляются в исходных кодах той среды, в которой они выполняются, и позволяют в принципе (с учетом соблюдения авторских прав) модифицировать алгоритмы расчетов с учетом нюансов решения той или иной задачи, а также вмешиваться в процесс решения задачи на любом этапе. Но основной недостаток таких пакетов — сложность использования, вызванная необходимостью предварительного освоения среды выполнения.

2. Способ ввода исходных данных (уравнений). Данный критерий является одним из важных элементов удобства использования пакета.

Ввод уравнений в естественном виде. В этом случае с помощью специального редактора с графическими или псевдографическими возможностями вводятся уравнения с использованием общепринятой математической нотации, т. е. обеспечивается

ввод индексов переменных, показателей степени на общепринятых позициях. Уравнения записываются без лишних знаков операций (например, опускаются знаки умножения) и с обозначениями функций, принятыми в печатных изданиях. Такой способ работы становится общепринятым в современных математических пакетах, выполняемых в графической операционной среде. Характерным примером является общематематический пакет *MathCAD for Windows*. Наиболее просто ввод уравнений в естественном виде достигается в полных (замкнутых) пакетах синтеза фильтров Пугачёва.

Ввод уравнений с использованием языка программирования. В этом случае для задания уравнений используется синтаксис существующего или разработанного языка программирования. Такая ситуация наиболее типична для неполных пакетов, базирующихся на каком-либо инструментальном средстве более низкого уровня, и является вынужденной.

Достоинства ввода уравнений в естественном виде вполне очевидны, а из недостатков можно отметить лишь необходимость применения дополнительных управляющих команд (с помощью клавиатуры или мыши), чтобы указать, в какой позиции необходимо вводить символы (степень, индекс и др.). Интеллектуальные пакеты при вводе исходных данных могут помогать пользователю, «предугадывая» возможные варианты вводимых символов и их позиции, например после ввода переменной сразу перемещаться на позицию ее индекса. Очевидный недостаток ввода уравнений с помощью языка программирования — необходимость знания этого языка и высокая вероятность ошибки при записи уравнений. Некоторую помощь в этой ситуации могут оказать дополнительные программные средства, способные по заданным уравнениям построить их естественное представление аналогично тому, как это делается в математическом редакторе *TeX*, где сам исходный текст статьи вводится с помощью специального языка разметки, но результат можно просмотреть в графическом виде (изображение страницы).

3. Наличие синтаксического анализатора исходных данных. Этот критерий характерен для полных пакетов. Неполные пакеты чаще всего возлагают задачу синтаксического контроля исходных данных на пользователя или на инструментальные средства более низкого уровня. Наиболее рациональным представляется использование двухуровневого синтаксического анализатора, т. е. еще на этапе ввода исходных данных контролировать правильность ввода отдельных уравнений и по завершении ввода — правильность всей системы в целом,

аналогично тому, как это делается в среде программирования *Microsoft Visual Basic*. При этом синтаксический анализатор должен не только контролировать правильность записи уравнений с точки зрения математической нотации, но и возможность их дальнейшего решения, т. е. ограничивать классы возможных уравнений в соответствии с постановкой задачи.

4. Степень автоматизации построения системы уравнений для нахождения коэффициентов ПФП. Данный критерий в большой степени определяет интеллектуальность пакета и простоту практического использования. В отличие от традиционных способов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где для работы алгоритма расчета не важен вид уравнения, а важны лишь значения правых частей системы уравнений при конкретных (текущих) значениях переменных, алгоритмы решения задачи фильтрации Пугачёва требуют использования следующих типов пакетов:

- *пакеты с построением системы уравнений вручную.* Они требуют от пользователя полностью провести все математические выкладки и оставляют за собой лишь решение введенных уравнений и отображение результатов;
- *пакеты с автоматизированным построением системы уравнений.* Они требуют от пользователя проведения «на бумаге» определенных математических выкладок различной сложности, результаты которых оформляются, чаще всего, в виде подпрограмм, вызываемых в ходе решения задачи синтеза;
- *пакеты с автоматическим построением системы уравнений.* Они, используя исходные данные, введенные пользователем, а также приведенные математические модели, в автоматическом режиме строят все необходимые уравнения для вероятностных характеристик, коэффициентов фильтра и т. д. Фактически для выполнения этой операции пакет должен обладать возможностью символьных преобразований. Весьма полезным представляется наличие в пакетах возможности упрощения уравнений (приведения подобных членов), что позволит в дальнейшем существенно снизить нагрузки на расчетный модуль.

От степени автоматизации построения всех необходимых уравнений зависит целесообразность использования того или иного пакета. Если основные предварительные расчеты должны быть проведены пользователем, то высока вероятность того, что и оставшиеся действия он предпочтет запрограммировать сам без использования средств паке-

та. Автоматическое генерирование уравнений для решения задачи фильтрации Пугачёва с помощью препроцессора на некотором языке программирования, например *C* или *Pascal*, чревато тем, что число получаемых уравнений может достигнуть нескольких сотен или даже тысяч, а правая часть каждого уравнения может содержать огромное количество членов даже после упрощения. Таким образом, это практически нецелесообразно.

5. Наличие интерпретатора. Решение построенных систем уравнений для синтеза ПФП может осуществляться с помощью встроенного в пакет собственного интерпретатора уравнений. Обычно данный подход используется в замкнутых пакетах. При этом к качеству интерпретатора и псевдокоду, используемому им для функционирования, предъявляются повышенные требования, так как число уравнений, которые необходимо решать, как указывалось выше, может достигать нескольких сотен или тысяч. Естественно, что интерпретатору удобнее всего работать с некоторой синтаксически упрощенной, строго формализованной конструкцией — псевдокодом, а не с исходными символьными уравнениями. Поэтому целесообразно интегрировать модуль построения псевдокода с модулем автоматического построения уравнений.

В случае отсутствия в пакете собственного интерпретатора используются компиляторы (характерно для библиотек программ) или интерпретаторы (характерно для математических пакетов общего назначения) базовой среды функционирования пакета. При этом пакет должен уметь формировать данные для решения (систему уравнений) на языке используемого компилятора или интерпретатора.

Конечно, возможность выполнить компиляцию решаемой системы уравнений и получить программу в машинных кодах выглядит весьма привлекательной, но создание собственного компилятора в среде полного (замкнутого) пакета — очень трудоемкая задача, а генерация исходного текста программы для компиляторов языков высокого уровня практически невозможна в силу причин, указанных выше. Поэтому доминирующим направлением, по-видимому, останется использование встроенных интерпретаторов или интерпретаторов базовой среды выполнения пакета (для неполных пакетов).

6. Способ вычисления необходимых вероятностных характеристик. Большие трудности в ходе решения задачи синтеза фильтра вызывает нахождение вероятностных характеристик системы. Среди возможных способов решения данной проблемы можно выделить следующие основные (алгоритмически реализуемые) подходы:

- *использование приближенных аналитических методов* вычисления вероятностных характеристик. В этом случае делаются некоторые обоснованные предположения о виде вероятностного распределения случайных величин и с использованием одного из методов аппроксимации (метод нормальной аппроксимации, метод статистической линеаризации и т. д.) вычисляются, обычно рекуррентным способом, необходимые вероятностные характеристики;
- *использование методов статистического моделирования*. В этом случае с использованием имеющейся предварительной информации о распределении случайных величин и соответствующих датчиков случайных чисел проводится многократное (десятки тысяч раз) решение систем уравнений и вычисление статистическими методами необходимых оценок вероятностных характеристик;
- *использование аналитических методов*. Данный способ применим для типовых линейных систем, для которых существуют точные решения, и ограниченного круга нелинейных систем малой размерности.

7. Типы допустимых нелинейностей в уравнениях. Данный критерий очень важен для характеристики того или иного пакета и служит косвенным признаком «мощности» используемых в пакете методов и алгоритмов. В силу достаточно сложного математического аппарата решения задачи условно оптимальной фильтрации для нелинейных (по переменным состояния и наблюдения) систем разработчикам обычно приходится ограничиваться какими-либо классами нелинейных уравнений, оставляя работу по приведению исходных данных к требуемому виду за пользователем. Тип используемых нелинейностей сильно зависит от способа вычисления вероятностных характеристик.

Линейные уравнения наиболее широко используются в практической деятельности. Хотя на первый взгляд большинство реальных динамических систем описывается в основном линейными уравнениями, практически всегда в систему входят несколько уравнений, имеющих нелинейные правые части, соответственно, использование пакета с линейными уравнениями оказывается невозможным. Для решения этой проблемы пользователям обычно предлагается воспользоваться тем или иным методом линеаризации, например методом статистической линеаризации, что естественно предъявляет повышенные требования к квалификации пользователя и объему «ручной» предварительной работы.

Уравнения с полиномиальными нелинейностями позволяют вводить в правые части слагаемые в виде

произведения переменных. Уравнения данного типа могут иметь ограничения на максимальную степень полинома. Использование полиномов выше первой степени существенно расширяется круг систем, которые может обрабатывать пакет. При этом для такого класса систем предложено достаточно много методов решения задачи вычисления вероятностных характеристик с помощью аналитических методов.

Уравнения с нелинейностями из базового набора функций предоставляют возможность использовать некоторый набор базовых нелинейных функций для задания правых частей уравнений. Например, использование в пакете тех функций, которые допускают эффективную автоматическую линеаризацию, позволяет освободить пользователя от этой предварительной рутинной работы и при этом использовать методы для решения систем с линейными правыми частями уравнений. Другим примером, принципиально отличающимся по методике решения задачи, может служить набор допустимых нелинейных функций, образующих некоторый базис, по которому можно выполнить разложение достаточно широкого круга нелинейностей. Решение этой задачи в общем случае, к сожалению, так же сложно, как и в случае уравнений без ограничений.

Уравнения без ограничений на вид нелинейности не накладывают явных ограничений на нелинейности в правых частях, хотя на самом деле могут представлять собой уравнения с ограничениями, вызванными конечным множеством известных разработчику функций. Этот «идеальный» случай пока не подкреплен наличием соответствующих методов и алгоритмов, и появление пакетов, реализующих данную возможность, откладывается на неопределенное время.

8. Возможность изменения структуры ПФП. *Пакеты с фиксированной структурой правой части* решают задачу синтеза путем нахождения коэффициентов при жестко заданных правых частях уравнений. При этом структура уравнения фильтра определяется не пользователем пакета, а его разработчиком. Таким примером может служить обязательное требование наличия в правых частях уравнений фильтра всех измерений, вне зависимости от их необходимости. Данный подход обычно вызван не ограничениями в математических методах, а способом представления данных в программном продукте.

Пакеты с возможностью изменения структуры фильтра, т. е. с выбором числа уравнений фильтра, видов правых частей этих уравнений, позволяют более гибко подходить к проектированию фильтра

и учитывать такие факторы, как сложность дальнейшей реализации, трудоемкость вычислений в реальном времени и т. д. Например, в случае нелинейной системы, описывающей состояние объекта, пользователь может спроектировать линейный фильтр, если дальнейшая реализация этого фильтра «в железе» не допускает использования нелинейных элементов.

9. Возможность оптимизации и моделирования работы ПФП. Следующим этапом является оценка его работоспособности, которую целесообразно начинать с проведения численных экспериментов. Наличие программного средства моделирования работы фильтра позволяет, используя введенные в пакет исходные уравнения и результаты проектирования, на ряде модельных примеров оценить качество работы фильтра. Развитый пакет может иметь возможность построения сотен и тысяч модельных реализаций и использовать статистические методы для обобщения результатов. Если пакет не имеет такой возможности, то обязательное моделирование работы фильтра Пугачёва производится с помощью дополнительно создаваемых пользователем программ, что, естественно, приводит к существенному увеличению времени решения проблемы.

10. Возможность графического представления результатов. Так как в результате решения задачи синтеза получаются числовые данные (обычно это коэффициенты), то пакет может содержать средства для их представления на графиках. Графическое представление обычно позволяет быстро определить установившиеся значения различных величин, проследить качественные тенденции поведения величин, сравнивать между собой величины, имеющие одинаковую физическую сущность (например, модельную реализацию переменной и оценку ее математического ожидания). При отсутствии таких средств в пакете пользователю необходимо привлекать дополнительные программные продукты.

11. Требования к квалификации пользователя. Различные критерии к созданию пакетов или библиотек предъявляют существенно разные требования к уровню квалификации пользователя в специальных областях.

Наличие базовых навыков работы с компьютером является обязательным требованием для всех пакетов.

Наличие математической подготовки в области задач фильтрации крайне желательно в любом случае, хотя бы для грамотной постановки задачи и подготовки исходных данных, а также для интерпретации полученных результатов. Однако в опти-

мальном случае эти требования должны ограничиваться уровнем высшего инженерно-технического образования.

Знание языка программирования и владение определенными инструментальными средствами. Данное требование может существенно повлиять на практическое использование того или иного пакета. Наиболее приемлемым для пользователя будет вариант, когда он уже имеет опыт программирования на требуемом или подобном языке, наименее приемлемым — вариант, связанный с покупкой и освоением дорогостоящего базового пакета (например, *Mathematica*).

7 Принципы синтеза параметризованного фильтра Пугачёва и особенности его реализации

Тщательный анализ созданных методов решения задачи фильтрации, а также опыт решения прикладных задач позволяют сделать вывод о том, что в настоящее время построение ИТ, которая полностью покрывала бы потребности пользователей, не представляется возможным. Однако, выбирая определенные компромиссы с учетом уровня вычислительной техники, можно создать практически пригодную ИТ.

Рассматриваются два варианта решения по реализации ИТ синтеза ПФП:

- (1) создание полного пакета прикладных программ синтеза ПФП;
- (2) синтез ПФП на основе расширения базовой математической среды.

Основными принципами варианта 1 являются:

- полнота, т. е. наличие всех необходимых модулей для решения задачи синтеза фильтров;
- минимальные требования к квалификации пользователя, т. е. наличие базовых навыков работы с компьютером, а также минимальные знания прикладной теории СтС.

Для реализации ИТ, базирующейся на этих принципах, необходимо создание большого числа модулей различного назначения, в том числе:

- редактора для ввода исходных данных;
- подсистемы формирования (вывода) уравнений для решения на основе исходных данных;
- решающей подсистемы;
- подсистемы моделирования;

- подсистемы выдачи результатов;
- подсистемы управления хранением данных и запуска модулей.

Редактор для ввода исходных данных (например, для задачи фильтрации — это уравнения объекта и измерителя, уравнения класса допустимых фильтров, а также начальные условия) должен обеспечивать следующие возможности:

- ввод уравнений в естественной математической форме или форме, близкой к ней;
- синтаксический анализ введенных уравнений с учетом ограничений на вид нелинейностей в правых частях уравнений;
- перевод (трансляция) уравнений из естественного представления в некоторый псевдокод, удобный для дальнейшей работы пакета;
- сохранение исходных данных и результатов трансляции.

Подсистема формирования уравнений должна обеспечивать построение на основе исходных данных уравнений для вероятностных характеристик и для коэффициентов, например фильтра, а также осуществлять «замыкание» этих уравнений, т. е. приводить уравнения к такому виду, когда в их правых частях используются известные значения. Построение замкнутой системы уравнений для нелинейных СтС целесообразно осуществлять, используя такие приближенные методы, как метод нормальной (гауссовой) и эллипсоидальной аппроксимации и др. Результатом работы подсистемы формирования уравнений должен являться некоторый псевдокод с записью уравнений для численного решения. Решающая подсистема на основе полученного псевдокода и численных значений для вероятностных характеристик в начальный момент времени должна выполнить итерационное пошаговое вычисление всех необходимых характеристик в указанном интервале времени. Эта подсистема должна обеспечивать отдельное решение задачи анализа СтС, что позволяет сначала изучить свойства исследуемого объекта, а затем приступить к решению задачи синтеза.

Необходимым условием работы решающей подсистемы является постоянный контроль за устойчивостью. В случае если в процессе решения отдельные характеристики начинают неограниченно расти и это, в свою очередь, приводит к большим погрешностям вычислений и росту других, связанных с ними характеристик, то необходимо прекращение дальнейших вычислений. Потеря устойчивости в ходе решения обычно возникает по трем причинам:

- (1) ошибки в ходе создания математической модели системы и ее дискретизации;
- (2) неудачный выбор начальных условий или шага дискретизации;
- (3) неприменимость используемого метода приближенного вычисления вероятностных характеристик для описываемой системы.

Так как в ходе вычисления коэффициентов фильтра приходится решать задачу обращения матрицы (или решения системы линейных уравнений), то следует выбирать метод, устойчивый к вырожденности этой системы, например метод сингулярного разложения. Пренебрежение этим требованием часто приводит к ошибочному вычислению коэффициентов ПФП или неустойчивости решения.

Решающая подсистема в ходе работы должна взаимодействовать с подсистемой (модулем) выдачи результатов для визуального контроля хода решения задачи, а также сохранять результаты решения.

Крайне желательно наличие возможности приостановки счета и его продолжения в удобное время, так как многие практические задачи при соблюдении требований к точности вычислений требуют проведения многодневных расчетов. Решающая подсистема должна быть расширена подсистемой моделирования, что позволит на некотором количестве реализаций проверить качество синтезированных ПФП. При создании моделирующей подсистемы основное внимание должно быть уделено качеству датчиков генерации псевдослучайных чисел по заданному закону распределения.

Подсистема выдачи результатов должна обеспечить наглядное представление данных в графическом виде, а также их экспорт в табличном виде в одном из распространенных форматов. Обязательной является возможность одновременного отображения графиков нескольких характеристик, что позволяет визуально оценивать точность решения задачи синтеза ПФП.

Все перечисленные выше подсистемы (модули) должны корректно взаимодействовать между собой. Для решения этой задачи служит подсистема управления, отвечающая за запуск модулей и хранение данных. Правильно построенная подсистема управления должна обеспечивать следующие возможности:

- ведение банков данных уравнений объекта, уравнений наблюдения, уравнений фильтра (экстраполяторов, идентификаторов и др.) как в исходном виде, так и в оттранслированной форме;

- ведение банка данных результатов расчетов;
- запуск отдельных модулей с указанием исходных данных для них (элементов из банка данных);
- возможность проведения расчетов при различных комбинациях уравнений объекта, измерений и фильтра, что позволяет достаточно быстро пробовать различные структуры и сравнивать результаты между собой.

Обязательным для пакета должно стать требование нахождения точного решения для класса линейных систем. Для нелинейных систем целесообразно ограничиться некоторым классом базовых функций, например полиномами невысоких степеней относительно переменных состояния объекта.

Для варианта 2 основными принципами служат:

- возможность самостоятельного дальнейшего развития методов синтеза фильтров;
- возможность создания собственных программных средств, расширяющих возможность базового пакета.

Реализация этих принципов становится возможной в настоящее время с появлением нового поколения ИТ математических вычислений, сочетающих в себе мощные языки описания формул, возможности символьного вывода и решения уравнений, а также возможности численного решения уравнений.

Задачи синтеза ПФП могут быть представлены как расширения возможностей базового пакета. В этом случае пользователю должен предоставляться набор модулей, реализующих:

- формальные правила символьного вывода уравнений для вычисления вероятностных характеристик и коэффициентов ПФП;
- правила замыкания уравнений с помощью приближенных аналитических методов.

Далее пользователь, используя предоставленные формальные правила и возможности символьных преобразований базовой среды, может получить из исходных уравнений постановки задачи синтеза ПФП соответствующие уравнения для вычисления необходимых вероятностных характеристик и коэффициентов фильтра, а затем решить эти уравнения численно.

В настоящее время для инженерных приложений подходящей базовой средой для реализации данной ИТ может служить пакет *MATLAB*.

8 Развитие и применение пакета прикладных программ «СтС-Фильтр»

8.1 Пакет прикладных программ «СтС-Фильтр» (версия 1.0)

Пакет прикладных программ «СтС-Фильтр» позволяет научному работнику в предметной научной области, не являющемуся специалистом в статистической информатике, реализовать комплексную ИТ анализа процессов в многомерных нелинейных СтС и синтеза фильтров для быстрой обработки результатов наблюдений (измерений). Смоделируем действия такого специалиста. С помощью некоторых приборов наблюдения специалист получает информацию об исследуемой динамической системе (системах, классе систем). Необходимо отфильтровать (в реальном масштабе времени) эту зашумленную информацию для получения достоверной информации о системе. Для подбора фильтра берут систему с известными характеристиками из класса систем, близких к исследуемой по какому-нибудь критерию, моделируют для нее помехи и процесс измерения и для этой пары «система–наблюдение» подбирают фильтр. Критериями при подборе фильтра Пугачёва являются минимальная с.к.о. и ограничения по сложности реализации фильтра. Подобранный фильтр проверяют на работоспособность на других парах «система–наблюдение» из того же класса. По результатам проверки принимается решение о пригодности синтезированного фильтра. В случае неудовлетворительного результата выбирается другой фильтр, и процедура оценки его пригодности повторяется снова. В этом состоит одно из преимуществ фильтров Пугачёва.

При синтезе дискретного ПФП математическая модель (система, наблюдения и фильтр) задается в виде систем стохастических разностных уравнений. Для анализа синтезируемого фильтра пользователь может сравнивать отфильтрованные данные с исходными (до наблюдений) или получаемыми в результате эксперимента, а также различные вероятностные характеристики или просматривать найденные значения оптимизируемых параметров фильтра. Самым удобным для этого просмотра является графическое представление данных, дающее наглядную картину проходящих процессов. Особенностью требований учебного процесса является возможность наглядного синтеза фильтра Калмана как частного случая ПФП для линейных систем.

Этой сложившейся естественной последовательностью действий, выполняемых при синте-

зе ПФП, обусловлена архитектура ППП «СтС-Фильтр»: формирование математических моделей системы, наблюдений и фильтра, задание начальных условий и параметров моделей; проведение вычислительного эксперимента; визуализация и анализ результатов вычислений; принятие решения о пригодности фильтра и подготовка результатов для использования синтезированного фильтра.

Естественным началом при проектировании дискретного фильтра Пугачёва является ввод уравнений, описывающих поведение системы, приборы наблюдения и работу фильтра. Поэтому первым пунктом в основном меню пакета стоит ввод уравнений (всего в меню четыре пункта: «Ввод и редактирование уравнений», «Вычислительный эксперимент», «Отображение результатов» и «Сервис»).

При выборе пункта «Ввод и редактирование уравнений» открывается банк уравнений. Каждое уравнение относится к одному из трех разделов, соответствующих системе, наблюдениям или фильтру. Имена уравнений из каждого раздела размещены в соответствующем столбце. Необходимо выбрать имя объекта в одном из столбцов.

В процессе ввода имени предусмотрены стандартные возможности для его редактирования (например, исправление или удаление неправильно введенного символа).

При написании уравнений обычно используют стандартные символы.

В ППП «СтС-Фильтр» высокая наглядность при визуализации математических выражений достигается вертикальным смещением индексов и степеней, а также в результате использования традиционных в математике условных символов. По своей структуре естественная запись математического выражения, реализованная в пакете, состоит из трех строк: основной, индексной (изображаемой несколько ниже основной строки символами меньших размеров) и степенной (изображаемой несколько выше основной строки также символами меньших размеров). Таким образом, основная строка частично перекрывается индексной и степенной строками. При этом каждому символу основной строки ставится в соответствие одна (возможно, пустая) цепочка символов из индексной строки и одна (возможно, пустая) цепочка символов из степенной строки.

При вводе и редактировании уравнений автоматически отслеживается синтаксическая и частично семантическая допустимость вводимой информации.

Редактор позволяет работать как с уравнениями объекта в целом, так и с каждым отдельным уравнением. Уравнение может занимать несколько строк экрана.

Ввод текстов осуществляется с помощью генераторов русского и латинского алфавитов и генератора нестандартных графических символов. В этом режиме доступны все вышеописанные возможности редактора уравнений, а также переключение с русского на латинский алфавит с помощью имеющегося драйвера.

Результатом работы пункта «Ввод и редактирование математических моделей» являются строки внутреннего представления оттранслированных моделей и комментирующих текстов, сохраняемые на дисковом устройстве в соответствующих файлах.

Таким образом, предоставляется возможность работать с уравнениями в привычном виде со стандартными возможностями, как работают с бумагой, карандашом, резинкой и ножницами, и плюс к этому имеются расширенные возможности редактирования с отслеживанием математической допустимости вводимых выражений, уравнений и систем уравнений (при работе с описаниями такой контроль не ведется).

Результаты тестирования пакета и решение прикладных задач показывают следующее.

1. Пакет «СтС-фильтр» предназначен для работы с разностными уравнениями, но многие реальные динамические объекты описываются системами стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито. Путем дискретизации такие системы могут быть приведены к виду, пригодному для решения задачи синтеза ПФП на пакете. Для удобства работы с разностными уравнениями в пакете предусмотрен ввод дополнительного параметра — «шаг дискретизации времени». Значение этого параметра указывает пользователь при начале расчетов. Пакет может использоваться как для синтеза фильтра Калмана, так и ПФП.
2. Если правые части системы разностных уравнений содержат неполиномиальные нелинейности относительно вектора состояния, то рекомендуется аппроксимировать их полиномами невысокой степени n ($n \leq 5$).
3. Не рекомендуется использование в пакете уравнений, содержащих полиномы высоких степеней по двум причинам:
 - (а) при увеличении степени полинома очень сильно возрастает время счета;
 - (б) методы нормальной или эллипсоидальной аппроксимации могут давать существенные погрешности при рекуррентном вычислении моментов.

4. Перед решением задачи синтеза ПФП желательно провести предварительный статистический анализ исходной СтС с помощью пакета. На этом этапе выясняются оптимальные параметры решения задачи (шаг дискретизации, шаг отображения), степень влияния начальных условий на характер поведения СтС, наличие стационарного режима и др. При благополучном завершении статистического анализа можно приступить к конструированию фильтра.
5. Выбор структуры ПФП зависит от множества факторов: аппаратной реализуемости; уровня сложности системы; качества наблюдений; скорости поступления данных и др. Обычно хорошие результаты дают фильтры, которые имеют структуру, похожую на структуру исходной СтС, и используют все получаемые наблюдения.
6. При задании начальных условий для ПФП рекомендуется математические ожидания оценок брать равными математическим ожиданиям соответствующих компонент исходной СтС (несмещенность оценок), а дисперсии оценок — несколько меньшими по величине, чем дисперсии компонент вектора состояния.
7. Если необходимо оценивать только некоторые компоненты вектора состояния исходной СтС, то применение фильтров пониженной размерности позволит существенно ускорить процесс синтеза ПФП и сам процесс фильтрации.
8. В некоторых задачах матрица линейной системы, определяющая коэффициенты ПФП, может иметь неполный ранг. В этих случаях пакет автоматически переключается на специальные методы решения таких уравнений.
9. Для оценки качества спроектированного фильтра рекомендуется проверить его работоспособность на моделируемых наблюдениях. При плохих результатах моделирования необходимо изменить структуру фильтра.
10. Если шумы в исходной СтС имеют рациональную спектральную плотность, необходимо использовать формирующие фильтры.
11. При правильной работе пакета автоматически выполняются соотношения несмещенности и ортогональности.
12. При удовлетворительном качестве построенного фильтра и при необходимости дальнейшего использования вычисленных коэффициентов ПФП для фильтрации в реальном масштабе времени необходимо записать вычисленные коэффициенты ПФП в удобном порядке в текстовый

файл (режим табличного вывода). При получении наблюдений необходимо с помощью элементарной программы прочитать их из файла и выполнить с ними операции умножения и сложения.

8.2 Пакет прикладных программ «СтС-Фильтр» (версия 2.0)

В 2001–2003 гг. создана версия ППП «СтС-Фильтр» в среде *MATLAB* для решения регулярных и сингулярных ДСтС. При этом алгоритмическое и программное обеспечение было дополнено новыми модулями для анализа и синтеза сингулярных ДСтС. Особое внимание было уделено алгоритмам на базе символьных вычислений [53, 54, 65]. В [58, 74] описаны реализации версий ПФП для высокопроизводительных средств вычислительной техники [7, 8, 58, 61].

В приложении 6 книги [7] приведены примеры расчетов точности и синтеза ПФП для регулярных и сингулярных ДСтС.

В 2008–2010 гг. для анализа нестационарных СтС разработаны стохастические ИТ анализа и обработки информации, основанные на канонических разложениях случайных функций. Инструментальное программное обеспечение реализовано в виде развития ППП «СтС-Фильтр» и получило название «СтИТ-КР» [8, 51, 75, 76].

Версии ППП «СтС-Фильтр» нашли широкое применение в задачах статистической информатики и управления как достаточно универсальное инструментальное программное средство. На основе технологий ППП «СтС-Фильтр» созданы специализированные инструментальные средства для анализа качества различных технических и организационно-технических систем.

Пкет прикладных программ «СтС-Фильтр» применяется также для поддержки следующих курсов лекций: «Статистические основы информатики и управления», «Теория случайных процессов и ее применения», «Дополнительные главы теории вероятностей и математической статистики», «Теория стохастических систем и ее применения».

Заключение

1. Рассмотрено современное состояние и полученные в ИПИ РАН новые результаты теории условно оптимальной фильтрации Пугачёва.
2. Рассмотрены этапы создания ИТ для быстрой обработки информации в регулярных и сингулярных СтС.

3. Сформулированы и обоснованы основные подходы к созданию ИТ синтеза параметризованных фильтров Пугачёва.
4. Выявлены особенности критериев оценки пакетов для реализации ИТ синтеза параметризованных фильтров Пугачёва в сингулярных СтС.
5. Сформулированы принципы разработки ИТ синтеза параметризованных фильтров Пугачёва и особенности их программной реализации на ПЭВМ.
6. Рассмотрено развитие и применение ППП «СтС-Фильтр», лежащих в основе стохастических ИТ.

Литература

1. Пугачев В. С. Оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых дифференциальными уравнениями // Доклады АН СССР, 1978. Т. 241. № 5. С. 1031–1034.
2. Пугачев В. С. Оценивание состояния и параметров непрерывных нелинейных систем // Автоматика и телемеханика, 1979. № 6. С. 63–79.
3. Pugachev V. S. Estimation of Markov processes // Time Series: Proceedings of the International Conference. Nottingham, 1979. — Amsterdam: North Holland, 1980. P. 389–400.
4. Пугачев В. С. Обобщение теории условно оптимального оценивания и экстраполяции // Доклады АН СССР, 1982. Т. 262. № 3. С. 535–538.
5. Pugachev V. S. Conditionally optimal estimation in stochastic differential systems // Automatica, 1982. Vol. 18. No. 6. P. 685–696.
6. Пугачев В. С. Условно оптимальная фильтрация и экстраполяция непрерывных процессов // Автоматика и телемеханика, 1984. № 2. С. 82–89.
7. Синицын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачева. — М.: Логос, 2005; 2007 (2-е изд.).
8. Синицын И. Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009.
9. Пугачев В. С. Конечномерные распределения процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, и экстраполяция таких процессов // Доклады АН СССР, 1980. Т. 251. № 1. С. 40–43.
10. Pugachev V. S. The finite-dimensional distributions of a random process determined by a stochastic differential equation and their application to control problems // Problems of Control and Information Theory, 1981. Vol. 10. No. 2. P. 95–114.
11. Pugachev V. S. Conditionally optimal estimation in systems with randomly varying structure // Preprints of the IX World Congress of the International Federation of Automatic Control. Budapest, Hungary, 1984. — Budapest, 1984. Vol. 7. P. 1–5.
12. Пугачев В. С. Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых уравнениями авторегрессии // Доклады АН СССР, 1978. Т. 241. № 6. С. 1269–1272.
13. Пугачев В. С. Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых разностными уравнениями // Доклады АН СССР, 1978. Т. 243. № 5. С. 1131–1133.
14. Пугачев В. С. Рекуррентное оценивание переменных и параметров в марковских системах при дискретных измерениях // Доклады АН СССР, 1979. Т. 244. № 5. С. 1077–1080.
15. Пугачев В. С. Оценивание состояния и параметров марковских систем при дискретных измерениях // Автоматика и телемеханика, 1979. № 7. С. 43–55.
16. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979.
17. Пугачев В. С., Синицын И. Н., Шин В. И. Проблемы анализа и условно оптимальной фильтрации в реальном масштабе времени процессов в нелинейных стохастических системах // Автоматика и телемеханика, 1987. № 12. С. 3–24.
18. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Прикладные методы анализа стохастических систем // Вестник МАИ, 1994. Т. 1. № 1. С. 39–47.
19. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. — М.: Наука, 1985; 1990 (2-е изд.).
20. Pugachev V. S. Unbounded conditionally optimal linear control for a linear plant // Control science and technology for the progress of society: VIII Triennial World Congress International Federation of Automatic Control Proceedings. Kyoto, Japan, 1981. Vol. 1. Control Theory. — Oxford — New York, 1982. P. 373–376.
21. Пугачев В. С. Управление летными испытаниями летательных аппаратов как средство повышения их надежности // Проблемы надежности летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1985. С. 25–37.
22. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Направления развития математического обеспечения для исследования стохастических систем // Информатика: проблемы, перспективы. — М.: Наука, 1986. С. 30–48.
23. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Направления развития теории условно оптимальной фильтрации // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. II Всесоюзн. конф. Севастополь, 2–4 октября 1985. — М., 1985. Ч. 1. С. 168–170.
24. Pugachev V. S., Sinitsyn I. N., Shin V. I. Problems of analysis and on-line conditionally optimal filtering of processes in nonlinear stochastic systems // 2nd IFAC Symposium on Stochastic Control. Vil'nius, USSR, May 19–23, 1986: Preprints. Part 1. — Moscow, 1986. P. 4–18.

25. *Sinitsyn I. N.* Stochastic hereditary control systems // *Problems of Control and Information Theory*, 1986. Vol. 15. No. 4. P. 287–298.
26. *Sinitsyn I. N.* Problems of signal analysis and conditionally optimal processing in stochastic differential systems // *Latvian Signal Processing International Conference Proceedings*. Riga, 1990. Vol. 2. P. 60–64.
27. *Алдушин Г. К., Бабкина Р. Н., Булака В. Ф., Вигдурович В. Ю., Гершиков Б. И., Корепанов Э. Р., Куленко О. А., Пугачев В. С., Сеницын В. И., Сеницын И. Н., Хатунцев А. П., Шин В. И.* Принципы разработки интеллектуализированных ППП для построения условно оптимальных фильтров: Пакет прикладных программ «СтС-фильтр» / Под ред. В. С. Пугачева, И. Н. Сеницына. — М.: ИПИ АН СССР, 1991.
28. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н., Хатунцев А. П., Шин В. И., Корепанов Э. Р., Сеницын В. И.* Математическое обеспечение для проектирования условно оптимальных фильтров и анализа процессов в дискретных стохастических системах // *Автоматика и телемеханика*, 1992. № 6. С. 78–85.
29. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н., Хатунцев А. П., Шин В. И., Корепанов Э. Р., Сеницын В. И.* Проблемы разработки математического обеспечения для проектирования дискретных условно оптимальных фильтров // *Системы и средства информатики*. Вып. 3. — М.: Наука, 1992. С. 3–19.
30. *Корепанов Э. Р.* Разработка и реализация информационной технологии синтеза фильтров Пугачева. Автореф. дисс. . . . канд. техн. наук. — М.: ИПИ РАН, 1998.
31. *Сеницын И. Н., Шин В. И.* Условно оптимальная фильтрация процессов в стохастических дифференциальных системах по сложным статистическим критериям // *Доклады АН СССР*, 1991. Т. 320. № 4. С. 814–817.
32. *Сеницын И. Н., Шин В. И., Корепанов Э. Р.* Теория условно оптимальной фильтрации стохастических процессов по сложным статистическим критериям // *Системы и средства информатики*. Вып. 5. — М.: Наука, 1993. С. 106–120.
33. *Сеницын И. Н., Мошук Н. К., Шин В. И.* Общая теория условно оптимальной фильтрации процессов в стохастических дифференциальных системах // *Системы и средства информатики*. Вып. 7. — М.: Наука, 1995. С. 75–85.
34. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н.* Современное состояние и перспективы развития математического обеспечения для исследования стохастических систем // *Проблемы управления-89: Тез. докл. Всесоюз. совещания*. — Ташкент, 1989. Т. 1. С. 504–505.
35. *Панков А. Р.* Рекуррентное оценивание траекторий динамических систем с помощью регрессионных нелинейных фильтров // *Статистические методы в теории управления ЛА: Тем. сб. научн. тр. МАИ*. — М.: МАИ, 1990. С. 45–53.
36. *Казаков И. Е., Мальчиков С. В.* Приближенное построение фильтров Пугачева заданной сложности // *Автоматика и телемеханика*, 1981. № 12. С. 48–55.
37. *Руденко Е. А.* Оптимальные дискретные конечномерные алгоритмы идентификации состояния и параметров движущихся объектов при дискретных измерениях // *Теория и методы идентификации и управления движущимися объектами: Тем. сб. науч. тр. МАИ*. — М.: МАИ, 1988. С. 43–52.
38. *Руденко Е. А.* Оптимальная структура дискретных нелинейных фильтров произвольного порядка // *Статистические методы в теории управления ЛА: Тем. сб. науч. тр. МАИ*. — М.: МАИ, 1990. С. 53–60.
39. *Руденко Е. А.* Адаптивный дискретный нелинейный фильтр для реализации на борту ЛА // *Управление и навигация ЛА в условиях параметрической неопределенности: Тем. сб. науч. тр. МАИ*. — М.: МАИ, 1991. С. 23–30.
40. *Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В.* Информационные технологии синтеза параметризованных фильтров Пугачева // *Научные технологии*, 2004. Т. 5. № 7. С. 50–72.
41. *Белоусов В. В.* Информационная технология синтеза фильтров Пугачева для быстрой обработки информации в сингулярных стохастических системах. Автореф. дисс. . . . канд. техн. наук. — М.: ИПИ РАН, 2004.
42. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н.* Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000; 2003 (2-е изд.).
43. *Mohider S. G., Angus P. A.* Kalman filtering. Theory and applications. — New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1993.
44. *Сеницын В. И.* Эллипсоидальная аппроксимация распределений в задачах анализа и обработки информации в стохастических системах. Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук. — М.: МАИ, 2005.
45. *Хоанг Тхо Ши.* Эллипсоидальные квазилинейные фильтры для оперативной обработки информации в нелинейных стохастических системах. Автореф. дисс. . . . канд. техн. наук. — М.: ИПИ РАН, 2007.
46. *Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р., Сеницын В. И., Белоусов В. В.* Структурные методы параметризации распределений в стохастических системах, основанные на канонических разложениях // *Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях (Спектр'2000): Докл. I Всеросс. конф. Пушкино, Моск. обл., 24–28 октября 2000*. — М.: ИМПБ РАН, 2000. С. 150–152.
47. *Сеницын И. Н., Сеницын В. И.* Методы анализа нелинейных стохастических систем // *Проблемы и методы информатики: Тез. докл. II научн. сессии ИПИ РАН*. — М.: ИПИ РАН, 2005. С. 19.
48. *Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Агафонов Е. С., Куценко А. В.* Математическое обеспечение методов эквивалентной линеаризации стохастических систем, основанное на канонических разложениях случайных функций // *Кибернетика и высокие технологии XXI века (С&Т 2008): Тр. IX Междунар. научно-техн. конф.* — Воронеж: Саквөөе, 2008. ISBN 978-9900659-6-3. С. 723–734.

49. Сеницын И. Н. Современное состояние теории канонических разложений случайных функций и ее применение к задачам фильтрации и распознавания // Опτικο-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание-2008): Сб. мат-лов VIII Междунар. конф. Курск, 13–15 мая 2008. Ч. 1. ISBN 978-5-7681-0378-1.
50. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Агафонов Е. С. Символьное математическое обеспечение для анализа и моделирования стохастических систем, основанное на канонических разложениях случайных функций // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'09): Тр. VIII Междунар. конф. CD-ROM. С. 1059–1072.
51. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Конашенкова Т. Д., Агафонов Е. С., Сергеев И. В., Басилашвили Д. А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (III) // Системы высокой доступности, 2010. Т. 6. № 4. С. 23–47.
52. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Чумин И. В. Методическое и программное обеспечение анализа качества и моделирования сингулярных стохастических систем // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'05): Тр. IV Междунар. конф., 2005. CD-ROM. ISBN 5-201-149-75-8. С. 1734–1743.
53. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Куценко А. В. Методическое и программное обеспечение на основе символьных вычислений для исследования регулярных и сингулярных стохастических систем // Кибернетика и высокие технологии XXI века (С&Т 2007): Сб. докл. VIII Междунар. научно-техн. конф. — Воронеж: Саквояж, 2007. Т. 2. С. 561–573.
54. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Куценко А. В. Развитие методического и программного обеспечения для анализа качества и моделирования регулярных и сингулярных стохастических систем // Системный анализ и информационные технологии (САИТ-2007, Обнинск): Тр. II Междунар. конф. — М.: ЛКИ, 2007. Т. 1. С. 20–23.
55. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические системы. Теория и программное обеспечение // Тр. юбилейной сессии Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН, 1993. Т. 1. С. 75–93.
56. Шайкин М. Е., Сеницын И. Н. Проблемы фильтрации и распознавания образов в стохастических системах со свойствами симметрии // Распознавание образов и анализ изображений, 2001 (на англ. яз). Т. 11. № 1. С. 382–385.
57. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В. Развитие теории быстрых алгоритмов обработки сигналов в нелинейных стохастических системах // Опτικο-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработка изображений и символьной информации (Распознавание-2003): Сб. мат-лов 6-й Междунар. конф. — Курск: КГТУ, 2003. С. 37.
58. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Степанов А. М., Ушмаев О. С. Проблемы реализации вычислительных методов обработки и анализа сигналов и изображений на архитектурах с ассоциативной памятью // Методы и средства обработки информации: Тр. 1-й Всеросс. конф. — М.: МГУ, 2003. С. 73–77.
59. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Ильясов Д. Ф., Ушмаев О. С. Субоптимальные обучающиеся информационные технологии и системы // Интеллектуальные информационные технологии (Интеллект-2003): Тез. докл. Межрегиональной научно-практич. конф. — Тула, 2003. С. 71.
60. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В. Современное методическое и программное обеспечение анализа качества и моделирования стохастических систем управления // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'04): Тр. III Междунар. конф., 2004. CD-ROM. ISBN 5-201-14966-9. С. 17–43.
61. Сеницын И. Н., Степанов А. М., Ушмаев О. С. Проблемы синтеза фильтров и идентификаторов с ассоциативной памятью // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'04): Тр. III Междунар. конф., 2004. CD-ROM. ISBN 5-201-14966-9. С. 1896–1911.
62. Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Ильясов Д. Ф. Современное состояние теории и некоторых приложений канонических представлений случайных функций // Математика в современном мире: Мат-лы 2-й Всеросс. научно-практич. конф., посвященной 110-летию со дня рождения А. Я. Хинчина. — Калуга, 2004. С. 43–52.
63. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р., Ильясов Д. Ф., Агафонов Е. С. Опыт разработки информационных технологий стохастической обработки и аудита электронных таблиц // Математические методы распознавания образов (ММПРО-12): Тез. докл. 12-й Всеросс. конф. — М.: МАКС-ПРЕСС, 2005. С. 32.
64. Соколов И. А., Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Чумин И. В., Хоанг Тхо Ши. Методы эквивалентной линеаризации нелинейных стохастических систем и их применение // Системы и средства информатики. Спец. вып. — М.: ИПИ РАН, 2005. С. 5–29.
65. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Куценко А. В. Развитие методического и программного обеспечения на основе символьных вычислений для исследования стохастических систем // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'07): Тр. VI Междунар. конф. CD-ROM. ISBN 5-201-14992-8. С. 1447–1462.
66. Сеницын И. Н. Развитие теории фильтров Пугачева для оперативной обработки информации в стохастических системах // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. Вып. 1. С. 3–13.
67. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р., Агафонов Е. С. Условно оптимальные стохастические информационные

- технологии контроля и обучения сложных динамических систем // Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии (РОАИ-8-2007): Тр. 8-й Междунар. конф. Йошкар-Ола. — М.: МГТУ, 2007. Т. 1. С. 44–49.
68. *Борисов А. В.* Методы анализа и оценивания в скрытых марковских системах при обработке разнородной информации. Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук. — М.: МАИ, 2008.
69. *Дымков В. И., Сеницын И. Н.* Элементы концепции персональных систем обработки изображений // Системы и средства информатики. Вып. 1. — М.: Наука, 1989. С. 66–74.
70. *Сеницын И. Н.* Из опыта преподавания статистических основ информатики в технических университетах // Системы и средства информатики. Вып. 8. (Спец. вып. «Информационные технологии в образовании: От компьютерной грамотности к информационной культуре общества», посвященный II Международному конгрессу ЮНЕСКО «Образование и информатика»). — М.: Наука, 1996. С. 68–73.
71. *Жандаров А. М.* Идентификация и фильтрация измерений состояния стохастических систем. — М.: Наука, 1979.
72. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений. — М.: Радио и связь, 1983.
73. *Малышев В. В., Кибзун А. И.* Анализ и синтез систем высокоточного управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1987.
74. *Сеницын И. Н., Сеницын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Лавренюк Ю. А.* Условно оптимальные стохастические информационные технологии контроля сложных динамических систем // Системы и средства информатики. — М.: Наука, 2006. С. 51–87.
75. *Сеницын И. Н.* Стохастические системы. Теория и стохастические информационные технологии (I) // История науки и техники. — М.: Научтехлитиздат, 2008. № 7. С. 9–12.
76. *Сеницын И. Н.* Стохастические системы. Теория и стохастические информационные технологии (II) // Системы высокой доступности, 2008. Т. 4. № 1–2. С. 25–35.

ТЕОРИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И КИБЕРНЕТИЧЕСКАЯ КАРТИНА МИРА

М. Б. Игнатьев¹

Аннотация: Рассматриваются сложные системы методом лингвокомбинаторного моделирования, исследуются механизмы взаимодействия систем и окружающей среды — настройка с помощью использования произвольных коэффициентов, обучение с помощью наложения или снятия ограничений, объединение в коллектив и др. Выявлен феномен адаптационного максимума, и если целью является выживание системы в потоке перемен, то она должна управляться так, чтобы удерживаться в зоне адаптационного максимума с помощью всех механизмов адаптации. Приводятся примеры сложных систем.

Ключевые слова: адаптация; комбинаторное моделирование; неопределенность; смысл; общая теория систем; физика; астрономия; экономика

Предисловие

В феврале 1955 г. я закончил Ленинградский политехнический институт по специальности «Автоматика и телемеханика» и был распределен на одно из предприятий Министерства среднего машиностроения (теперь это РОСАТОМ), а в декабре 1957 г. поступил в аспирантуру в Институт электро-механики АН СССР в лабораторию А. А. Воронова, и с тех пор моя творческая жизнь была связана с Авениром Аркадьевичем. Середина и конец пятидесятых годов в Ленинграде были отмечены насыщенной научной жизнью, в мае 1953 г. состоялось первое заседание общеленинградского семинара по теории автоматического управления, организованного А. А. Вороновым, в ноябре 1956 г. была открыта секция кибернетики при Доме ученых им. Горького, во главе которой встал профессор Л. В. Канторович, впоследствии академик и лауреат Нобелевской премии по экономике. Это была первая в СССР кибернетическая организация, только в 1959 г. был создан Совет по кибернетике при Президиуме АН СССР в Москве. Именно в Ленинград, на Фонтанку, 25, в Институт электромеханики АН СССР, и в Дом ученых на Неве приезжали все крупные ученые из различных городов, чтобы выступить и обсудить проблемы кибернетики. Я был непременным участником этих междисциплинарных семинаров, и они оказали на меня большое влияние. Именно тогда начала складываться концепция кибернетической картины мира, первоначальный вариант которой был опубликован в 1963 г. в моей монографии «Голономные автоматические системы» под научной редакцией А. А. Воронова, совместно с которым мы опубликовали ряд статей.

Как-то в 1980-х гг. я навесил Авенира Аркадьевича, который отдыхал в санатории «Узкое». Там же отдыхал академик В. С. Пугачёв. Мы втроем гуляли по парку санатория и обсуждали вопросы мироздания и развития теории автоматического управления. Отмечалось, что современная теория управления нацелена на построение исполнительных систем, в то время как в природе большинство систем — это генераторы, которые перестраивают свою работу в зависимости от изменения окружающей среды и изменения целей. Подчеркивалось, что построение теории таких многомерных генераторов с высокой степенью адаптации и структурированной неопределенностью, связанных между собой через сеть, является крайне актуальным. Эта беседа и поддержка авторитетных специалистов вдохновили меня на дальнейшую работу над картиной мира.

Ниже излагается современный вариант кибернетической картины мира.

1 Введение

Успехи современной науки со времен Ньютона неоспоримы, но чем энергичнее внедряются ее результаты в виде различных машин и технологий во все сферы жизни, тем явственнее проступают и недостатки. Один из главных недостатков заключается в том, что современные технологии рассчитаны на использование больших объемов энергии и материалов, на использование больших давлений, напряжений, усилий, температур и т. д., что приводит к загрязнению окружающей среды, истощению

¹Международный институт кибернетики и артоники при Санкт-Петербургском государственном университете аэрокосмического приборостроения, kira@robotek.ru

источников энергии и материалов, гибели живой природы, т. е. к тому, что называют экологическим кризисом.

Истоки этих недостатков лежат в самой парадигме современной науки, ее деятели слишком часто пользовались бритвой Оккама, срезая как бы все лишнее и слишком упрощая проблемы. В итоге сложилось стремление к «гениальной» простоте, физика заполнилась формулами из трех букв вроде закона Ома. И если это было простительно в докомпьютерный век, то с появлением мощных компьютеров, которые буквально входят в каждый дом, неоправданное упрощение недопустимо, непозволительно пренебрежение тонкими сущностями. Информатика имеет дело со слабыми сигналами, которые могут управлять большими процессами. Слабое человеческое слово способно приводить в действие мощные армии. Информатизация всех отраслей человеческой деятельности — это прежде всего выявление возможностей управления с помощью слабых сигналов, слабых по мощности, температуре, напряжению. Но для того, чтобы управлять системами, необходимо иметь новые модели различных процессов, в сами эти модели должна быть заложена возможность информационного управления. В этом сущность процесса информатизации.

В 1988 г. А. А. Воронов писал:

«... Сформулированная Н. И. Вернадским геохимическая концепция биосферы не предполагала действия в живом веществе информационных закономерностей, как и концепция биоценозов В. Н. Сукачева, в которой были сформулированы закономерности массоэнергетического обмена, но не информационных взаимодействий» [1].

Обычно под информатизацией понимается процесс внедрения новых информационных технологий, прежде всего компьютерных и телекоммуникационных, в различные сферы социально-экономической жизни, но этого недостаточно. Люди, в основном, пользуются моделями XIX в.

Ниже рассматривается новый класс моделей, в которых органически присутствует управление, что и определяет кибернетическую картину мира. Любая отрасль науки опирается на модели реальных процессов, в одних отраслях науки эти модели более формализованы, в других — менее, но все они используют естественный язык. Естественный язык — это мощная моделирующая система, созданная усилиями всего человечества, и очень важно разобраться, как работает эта моделирующая система. Из-за особенностей голосовой и слуховой систем человека естественный язык — это линейная последовательность слов, в которой обозначаются слова, а их смысл подразумевается.

Теория должна помогать решать еще не решенные задачи, важнейшей из которых является моделирование плохо формализованных систем. Чтобы превратить различные научные изыскания в технологию, необходимо осуществить большую работу по формализации. Вначале человек формулирует свои мысли на естественном языке **Ячел**, описывает ситуации и задачи на том же естественном языке. Потом, если удастся, строит математическую модель, формулирует задачи на языке основных соотношений **Яос**. Далее эти формулировки переводятся на тот или иной язык программирования **Япр**. Затем разработанная программа реализуется в компьютере на языке конкретной машины **Ямаш**. И как результат решение задачи выдается на языке результата **Ярез** в виде таблиц, графиков, текстов, анимаций и т. д. Ниже показана вся цепочка преобразований:

Ячел → **Яос** → **Япр** → **Ямаш** → **Ярез**.

Главная проблема — как перейти от описания на естественном языке к описанию на языке основных соотношений? Для решения этой проблемы предлагается использовать лингвокомбинаторное моделирование плохо формализованных систем, которое базируется на использовании ключевых слов, основных понятий, сложившихся в предметной области. Модель состоит из трех групп переменных — характеристик основных понятий, изменения этих характеристик и структурированной неопределенности в эквивалентных уравнениях, которая может быть использована для адаптации и управления. В качестве примеров рассмотрим модели атомов, города и Солнечной системы.

2 Лингвокомбинаторное моделирование

Лишь для небольшого числа реальных систем имеются математические модели. Прежде всего системы описываются с помощью естественного языка. Предлагается способ перехода от описания на естественном языке к математическим уравнениям. Например, пусть имеется фраза

$$\text{word}_1 + \text{word}_2 + \text{word}_3. \quad (1)$$

В этой фразе обозначаются слова и только подразумевается смысл. Смысл в сложившейся структуре естественного языка не обозначается. Предлагается ввести понятие смысла в следующей форме:

$$(\text{word}_1)(\text{sense}_1) + (\text{word}_2)(\text{sense}_2) + (\text{word}_3)(\text{sense}_3) = 0. \quad (2)$$

Будем обозначать слова как A_i (от англ. *appearance*), а смыслы — как E_i (от англ. *essence*). Тогда уравнение (2) может быть представлено как

$$A_1 E_1 + A_2 E_2 + A_3 E_3 = 0. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) служат моделями фразы (1). Эта модель является алгебраическим кольцом и можно разрешить уравнение (3) либо относительно A_i , либо относительно E_i путем введения третьей группы переменных — произвольных коэффициентов U_s [2–4]:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= U_1 E_2 + U_2 E_3; \\ A_2 &= -U_1 E_1 + U_3 E_3; \\ A_3 &= -U_2 E_1 - U_3 E_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

или

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= U_1 A_2 + U_2 A_3; \\ E_2 &= -U_1 A_1 + U_3 A_3; \\ E_3 &= -U_2 A_1 - U_3 A_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где U_1, U_2, U_3 — произвольные коэффициенты, которые можно использовать для решения различных задач на многообразии (3).

В общем случае, если имеем n переменных и m многообразий ограничений, то число произвольных коэффициентов S будет равно числу сочетаний из n по $m + 1$ (табл. 1) [5]:

$$S = C_n^{m+1}, \quad n > m. \quad (6)$$

Число произвольных коэффициентов является мерой неопределенности и адаптивности. Лингвокомбинаторное моделирование может опираться на анализ всего корпуса текстов на естественном языке, и это трудоемкая задача по извлечению смыслов для суперкомпьютеров. А может опираться на ключевые слова в конкретной области, что позволяет получать новые модели для конкретных областей знания. В этом случае лингвокомбинаторное моделирование заключается в том, что в конкретной предметной области выделяются ключевые слова,

которые объединяются во фразы типа (1), на основе которых строятся эквивалентные системы уравнений с произвольными коэффициентами. В частном случае они могут быть дифференциальными уравнениями, и тогда при их исследовании может быть использован хорошо разработанный математический аппарат.

Лингвокомбинаторное моделирование включает все комбинации и все варианты решений и является полезным эвристическим приемом при изучении плохо формализованных систем [6–9]. В лингвистической литературе имеется множество трудов, в которых исследуются понятия смысла и значения, но эти теории во многом оказались неконструктивными, что ярко показал Л. Витгенштейн в своей «Голубой книге». Использование в качестве модели фразы (1) уравнения (2) позволяет построить исчисление смыслов, которое хорошо реализуемо на компьютерах. По мнению Д. А. Леонтьева, смысл (будь то смысл текстов, фрагментов мира, образов сознания, душевных явлений или действий) определяется, во-первых, через более широкий контекст и, во-вторых, через интенцию или энтелехию (целевую направленность, предназначение или направление движения). В нашем определении смысла наличествуют эти две характеристики — контекстуальность (смыслы вычисляются исходя из контекста) и интенциональность (произвольные коэффициенты позволяют задавать те или иные устремления).

3 Кибернетическая герменевтика

В древнегреческой мифологии посредником между богами и простыми смертными был Гермес, он должен был истолковывать людям повеления богов, а богам — просьбы людей. Отсюда и ведет свое происхождение термин «герменевтика», первоначально означавший искусство толкования изречений оракулов, древних текстов, знаков, смысла чужого языка и т. д. В средневековье герменевтика была неразрывно связана с теологией, с толкованием отцов церкви. Философская герменевтика возникла в середине XIX в. Ее основоположником был Ф. Шлейермахер, который рассматривал герменевтику как метод всех наук о духе. Он доказывал, что с помощью психологического вживания можно проникнуть во внутренний мир авторов древних текстов, любых исторических деятелей и на этой основе реконструировать исторические события, понять их еще глубже, чем их осознавали сами участники этих событий. Х.-Г. Гадамер стремился отмежеваться от субъективизма своих предшественников, он провозгласил герменевтику уни-

Таблица 1 Число сочетаний из n по m

n	m							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1							
3	3	1						
4	6	4	1					
5	10	10	5	1				
6	15	20	15	6	1			
7	21	35	35	21	7	1		
8	28	56	70	56	28	8	1	
9	36	84	126	126	84	36	9	1

версальной философией нашего времени. По его убеждению, именно «в языке выражается сам мир», становится видимой та действительность, которая «возвышается над сознанием каждого отдельного человека», ибо все, что является предметом познания и высказывания, «всегда окружено мировым горизонтом языка». Для философа-структуралиста Мишеля Фуко язык — это самостоятельная «весомая и плотная реальность», в которую погружен человек и которая наряду с жизнью и трудом детерминирует его бытие. При этом язык трактуется широко и включает «немые привычки мысли», «тайный дух народов» у Фуко или «немотствующее удивление», «немую очарованность» у Гадамера. Гадамер рассматривает язык как опыт мира, как горизонт герменевтической онтологии, как среду герменевтического опыта. Он рассматривает формирование понятия «язык» в истории европейской мысли, язык и логос, язык и *verbum*, язык и образование понятий. Наличие возможности управления в текстах на естественном языке позволяет говорить о кибернетической герменевтике.

Язык смыслов E может быть единым для всех естественных языков с учетом идиоматики. В свое время был предложен в качестве такого единого языка эсперанто, но этот язык был придуман, это один из искусственных языков, которых развелось много в эпоху компьютеризации. Язык смыслов E вычисляется из текстов на различных естественных языках, это, прежде всего, исчисление. В свое время Людвиг Витгенштейн мечтал об исчислении для языка в своей «Голубой книге».

В качестве примера рассмотрим перевод с одного языка на другой. Если имеем фразу на одном языке и при переводе хотим сохранить смысл этой фразы из трех слов, то ключевая форма будет иметь вид:

$$\text{phrase} + \text{word}_1 + \text{word}_2 + \text{word}_3,$$

а после введения смыслов получим:

$$(\text{phrase})(\text{sense}_0) + (\text{word}_1)(\text{sense}_1) + (\text{word}_2)(\text{sense}_2) + (\text{word}_3)(\text{sense}_3) = 0$$

или

$$A_1 E_1 + A_2 E_2 + A_3 E_3 + A_4 E_4 = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно E , получим:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= U_1 A_2 + U_2 A_3 + U_3 A_4; \\ E_2 &= -U_1 A_1 + U_4 A_3 + U_5 A_4; \\ E_3 &= -U_2 A_1 - U_4 A_2 + U_6 A_4; \\ E_4 &= -U_3 A_1 - U_5 A_2 - U_6 A_3. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

На другом языке, где A' — слова на другом языке, будем, в частности, иметь:

$$\begin{aligned} E'_1 &= U_1 A'_2 + U_2 A'_3 + U_3 A'_4, \\ E'_2 &= -U_1 A'_1 + U_4 A'_3 + U_5 A'_4, \\ E'_3 &= -U_2 A'_1 - U_4 A'_2 + U_6 A'_4, \\ E'_4 &= -U_3 A'_1 - U_5 A'_2 - U_6 A'_3. \end{aligned}$$

Чтобы смысл исходной фразы при переводе сохранялся, должно выполняться условие $E_1 = E'_1$, откуда вытекает:

$$U_1(A_2 - A'_2) + U_2(A_3 - A'_3) + U_3(A_4 - A'_4) = 0.$$

Использование этого уравнения определяет поиск слов на другом языке, соответствующих исходному языку в словарях.

В настоящее время библиотеки являются хранилищами книг и журналов, сейчас все они переводятся в цифровую форму, что открывает новые возможности для работы с текстами, для их компьютерной обработки. Библиотеки превращаются в фабрики по извлечению смыслов по заданию пользователей на основе вышеописанных алгоритмов.

Лингвокомбинаторный подход позволяет сформировать кибернетическую картину мира. Все уже существующие теории, гипотезы и мифы оказываются вложенными в эту картину мира, так как они выражены на естественном языке. Более того, все будущие теории, гипотезы и мифы тоже оказываются вложенными в эту кибернетическую картину мира, так как они опять-таки будут выражаться на естественном языке, который непрерывно развивается.

4 Кибернетическая физика

Н. Винер, возродив кибернетику как науку об управлении и связи в живых организмах, машинах и социально-экономических системах, остановился, как перед священной коровой, перед физикой. Но за последние годы накопилось много нерешенных проблем: например, до сих пор не удалось установить связь с инопланетными цивилизациями. Далее стало очевидным, что видимая часть Вселенной — это только 5%, а остальное — темная материя и темная энергия, и нет единого мнения, что это за структуры. И список нерешенных проблем можно продолжить, что побуждает к поиску новых моделей.

Перейдем к построению лингвокомбинаторных моделей атомов, при этом будем исходить из ключевых базовых понятий, которые уже сложились в науке. Рассмотрим в качестве примера атом водорода и в качестве ключевых возьмем слова «атом»,

«протон», «электрон», тогда фраза (1) будет иметь вид:

atom + proton + electron .

И в эквивалентных уравнениях (3)–(5) A_1 — характеристика *атома* водорода, E_1 — изменение этой характеристики, A_2 — характеристика *протона*, E_2 — изменение этой характеристики, A_3 — характеристика *электрона*, E_3 — изменение этой характеристики. Для моделирования дейтерия используем ключевые слова «атом», «протон», «электрон», «нейтрон»:

atom + proton + electron + neutron

и эквивалентные уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= U_1 A_2 + U_2 A_3 + U_3 A_4; \\ E_2 &= -U_1 A_1 + U_4 A_3 + U_5 A_4; \\ E_3 &= -U_2 A_1 - U_4 A_2 + U_6 A_4; \\ E_4 &= -U_3 A_1 - U_5 A_2 - U_6 A_3, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ — произвольные коэффициенты; A_1 — характеристика *атома* дейтерия; E_1 — изменение этой характеристики; A_2 — характеристика *протона* атома дейтерия; E_2 — изменение этой характеристики; A_3 — характеристика *электрона* атома дейтерия; E_3 — изменение этой характеристики; A_4 — характеристика *нейтрона* атома дейтерия; E_4 — изменение этой характеристики. В случае атомных реакций возможно превращение дейтерия в водород посредством трансформации уравнений (8) в уравнения (4). Аналогичным образом возможно построение лингвокомбинаторных моделей всех известных элементов таблицы Менделеева и их изотопов и возможных новых элементов. Из структуры этих моделей вытекает наличие блока управления, который может манипулировать произвольными коэффициентами, т. е. такая модель атома — это модель атома с блоком управления [10], разработка которой позволит осуществлять информационное воздействие на атомы. Это еще один путь для компьютерного моделирования физико-химических реакций. При этом необходимо решать задачу верификации таких моделей применительно к конкретным системам.

В качестве ключевых слов можно использовать основные понятия физики — материю, энергию, пространство и время, взаимодействие между ними будет описываться уравнениями (8), где A_1 — характеристика материи; E_1 — изменение этой характеристики; A_2 — характеристика энергии; E_2 — изменение этой характеристики; A_3 — характеристика пространства; E_3 — изменение этой характеристики; A_4 — характеристика времени; E_4 —

изменение этой характеристики, и все это нанизывается на матрицу произвольных коэффициентов структурированной неопределенности.

Структурная стабильность, совокупность устойчивых связей объекта, обеспечивающих его целостность и тождественность самому себе, т. е. сохранение основных свойств при различных внешних и внутренних воздействиях, обеспечивается адаптационными возможностями атомных и молекулярных систем [7]. В представленных лингвокомбинаторных моделях адаптационные возможности систем определяются числом произвольных коэффициентов в структуре эквивалентных уравнений, а наибольшая структурная стабильность достигается в зоне адаптационного максимума, который обнаруживается у различных систем с числом переменных больше шести (см. табл. 1). Для удержания систем в зоне адаптационного максимума можно использовать различные методы — рост числа переменных, наложение и снятие ограничений, объединение систем в коллективы. Действительно, если имеем две системы:

$$S_1 = C_{n_1}^{m_1+1}; \quad S_2 = C_{n_2}^{m_2+1},$$

то путем наложения общих ограничений m_{col} получим коллектив:

$$S_{col} = C_{n_1+n_2}^{m_1+m_2+m_{col}+1}. \quad (9)$$

При этом в зависимости от конкретных параметров может быть $S_{col} > S_1 + S_2$, когда объединение в коллектив приводит к росту адаптационных возможностей, а может быть $S_{col} < S_1 + S_2$, когда адаптационные возможности меньше суммы адаптационных возможностей исходных систем. Лингвокомбинаторное моделирование может явиться полезным инструментом при анализе и синтезе атомно-молекулярных систем.

5 Кибернетическая астрономия и астрофизика

Человечество издревле наблюдало и изучало космос, который, безусловно, влиял на развитие человечества. В процессе своего развития человечество создавало самые различные артефакты — здания, дороги, машины и т. д., но самым значительным артефактом, созданным человечеством, является естественный язык, который вобрал и вбирает все знания, навыки, учения, созданные людьми на сознательном и подсознательном уровне. Поэтому очевидно стремление обратиться к естественному языку для того, чтобы глубже понять, как устроена Вселенная [11–14].

Если обратиться к моделированию Солнечной системы, то в качестве ключевых слов можно взять Солнце, Меркурий, Венеру, Землю, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон — 10 переменных, в структуре эквивалентных уравнений этой системы будет содержаться 45 произвольных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= U_1A_2 + U_2A_3 + U_3A_4 + U_4A_5 + U_5A_6 + \\
 &\quad + U_6A_7 + U_7A_8 + U_8A_9 + U_9A_{10}; \\
 E_2 &= -U_1A_1 + U_{10}A_3 + U_{11}A_4 + U_{12}A_5 + U_{13}A_6 + \\
 &\quad + U_{14}A_7 + U_{15}A_8 + U_{16}A_9 + U_{17}A_{10}; \\
 E_3 &= -U_2A_1 - U_{10}A_2 + U_{18}A_4 + U_{19}A_5 + U_{20}A_6 + \\
 &\quad + U_{21}A_7 + U_{22}A_8 + U_{23}A_9 + U_{24}A_{10}; \\
 E_4 &= -U_3A_1 - U_{11}A_2 - U_{18}A_3 + U_{25}A_5 + U_{26}A_6 + \\
 &\quad + U_{27}A_7 + U_{28}A_8 + U_{29}A_9 + U_{30}A_{10}; \\
 E_5 &= -U_4A_1 - U_{12}A_2 - U_{19}A_3 - U_{25}A_4 + U_{31}A_6 + \\
 &\quad + U_{32}A_7 + U_{33}A_8 + U_{34}A_9 + U_{35}A_{10}; \\
 E_6 &= -U_5A_1 - U_{13}A_2 - U_{20}A_3 - U_{26}A_4 - U_{31}A_5 + \\
 &\quad + U_{36}A_7 + U_{37}A_8 + U_{38}A_9 + U_{39}A_{10}; \\
 E_7 &= -U_6A_1 - U_{14}A_2 - U_{21}A_3 - U_{27}A_4 - U_{32}A_5 - \\
 &\quad - U_{36}A_6 + U_{40}A_8 + U_{41}A_9 + U_{42}A_{10}; \\
 E_8 &= -U_7A_1 - U_{15}A_2 - U_{22}A_3 - U_{28}A_4 - U_{33}A_5 - \\
 &\quad - U_{37}A_6 - U_{40}A_7 + U_{43}A_9 + U_{44}A_{10}; \\
 E_9 &= -U_8A_1 - U_{16}A_2 - U_{23}A_3 - U_{29}A_4 - U_{34}A_5 - \\
 &\quad - U_{38}A_6 - U_{41}A_7 - U_{43}A_8 + U_{45}A_{10}; \\
 E_{10} &= -U_9A_1 - U_{17}A_2 - U_{24}A_3 - U_{30}A_4 - U_{35}A_5 - \\
 &\quad - U_{39}A_6 - U_{42}A_7 - U_{44}A_8 - U_{45}A_9.
 \end{aligned}$$

В этой системе уравнений A_1 — характеристика Солнца; E_1 — изменение этой характеристики; A_2 — характеристика Меркурия; E_2 — изменение этой характеристики; ... ; U_1, U_2, \dots, U_{45} — произвольные коэффициенты, наличие которых определяет возможность управления характеристиками. Выявление этой новой возможности управления важно для человечества ввиду астероидной опасности. Наша планета хранит свидетельства разрушительного воздействия астероидов, падение которых вызывало глобальные катастрофы. В настоящее время налаживается мониторинг околоземного пространства и выявляются все новые и новые аспекты астероидной опасности. Для борьбы с астероидной опасностью планируется использовать всю мощь накопленного ядерного оружия землян, но в случае если размеры астероида будут превышать 10 км в диаметре, то и это средство не поможет. Единственная надежда — на открытие новых способов управления планетарными процессами. Аналогичным образом возможно моделиро-

вание галактик и их взаимодействия. Обратимся к анализу предложенной модели.

Во-первых, когда речь идет о системе, это значит, что из всего выделяется часть — система — и рассматривается ее взаимодействие с оставшимся, с окружающей средой. Также и с Солнечной системой — выделив планеты, можно рассматривать как взаимодействие между ними, так и воздействие остального космоса на всю Солнечную систему. Солнечная система существует в потоке переменных воздействий остального космоса, и ее устойчивость зависит от ее адаптационных возможностей, которые определяются числом произвольных коэффициентов. В данном случае это число 45, в общем случае оно определяется формулой (6). Как очевидно из этой формулы, в зависимости от числа наложенных ограничений для числа переменных больше шести количество произвольных коэффициентов будет сначала возрастать, достигнет максимума, а потом начнет уменьшаться. Это явление в теории систем называется феноменом адаптационного максимума [2, 12, 15], в зоне адаптационного максимума система обладает максимальными адаптационными возможностями. Можно предположить, что в процессе эволюции адаптационные возможности Солнечной системы изменяются в соответствии с формулой (6), что можно подтвердить или опровергнуть соответствующими исследованиями. Формула (6) может быть основой для объяснения ритмов развития как Солнечной системы в целом, так и Солнца в частности, а также галактических систем.

Во-вторых, о прямых и обратных задачах. Прямая задача связана с моделированием следствия по заданной причине. В обратной задаче требуется восстановить причину по известному следствию. Прямая задача имеет единственное и устойчивое к малым возмущениям решение. Для обратной задачи единственность решения может нарушаться, так как различные причины могут вызвать одно и то же следствие. Если обратиться к движению планет, которое наблюдается людьми много тысяч лет, то этот феномен может быть по-разному объяснен. Существовала система Птолемея, потом были открыты законы Кеплера, потом законы Ньютона. Если взять за основу законы Ньютона, то по ним можно рассчитать траектории движения планет. Но исходя из других соображений тоже можно получить такое же движение планет, такой же феномен. Это обратная задача, которая имеет множество решений [14]. Лингвокомбинаторное моделирование позволяет построить множество различных генераторов таких же движений.

В-третьих, в современной науке и в обществе получили большое распространение понятия «управ-

ление», «информация», и они пронизывают биологические науки (от генетики до высшей нервной деятельности), социально-экономические науки, технические науки. Но эти понятия, можно сказать, исключены из физики, и астрономии в частности. Конечно, и астрономия, и физика сформировались довольно давно, когда понятия «управление» и «информация» не были разработаны, но в настоящее время вызывает недоумение отсутствие этих понятий при объяснении многих астрономических и физических явлений. Если исходить из этой точки зрения, то насущной задачей астрофизики должен стать поиск центров управления, систем связи и самой возможности управления малыми воздействиями, вызывающими большие последствия в планетарных и галактических системах. В 1949 г. Винер возродил кибернетику, опубликовав книгу «Управление и связь в животном и машине», но он не стал распространять принципы кибернетики на физику. В настоящее время рассматривается вопрос о создании кибернетической физики, в которой вопросы управления займут достойное место.

Уже существует гипотеза Гея, в которой рассматривается вся планета Земля как живая система. Можно высказать гипотезу о живой Вселенной со своей нервной системой.

В-четвертых, еще в Древней Греции Анаксимандром была высказана гипотеза о существовании апейрона — субстанции, которая пронизывает вся и все. В свете развиваемой нами теории апейрон — физическая символная структура, которая реализует структурированную неопределенность в виде произвольных коэффициентов U , субстанции U . Структурированной неопределенности противостоит хаос — неструктурированная неопределенность. Структурированная неопределенность — основа жизни во Вселенной. В свете развиваемой теории вакуум — это непрерывно перестраиваемая матрица структурированной неопределенности, в которой заполнение матрицы идентифицируется с назначением конкретных значений произвольным коэффициентам U . Перед астрономами и астрофизиками стоит задача обнаружения центров управления планетарными и галактическими системами. Эти идеи перекликаются с идеями К. Э. Циолковского, 150-летие со дня рождения которого отмечалось в 2007 г.

6 Кибернетическая экономика

В качестве другого примера рассмотрим проблему моделирования города. Если в качестве ключевых взять слова «население», «пассионарность», «территория», «производство», «экология и безо-

пасность», «финансы», «внешние связи», то в соответствии с вышеизложенной методикой уравнение города будет:

$$A_1 E_1 + A_2 E_2 + \dots + A_7 E_7 = 0, \quad (10)$$

а эквивалентные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} E_1 &= U_1 A_2 + U_2 A_3 + U_3 A_4 + U_4 A_5 + \\ &\quad + U_5 A_6 + U_6 A_7; \\ E_2 &= -U_1 A_1 + U_7 A_3 + U_8 A_4 + U_9 A_5 + \\ &\quad + U_{10} A_6 + U_{11} A_7; \\ E_3 &= -U_2 A_1 - U_7 A_2 + U_{12} A_4 + U_{13} A_5 + \\ &\quad + U_{14} A_6 + U_{15} A_7; \\ E_4 &= -U_3 A_1 - U_8 A_2 - U_{12} A_3 + U_{16} A_5 + \\ &\quad + U_{17} A_6 + U_{18} A_7; \\ E_5 &= -U_4 A_1 - U_9 A_2 - U_{13} A_3 - U_{16} A_4 + \\ &\quad + U_{19} A_6 + U_{20} A_7; \\ E_6 &= -U_5 A_1 - U_{10} A_2 - U_{14} A_3 - U_{17} A_4 - \\ &\quad - U_{19} A_5 + U_{21} A_7; \\ E_7 &= -U_6 A_1 - U_{11} A_2 - U_{15} A_3 - U_{18} A_4 - \\ &\quad - U_{20} A_5 - U_{21} A_6. \end{aligned}$$

где A_1 — характеристика населения, которая включает в себя характеристики здоровья, образования, занятости; E_1 — изменение этой характеристики; A_2 — характеристика *пассионарности*, устремлений групп населения: люди обладают свободой выбора при принятии решений и этот выбор является важным, что оценивается путем социологического анализа; E_2 — изменение этой характеристики; A_3 — характеристика *территории*, включая наземные и подземные постройки, этот блок может быть геоинформационной системой; E_3 — изменение этой характеристики; A_4 — характеристика производства, включающая оценку различных видов деятельности — научной, производственной, транспортной, торговой и др.; E_4 — изменение этой характеристики; A_5 — характеристика *экологии и безопасности*; E_5 — изменение этой характеристики; A_6 — характеристика *финансов*, финансовых потоков и запасов в городе; E_6 — изменение этой характеристики; A_7 — характеристика *внешних связей* города, включающая оценку входящих и выходящих потоков людей, энергии, материалов, информации, финансов; E_7 — изменение этой характеристики; U_1, U_2, \dots, U_{21} — произвольные коэффициенты, которые могут быть использованы для управления и решения различных задач на многообразии (10).

Эта модель (рис. 1) используется в системах для поддержки принятия решений городскими властями [16].

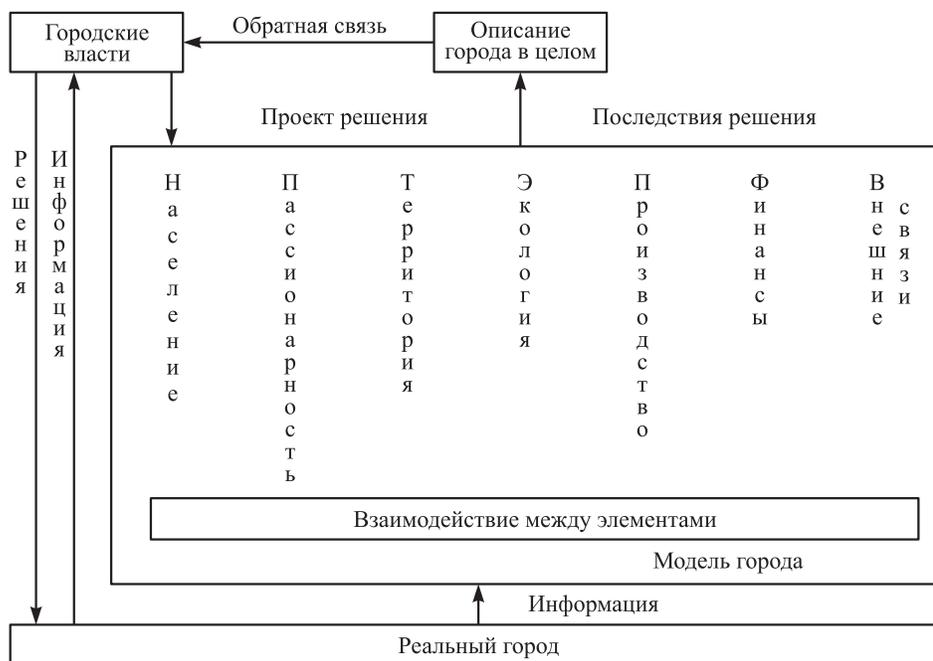


Рис. 1 Моделирование города для поддержки управленческих решений

7 Адаптационные возможности сложных систем

В структуре эквивалентных уравнений систем со структурированной неопределенностью есть произвольные коэффициенты, которые можно использовать для приспособления систем к различным изменениям, чтобы повысить точность и надежность функционирования систем, их живучесть в потоке перемен. В жизненном цикле сложных развивающихся систем обнаруживается феномен адаптационного максимума.

Социально-экономические системы: семья, предприятия, банки, города, села, регионы, страны — проходят сложный путь развития, находясь под воздействием различных внутренних и внешних факторов. Одни предприятия и банки процветают, другие терпят крах и банкротятся, одни города и страны развиваются, другие переживают стагнацию, о чем свидетельствует мировая статистика. Все эти социально-экономические системы являются сложными развивающимися системами, и в жизненном цикле этих систем проявляются закономерности, свойственные многомерным системам.

Важной закономерностью, оказывающей значительное влияние на социально-экономические системы, является феномен наличия адаптационного максимума, который заключается в следующем [2–4].

Установлена ранее неизвестная закономерность наличия адаптационного максимума в жизненном цикле сложных развивающихся систем, заключающаяся в том, что при наложении ограничений на систему из n переменных ($n > 6$) число произвольных коэффициентов в структуре эквивалентных уравнений, описывающих поведение системы, сначала возрастает, достигает максимума, а потом начинает убывать. Соответственно изменяются адаптационные возможности системы — сначала они растут, достигают максимума, а потом начинают убывать, и если наложение ограничений продолжается, то система делается жесткой и погибает в потоке перемен окружающей среды. Отсюда вытекает стратегия управления различными сложными системами — ими нужно управлять так, чтобы удерживать в зоне адаптационного максимума, если хотим обеспечить их живучесть в потоке перемен.

Уже давно известно, что существуют ритмы в биологических системах. Например, из результатов переписи населения (табл. 2) ясно видно наличие минимума смертности для людей в возрасте 10–14 лет, при этом следует отметить, что он сохраняется независимо от социально-экономических условий — и в период 1896–1897 гг., и в период 1984–1985 гг., но объяснения этому минимуму смертности не было. Из статистики развития экономики известны циклы Кондратьева и другие циклические явления в экономике как отдельных

Таблица 2 Результаты переписи населения

Возраст	Годы					
	1896–1897	1958–1959	1969–1970	1978–1980	1982–1983	1984–1985
0–4	133,0	11,9	6,9	8,1	7,9	7,7
5–9	12,9	1,1	0,7	0,7	0,6	0,6
10–14	5,4	0,8	0,6	0,5	0,5	0,5
15–19	5,8	1,3	1,0	1,0	1,0	0,9
20–24	7,6	1,8	1,6	1,7	1,6	1,5
25–29	8,2	2,2	2,2	2,3	2,2	2,0
30–34	8,7	2,6	2,8	2,9	2,9	2,8
35–39	10,3	3,1	3,7	4,3	3,8	3,6
40–44	11,8	4,0	4,7	5,4	5,6	5,7
45–49	15,7	5,4	6,0	7,8	7,4	7,3
50–54	18,5	7,9	8,7	10,3	10,9	11,3

предприятий, так и более крупных экономических образований. В технических системах известны периоды максимальной надежности и устойчивости систем.

Предложенная математическая модель развивающихся систем позволяет говорить о наличии закономерности адаптационного максимума, которая объясняет многочисленные факты и позволяет предсказывать поведение сложных систем.

Система — целостная совокупность элементов, в которой все элементы настолько тесно связаны между собой, что она выступает по отношению к другим системам и окружающей среде как нечто единое.

На рис. 2 представлена схема, где система взаимодействует со средой и использует два механизма адаптации: (а) настройку или самонастройку системы с помощью произвольных коэффициентов в структуре эквивалентных уравнений систе-

мы; (б) обучение или самообучение системы, которое заключается в наложении новых ограничений на систему. Кроме этих механизмов адаптации возможны и другие, такие как рост числа переменных системы, размножение, эффективное забывание, ограничение контактов со средой, объединение систем в коллектив и др. В общем случае число произвольных коэффициентов S в структуре эквивалентных уравнений системы определяется как число сочетаний из n по $m + 1$ и определяется формулой (6) (см. табл. 1).

Сложная система — это система, в которой проявляется феномен адаптационного максимума, т. е. система с числом переменных больше шести.

На рис. 2 представлена схема взаимодействия вышеописанной системы с окружающей средой, где переменные системы x_1, \dots, x_k взаимодействуют с переменными среды y_1, \dots, y_k , а сигналы расогласования передаются в блок управления. При

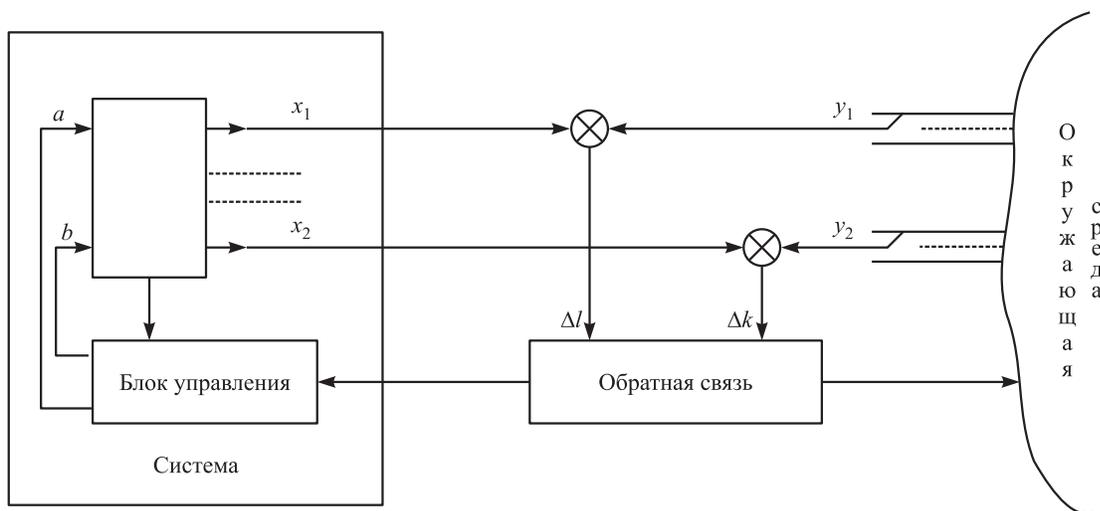


Рис. 2 Модель «среда–система»

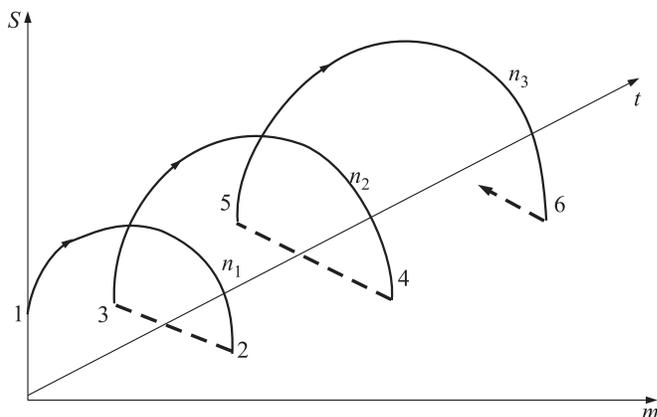


Рис. 3 Трансформация развивающейся системы, $n_1 < n_2 < n_3$, траектория системы: 1–2–3–4–5–6–...

этом у системы есть две возможности приспособиться к изменениям в среде: это, во-первых, настройка путем манипуляции произвольными коэффициентами, и чем больше этих коэффициентов, тем выше адаптационные возможности, и, во-вторых, обучение, наложение новых ограничений на переменные системы. В режиме непрерывного обучения число произвольных коэффициентов изменяется в соответствии с уравнениями (7), и это приводит к появлению циклов в развитии систем, что иллюстрируется на рис. 3, где цикл развития системы начинается в точке 1, проходит через максимум в числе произвольных коэффициентов и заканчивается в точке 2, где должна наступить трансформация, сброс ранее накопленных ограничений. Далее начинается в точке 3 новый цикл, опять система проходит через максимум адаптационных возможностей, достигает точки 4, где опять происходит трансформация, и система начинает новый цикл в точке 5 и т.д. Эта модель позволяет объяснить наличие циклов в развитии сложных биологических, социально-экономических и технических систем.

Предложенная модель процессов самоорганизации сложных развивающихся систем реализует закономерность наличия адаптационного максимума в жизненном цикле систем в потоке перемен. Жизненный цикл — совокупность фаз развития, пройдя через которые система достигает зрелости и становится способной эффективно функционировать и дать начало новому поколению.

Как показывает статистика, существуют циклы в развитии экономики, в частности циклы Кондратьева. Учет закономерности наличия адаптационного максимума позволяет объяснить эти циклы. Надежность сложных человеко-машинных комплексов достигает своего максимума в зоне адаптационного максимума, и технические системы должны строиться таким образом, чтобы при

изменении этих систем они оставались в зоне адаптационного максимума как можно дольше.

8 Заключение

Лингвокомбинаторное моделирование позволяет сформировать новую картину мира, которая опирается на все достижения современной науки и, прежде всего, информатики. Лингвокомбинаторная картина мира состоит из трех групп переменных: во-первых, это явления (*appearances*), во-вторых, это смыслы (*essences*), в-третьих, это структурированная неопределенность (*structural uncertainty*), — из которых состоят все неживые и живые системы. Существуют различные подходы к описанию систем с неопределенностью. Один из них — вероятностный подход, в развитие которого внес фундаментальный вклад В. С. Пугачёв. Другой подход связан с нечеткими множествами, предложенными американским профессором Л. Заде. Он любил посещать нашу страну. Беседы с академиком А. А. Вороновым и В. С. Пугачёвым и профессором Л. Заде подтолкнули меня к разработке лингвокомбинаторного моделирования. Беседы протекали в санатории «Узкое», портик его олицетворяет теорию сложных систем, которая опирается на колонны — научные направления: теорию автоматического управления, кибернетику и синергетику, информатику и вычислительную технику и системный анализ.

Литература

1. Информационные проблемы изучения биосферы. Комплекс характеристик природных систем: Сб. науч. тр. / Под ред. А. А. Воронова, В. В. Бугровского. — М.: Наука, 1988.

2. *Игнатьев М. Б.* Голономные автоматические системы. — М.—Л.: АН СССР, 1963.
3. *Ignatyev M. B., Makina D. M., Petrishev N. N., Poliakov I. V., Ulrich E. V., Gubin A. V.* Global computer model of organism for decision making support in telemedicine // High Performance Computing Symposium (HPC-2000) Proceedings / Ed. A. Tentner. — Washington, D.C., USA, 2000. P. 66–71.
4. *Ignatyev M. B.* Linguo-combinatorial method for complex systems simulation // 6th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics Proceedings. Vol. XI. Computer science II. — Orlando, USA, 2002. P. 224–227.
5. *Воронов А. А., Бунич П. Г., Моделевский М. Ш. и др.* Океан: экономические проблемы освоения. — М.: Экономика, 1975.
6. *Игнатьев М. Б.* Роботы на основе нанотехнологий и пути перехода из одной мировой точки в другую // Вестник Северо-Западного отделения Метрологической академии. Вып. 2. — СПб., 1998. С. 46–51.
7. *Бейдер Р.* Атомы в молекулах. — М.: Мир, 2001.
8. *Игнатьев М. Б.* Кибернетическая физика и пути перехода из одной мировой точки в другую // Фундаментальные исследования и инновации в технических университетах: Мат-лы XI Всеросс. конф. по проблемам науки и высшей школы. Санкт-Петербург, 18–19 мая 2007. — СПб.: СПбГПУ, 2007. С. 72–82.
9. *Ignatyev M. B.* Semantics and self-organization in nanoscale physics // Int. J. Computing Anticipatory Systems / Ed. D. Dubois. — Liege, Belgium: HEC-ULg, 2008. Vol. 22. P. 17–23.
10. *Игнатьев М. Б.* Самоорганизующиеся робототехнические системы и игра в футбол // Сб. тр. I Международной конференции по механотронике и робототехнике. Т. 2. — СПб., 2000. С. 127–131.
11. *Гушанская Е. М., Игнатьев М. Б., Игнатьев К. М. и др.* Компьютерные игры. — Л.: Лениздат, 1988. 168 с.
12. *Ignatiev M. B.* Simulation of adaptational maximum phenomenon in developing systems // 1993 International Simulation Technology Conference (SIMTEC'93) Proceedings. San Francisco, USA, 1993. P. 41–42.
13. *Игнатьев М. Б.* Рекурсивные вычислительные машины // Информационно-управляющие системы, 2004. № 5. С. 54–57.
14. *Игнатьев М. Б.* Роботы, аватары и люди как системы со структурированной неопределенностью // Философия искусственного интеллекта: Мат-лы Всеросс. междисциплинарной конф. — М., 2005. С. 1005–1010.
15. *Игнатьев М. Б.* Закономерность изменения адаптационных возможностей в жизненном цикле сложных развивающихся систем. Диплом № 25-S на открытие в области кибернетики и системного анализа с приоритетом от 28.06.1963.
16. *Архитектура виртуальных миров / Под ред. М. Б. Игнатьева, А. В. Никитина, А. Е. Войскунского.* — СПб., 2009. 300 с.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

А. В. Пантелеев¹, К. А. Рыбаков²

Аннотация: Предложен новый метод нахождения оптимального в среднем управления при неполной информации о векторе состояния для многомерных нелинейных стохастических систем, основанный на спектральной форме математического описания. Получены соотношения для определения оптимального в среднем управления с использованием спектральной формы математического описания. Разработано методическое обеспечение синтеза оптимального в среднем управления при неполной информации о векторе состояния, его эффективность продемонстрирована на решении модельной задачи синтеза оптимальной двумерной стохастической системы при различных условиях информированности.

Ключевые слова: оптимальное управление; синтез при неполной информации; спектральный метод; спектральное преобразование; спектральная форма математического описания; стохастическая система; уравнение Беллмана; уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

1 Введение

В работе рассматривается задача синтеза оптимального управления нелинейными стохастическими системами при неполной информации о векторе состояния [1, 2], математические модели которых описываются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито [3].

Существующие методы решения задачи синтеза нелинейных стохастических систем применимы лишь в частных случаях [2]. В связи с этим для синтеза оптимального управления предлагается новый метод, основанный на спектральной форме математического описания систем управления [4].

В основе спектрального метода лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций (базисной системе), заданной в общем случае на нестационарном отрезке. Базовыми понятиями метода являются: спектральное преобразование, нестационарные спектральные характеристики (спектральные характеристики функций) и нестационарные передаточные функции (спектральные характеристики линейных операторов).

Спектральный метод анализа линейных детерминированных и стохастических систем управления был разработан в конце 1960-х гг. профессором В. В. Семеновым и затем обобщен для анализа нелинейных детерминированных систем. Дальнейшее развитие спектрального метода связано с решением задачи анализа нелинейных стохастических систем.

В [5] введено понятие обобщенной характеристической функции — спектральной характеристики плотности вероятности вектора состояния стохастической системы, однако для получения уравнения обобщенной характеристической функции как спектрального аналога уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова спектральное преобразование применялось только по координатам вектора состояния и, таким образом, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В [6, 7] для вывода уравнения обобщенной характеристической функции спектральное преобразование применяется и по координатам вектора состояния, и по переменной времени, что позволяет свести уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова к линейному матричному уравнению и получить его решение в явном виде.

Следующий этап — это применение спектральной формы математического описания к решению задачи синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления, что и является основной целью данной работы. Отметим, что полученные результаты базируются, с одной стороны, на использовании математического аппарата спектрального метода, а с другой стороны, на теории оптимального управления нелинейными стохастическими системами при неполной информации о векторе состояния [1, 2].

В [8] была предпринята первая попытка применения спектральной формы математического опи-

¹Московский авиационный институт, кафедра математической кибернетики, avpanteleev@inbox.ru

²Московский авиационный институт, кафедра математической кибернетики, rkoffice@mail.ru

сания к задаче синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления частного вида. Работа [8] являлась логическим продолжением [5], поэтому для вывода соотношений, необходимых при нахождении оптимального управления в спектральной форме, спектральное преобразование применялось только по координатам вектора состояния; в [8] так и не был сформирован эффективный алгоритм решения поставленной задачи, но, безусловно, эта работа была важным этапом в развитии спектральных методов синтеза.

В настоящей работе соотношения для определения оптимального управления [1, 2], а именно система уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова и Беллмана, с помощью спектрального преобразования сводятся к системе нелинейных уравнений для коэффициентов разложения координат оптимального управления и оптимальной плотности вероятности вектора состояния в ряд по функциям базисной системы. Вид этой системы нелинейных уравнений не зависит от выбора базисной системы, а ее решение проще, нежели исходная задача. Оно осуществляется либо итерационными методами, либо методом сведения к эквивалентной задаче безусловной оптимизации с последующим применением методов нулевого порядка, в том числе метаэвристических методов поиска глобального экстремума [9, 10].

Применение метаэвристических алгоритмов совместно со спектральной формой математического описания может позволить решить ряд актуальных научно-технических задач проектирования современных образцов ракетно-космической и авиационной техники, поскольку показатели качества сравниваемых вариантов, как правило, описываются нелинейными зависимостями и оцениваются при помощи сложных моделирующих алгоритмов, что обуславливает высокую трудоемкость вычислений. Их использование позволит решить задачи поиска глобального экстремума многоэкстремальных функций, зависящих от достаточно большого числа переменных (нескольких сотен) со сложным рельефом поверхностей уровня, возникающие при применении соответствующих условий оптимальности в задачах оптимального управления нелинейными стохастическими системами.

Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задач анализа и синтеза систем управления различных классов.

Данная работа является развитием теории спектрального метода и методов приближенного решения задачи синтеза оптимального управления нелинейными стохастическими системами [4–8].

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, математическая модель которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [1–3]:

$$\left. \begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t), u(t)) dt + \\ &\quad + \sigma(t, X(t), u(t)) dW(t); \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ — вектор управления; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ — заданный отрезок времени функционирования системы; $W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0 ; $f(t, x, u): T \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вектор-функция размеров $n \times 1$, $\sigma(t, x, u): T \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — матричная функция размеров $n \times s$.

Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\phi_0(x)$. Функции $f(t, x, u)$ и $\sigma(t, x, u)$ задают структуру системы управления.

Предполагается, что при управлении используется информация о времени и величине первых m координат вектора состояния ($0 \leq m \leq n$), т. е. $X = [X_{(1)} X_{(2)}]^T$, где о координатах вектора $X_{(1)} = [X_1 X_2 \dots X_m]^T \in \mathbb{R}^m$ текущая информация известна, а о координатах вектора $X_{(2)} = [X_{m+1} \dots X_n]^T \in \mathbb{R}^{n-m}$ отсутствует. Управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T$, имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния (рис. 1): $u(t) = u(t, X_{(1)}(t))$.

Число m определяется условиями информированности. При $m = n$ имеется информация о всех координатах вектора X и система, представленная на рис. 1, будет системой с полной обратной связью, а при $m = 0$ — системой, разомкнутой по состоянию, где применяется программное управление $u(t)$.

Множество допустимых управлений \mathcal{U}_m состоит из функций $u(t, x_{(1)}): T \times \mathbb{R}^m \rightarrow U$ таких, что выполняются условия существования и единственности [11, 12] решения задачи (1), а плотность вероятности вектора состояния удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_{u(\cdot)} \phi(t, x) \quad (2)$$

с начальным условием $\phi(t_0, x) = \phi_0(x)$, где $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$ — линейный оператор, задаваемый выражением

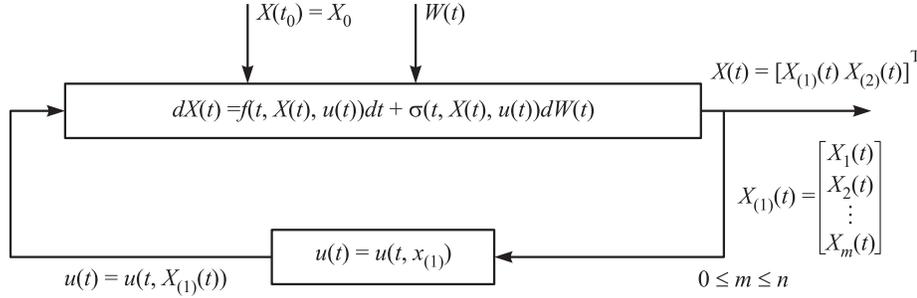


Рис. 1 Структура стохастической системы управления

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{A}_{u(\cdot)}\phi(t, x) = \\ & = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x, u(t, x_{(1)}))\phi(t, x)] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x, u(t, x_{(1)}))\phi(t, x)] ; \\ & g_{ij}(t, x, u) = \sum_{r=1}^s \sigma_{ir}(t, x, u)\sigma_{jr}(t, x, u). \end{aligned} \right\} (3)$$

Обозначим через \mathfrak{D}_m множество пар $d_m = (\phi(t, x), u(t, x_{(1)}))$, где функции $\phi(t, x)$ и $u(t, x_{(1)}) \in \mathfrak{U}_m$ удовлетворяют уравнению (2) с начальным условием $\phi(t_0, x) = \phi_0(x)$. Определим на множестве \mathfrak{D}_m функционал качества управления:

$$J(d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(t, x, u(t, x_{(1)}))\phi(t, x) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\phi(t_1, x) dx, \quad (4)$$

где $f_0(t, x, u): T \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям [12], которые гарантируют конечность величины (4).

Задача синтеза оптимальных стохастических систем управления состоит в следующем: по заданному уравнению системы (1), плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0 , условиям информированности (величине m) и функционалу (4) требуется найти такой элемент $d_m^* = (\phi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$, что

$$J(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(d_m).$$

Таким образом, проведена редукция исходной стохастической задачи к детерминированной проблеме управления решением уравнения в частных производных (2).

Для решения задачи синтеза оптимальных стохастических систем будем использовать спектральную форму математического описания, но прежде

приведем основные соотношения для определения оптимального управления.

Известно [1, 2], что задача нахождения оптимальной пары $d_m^* = (\phi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)}))$ (точнее пары, «подозрительной на оптимальность») сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi^*(t, x)}{\partial t} &= \mathcal{A}_{u^*(\cdot)}\phi^*(t, x); \\ \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} &= -\mathcal{A}_{u^*(\cdot)}\psi(t, x) + f_0(t, x, u^*(t, x_{(1)})), \end{aligned} \right\} (5)$$

где $\psi(t, x)$ — вспомогательная функция, при условии

$$\phi^*(t_0, x) = \phi_0(x); \quad \psi(t_1, x) = -F(x). \quad (6)$$

Структура оптимального управления имеет вид:

$$u^*(t, x_{(1)}) = \arg \max_{u \in U} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} g_{ij}(t, x, u) - f_0(t, x, u) \right\} \times \phi^*(t, x_{(2)} | x_{(1)}) dx_{(2)}, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \phi^*(t, x_{(2)} | x_{(1)}) &= \frac{\phi^*(t, x)}{\phi^*(t, x_{(1)})}; \\ \phi^*(t, x_{(1)}) &= \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \phi^*(t, x) dx_{(2)}. \end{aligned} \right\} (8)$$

Во втором уравнении системы (5) $\mathcal{A}_{u^*(\cdot)}^*$ — сопряженный оператор по отношению к оператору $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{u^*(\cdot)}^*\psi(t, x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u(t, x_{(1)})) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} g_{ij}(t, x, u(t, x_{(1)})), \end{aligned}$$

а в выражении (8) $\phi(t, x_{(1)})$ — маргинальная плотность вероятности, характеризующая распределение вектора $X_{(1)}$, $\phi(t, x_{(2)}|x_{(1)})$ — условная плотность вероятности, характеризующая распределение вектора $X_{(2)}$ при условии $X_{(1)} = x_{(1)}$.

Следовательно, искомое оптимальное в среднем управление $u^*(t, x_{(1)})$ и оптимальную плотность вероятности $\phi^*(t, x)$ можно найти в результате решения системы уравнений (5) с условием (6) совместно с (7), (8), при этом минимум функционала (4) можно подсчитать по формуле [2]:

$$\min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(d_m) = - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t_0, x) \phi_0(x) dx. \quad (9)$$

Заметим, что решение уравнений (5) понимается в обобщенном смысле [13].

3 Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом

Необходимые для дальнейшего изложения краткие теоретические сведения, связанные с определением многомерных матриц и их свойствами, приведены в приложении 1.

Будем искать решение уравнений (5) в виде рядов по функциям некоторой базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ пространства $L_2(T \times \mathbb{R}^n; \rho(x))$ (полной ортонормированной системы функций [14]), т. е.

$$\phi(t, x) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty \phi_{i_0 i_1 \dots i_n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x); \quad (10)$$

$$\psi(t, x) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty \psi_{i_0 i_1 \dots i_n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (11)$$

где

$$\phi_{i_0 i_1 \dots i_n} = \int_{T \times \mathbb{R}^n} \rho(x) e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) \phi(t, x) dt dx,$$

$$\psi_{i_0 i_1 \dots i_n} = \int_{T \times \mathbb{R}^n} \rho(x) e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) \psi(t, x) dt dx, \\ i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$$

Совокупности коэффициентов разложения $\phi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ и $\psi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ функций $\phi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ представляются в виде бесконечных $(n+1)$ -мерных гиперстолбцовых

матриц $\Phi(n+1, 0) = (\phi_{i_0 i_1 \dots i_n})$ и $\Psi(n+1, 0) = (\psi_{i_0 i_1 \dots i_n})$, т. е. спектральных характеристик функций $\phi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ соответственно, определенных относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ [6, 7]. При этом предполагается, что функции базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ порождаются всевозможными произведениями функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ и $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$, которые, в свою очередь, образуют базисные системы пространств $L_2(T)$ и $L_2(\mathbb{R}^n; \rho(x))$ соответственно [14].

Функции базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ порождаются всевозможными произведениями функций $\{p_k(i_k, x_k)\}_{i_k=0}^\infty$, образующих базисные системы пространств $L_2(\mathbb{R}; \rho_k(x_k))$ соответственно, $k = 1, \dots, n$, $\rho(x) = \rho_1(x_1) \dots \rho_n(x_n)$; или

$$p(i_1, \dots, i_n, x) = \\ = p_{(1)}(i_1, \dots, i_m, x_{(1)}) p_{(2)}(i_{m+1}, \dots, i_n, x_{(2)}).$$

Здесь функции $p_{(1)}(i_1, \dots, i_m, x_{(1)})$ и $p_{(2)}(i_{m+1}, \dots, i_n, x_{(2)})$ образуют базисные системы пространств $L_2(\mathbb{R}^m; \rho_{(1)}(x_{(1)}))$ и $L_2(\mathbb{R}^{n-m}; \rho_{(2)}(x_{(2)}))$ соответственно, при этом $\rho(x) = \rho_{(1)}(x_{(1)}) \rho_{(2)}(x_{(2)})$.

Введение весовой функции $\rho(x)$ (и порождающих ее $\rho_k(x_k)$, $k = 1, \dots, n$, или $\rho_{(1)}(x_{(1)})$ и $\rho_{(2)}(x_{(2)})$) обусловлено тем, что функции $\phi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ обладают разными свойствами, а именно: $\phi(t, x)$ удовлетворяет условию нормировки и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(t, x) = 0$, в то время как $\psi(t, x)$ может быть неограниченной (например, в простейшей задаче синтеза оптимальных линейных стохастических систем с квадратичным по координатам вектора состояния функционалом качества (4) эта функция является полиномом относительно переменных x_i , $i = 1, \dots, n$). В общем случае весовая функция, относительно которой ортогональны функции базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$, может зависеть и от переменной t , однако такая зависимость не носит принципиального характера, поэтому здесь не рассматривается.

Аналогичным образом определяются спектральные характеристики функций вектора состояния. Они представляются гиперстолбцовыми матрицами меньшей размерности и вычисляются относительно базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$.

Наряду с $\Phi(n+1, 0)$ введем следующие обозначения: $\Phi_0(n, 0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0 , определенная относительно базисной

системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$, т. е. $\Phi_0(n, 0)$ — n -мерная гиперстолбцовая матрица, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $\phi_0(x)$ по функциям базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$; $F(n, 0)$ — спектральная характеристика функции $F(x)$, определенная относительно той же базисной системы; $q(1, 0; t_0)$ и $q(1, 0; t_1)$ — матрицы-столбцы значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно.

Получим сначала спектральный аналог уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Пусть $A(n+1, n+1)$ — спектральная характеристика линейного оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ [6, 7], т. е. $2(n+1)$ -мерная гиперквадратная матрица, элементы которой определяются выражением:

$$\begin{aligned} A_{i_0 i_1 \dots i_n j_0 j_1 \dots j_n} &= \\ &= \int_{T \times \mathbb{R}^n} \rho(x) e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) \times \\ &\quad \times \mathcal{A}_{u(\cdot)} e(j_0, j_1, \dots, j_n, t, x) dt dx, \\ &\quad i_0, i_1, \dots, i_n, j_0, j_1, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

По этой формуле определяются элементы спектральной характеристики $A(n+1, n+1)$ линейного оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$ в случае, когда функция $u(t, x_{(1)})$ известна, но поскольку она подлежит нахождению наряду с плотностью вероятности $\phi(t, x)$, будем использовать обозначение $A(n+1, n+1; U(m+2, 0))$, в котором отражена зависимость элементов этой матрицы от коэффициентов разложения координат вектор-функции $u(t, x_{(1)})$ по функциям базисной системы $\{e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x_{(1)})\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ пространства $L_2(T \times \mathbb{R}^m; \rho_{(1)}(x_{(1)}))$:

$$\begin{aligned} e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x_{(1)}) &= \\ &= q(i_0, t) \cdot p_1(i_1, x_1) \cdots p_m(i_m, x_m), \\ &\quad i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots, \\ &\quad \rho_{(1)}(x_{(1)}) = \rho_1(x_1) \cdots \rho_m(x_m), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x_{(1)}) &= \\ &= q(i_0, t) \cdot p_{(1)}(i_1, \dots, i_m, x_{(1)}), \\ &\quad i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь $U(m+2, 0)$ — $(m+2)$ -мерная гиперстолбцовая матрица, образованная с помощью операции агрегатирования [6] спектральных характеристик $U_l(m+1, 0) = (u_{i_0 i_1 \dots i_m})$ координат $u_l(t, x_{(1)})$ функции $u(t, x_{(1)})$, т. е.

$$U(m+2, 0) = \begin{bmatrix} U_1(m+1, 0) \\ \vdots \\ U_q(m+1, 0) \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u_{i_0 i_1 \dots i_m} &= \\ &= \int_{T \times \mathbb{R}^m} \rho_{(1)}(x_{(1)}) e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x_{(1)}) \times \\ &\quad \times u_l(t, x_{(1)}) dt dx_{(1)}, \\ &\quad l = 1, \dots, q, \quad i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} u_l(t, x_{(1)}) &= \\ &= \sum_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty u_{i_0 i_1 \dots i_m} e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x_{(1)}), \\ &\quad l = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (14)$$

Видно, что при $m=0$ функции $e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x_{(1)})$ совпадают с $q(i_0, t)$, а при $m=n$ — с $e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)$. Отметим также, что определение спектральной характеристики оператора можно применять к широкому классу линейных операторов (операторов умножения, дифференцирования, интегрирования, сдвига, Фредгольма и др., а также для их композиций), а не только к оператору $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$, определенному выражением (3). Так, например, будем обозначать через $\mathcal{P}(n+1, n+1)$ спектральную характеристику оператора дифференцирования по переменной t , определенную относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$.

Для нахождения коэффициентов разложения $\phi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ функции $\phi(t, x)$ следует приравнять спектральные характеристики левой и правой частей уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, получив таким образом систему линейных алгебраических уравнений (при заданном управлении $u(t, x_{(1)})$).

Спектральная характеристика левой части уравнения (2) с учетом условия $\phi(t_0, x) = \phi_0(x)$, свойств спектральных характеристик линейных операторов (в частности, операторов дифференцирования) и введенных обозначений представляется в форме

$$P(n+1, n+1)\Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0),$$

где

$$\begin{aligned} P(n+1, n+1) &= P(n+1, n+1) + \\ &\quad + (q(1, 0; t_0) q^T(1, 0; t_0)) \otimes E(n, n), \end{aligned} \quad (15)$$

а $E(n, n)$ — $2n$ -мерная единичная матрица.

Спектральная характеристика правой части уравнения (2), согласно свойствам спектральных характеристик функций и линейных операторов, представляется произведением $A(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0))\Phi(n + 1, 0)$.

Таким образом, уравнение для нахождения спектральной характеристики $\Phi(n + 1, 0)$ плотности вероятности $\phi(t, x)$ вектора состояния (спектральный аналог уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова) записывается в виде

$$P(n + 1, n + 1)\Phi(n + 1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) = A(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0))\Phi(n + 1, 0) \quad (16)$$

и называется уравнением обобщенной характеристической функции (фактически это система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения $\phi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ функции $\phi(t, x)$ относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$, записанная в матричной форме).

Найденная из уравнения (16) спектральная характеристика

$$\Phi(n + 1, 0) = (P(n + 1, n + 1) - A(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0)))^{-1} \times (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)) \quad (17)$$

определяет решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и, следовательно, решение задачи анализа стохастической системы (1) в спектральной форме математического описания [6, 7]. Это решение выражается формулой (10).

Спектральную характеристику $A(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0))$ оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$ не обязательно находить по определению (12). Для этого можно использовать свойство линейности спектральных характеристик функций и свойство спектральных характеристик композиции линейных операторов. Введем новые обозначения: $F_i(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0))$ и $G_{ij}(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0))$ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i(t, x, u(t, x_{(1)}))$ и $g_{ij}(t, x, u(t, x_{(1)}))$ соответственно (здесь, как и в случае со спектральной характеристикой $A(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0))$, в обозначениях отражен факт зависимости коэффициентов уравнения (1) от $u(t, x_{(1)})$ и, следовательно, зависимости соответствующих спектральных характеристик операторов умножения от спектральных характеристик координат функции $u(t, x_{(1)})$). Далее, $\mathcal{P}_i(n + 1, n + 1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n + 1, n + 1)$ — спектральные характеристики операторов дифференцирования первого порядка по координатам x_i и спектральные характеристики операторов дифференцирования второго

порядка по координатам x_i, x_j соответственно, $i, j = 1, \dots, n$. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$. Тогда [6, 7]

$$A(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0)) = - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n + 1, n + 1) F_i(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n + 1, n + 1) \times G_{ij}(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0)). \quad (18)$$

Несмотря на то что подобное представление достаточно громоздко, его использование обладает преимуществами, поскольку для операторов дифференцирования и операторов умножения на некоторые элементарные функции получены аналитические выражения для вычисления их спектральных характеристик относительно ряда базисных систем [4, 6, 7, 15–17]: полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Уолша, функций Хаара, полиномов и функций Лагерра, полиномов и функций Эрмита и др.

Далее получим спектральный аналог уравнения для нахождения вспомогательной функции $\psi(t, x)$. Как и в случае уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, чтобы найти коэффициенты разложения $\psi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ функции $\psi(t, x)$, следует приравнять спектральные характеристики левой и правой частей уравнения:

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = -\mathcal{A}_{u(\cdot)}^* \psi(t, x) + f_0(t, x, u(t, x_{(1)})). \quad (19)$$

Спектральная характеристика левой части этого уравнения с учетом условия $\psi(t_1, x) = -F(x)$ записывается в виде:

$$-P^T(n + 1, n + 1)\Psi(n + 1, 0) - q(1, 0; t_1) \otimes F(n, 0),$$

так как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n + 1, n + 1) &= -\mathcal{P}^T(n + 1, n + 1) + (q(1, 0; t_1) \times \\ &\times q^T(1, 0; t_1) - q(1, 0; t_0)q^T(1, 0; t_0)) \otimes E(n, n) = \\ &= -P^T(n + 1, n + 1) + \\ &+ (q(1, 0; t_1)q^T(1, 0; t_1)) \otimes E(n, n), \end{aligned}$$

а спектральная характеристика правой части уравнения (19), согласно свойствам спектральных характеристик функций и линейных операторов, представляется выражением

$$-A^*(n + 1, n + 1; U(m + 2, 0))\Psi(n + 1, 0) + F_0(n + 1, 0; U(m + 2, 0)),$$

в котором $A^*(n+1, n+1; U(m+2, 0))$ — спектральная характеристика сопряженного оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}^*$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$; $F_0(n+1, 0; U(m+2, 0))$ — спектральная характеристика функции $f_0(t, x, u(t, x_{(1)}))$, определенная относительно той же базисной системы. Эти спектральные характеристики зависят от коэффициентов разложения координат функции $u(t, x_{(1)})$ по функциям базисной системы $\{e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x_{(1)})\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$.

Спектральная характеристика $A^*(n+1, n+1; U(m+2, 0))$ сопряженного оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}^*$ выражается через введенные ранее спектральные характеристики операторов дифференцирования и умножения следующим образом:

$$\begin{aligned} A^*(n+1, n+1; U(m+2, 0)) &= \\ &= \sum_{i=1}^n F_i(n+1, n+1; U(m+2, 0)) \times \\ &\quad \times P_i(n+1, n+1) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_{ij}(n+1, n+1; U(m+2, 0)) \times \\ &\quad \times P_{ij}(n+1, n+1). \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, уравнение, которому удовлетворяет спектральная характеристика $\Psi(n+1, 0)$ вспомогательной функции $\psi(t, x)$ (при заданном управлении $u(t, x_{(1)})$) это система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения $\psi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ функции $\psi(t, x)$ относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$, записанная в матричной форме, имеет вид:

$$\begin{aligned} P^T(n+1, n+1)\Psi(n+1, 0) + q(1, 0; t_1) \otimes F(n, 0) &= \\ = A^*(n+1, n+1; U(m+2, 0))\Psi(n+1, 0) - & \\ - F_0(n+1, 0; U(m+2, 0)). \end{aligned}$$

Далее, учитывая полученные выше результаты, запишем спектральные аналоги уравнений (5):

$$\begin{aligned} P(n+1, n+1)\Phi^*(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) &= \\ = A(n+1, n+1; U^*(m+2, 0))\Phi^*(n+1, 0), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P^T(n+1, n+1)\Psi(n+1, 0) + q(1, 0; t_1) \otimes F(n, 0) &= \\ = A^*(n+1, n+1; U^*(m+2, 0))\Psi(n+1, 0) - & \\ - F_0(n+1, 0; U^*(m+2, 0)). \end{aligned} \quad (22)$$

Они связаны между собой через матрицу $U^*(m+2, 0)$, образованную спектральными характеристиками $U_l^*(m+1, 0)$ координат $u_l^*(t, x_{(1)})$ функции $u^*(t, x_{(1)})$ (см. (13)), которые, в свою

очередь, выражаются через спектральные характеристики $\Phi^*(n+1, 0)$ и $\Psi(n+1, 0)$, поскольку $u^*(t, x_{(1)})$ выражается через $\phi^*(t, x)$ и $\psi(t, x)$ (см. (7) и (8)):

$$\begin{aligned} U^*(m+2, 0) &= \\ = U^*(m+2, 0; \Phi^*(n+1, 0), \Psi(n+1, 0)). \end{aligned} \quad (23)$$

В результате получается замкнутая система в общем случае нелинейных уравнений (21)–(23), которую необходимо решить для нахождения оптимальной или «подозрительной на оптимальность» пары $d_m^* = (\phi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)}))$, используя (10) и (14).

Следует отметить, что при наличии информации о всех координатах вектора состояния, т. е. при $m = n$, управление $u^*(t, x_{(1)})$ выражается только через $\psi(t, x)$, поэтому

$$U^*(n+2, 0) = U^*(n+2, 0; \Psi(n+1, 0))$$

и уравнение (21) можно решать после решения (22), а не совместно с (22) (см. (17)).

Указать правило, согласно которому вычисляются спектральные характеристики

$$\begin{aligned} F_i(n+1, n+1; U^*(m+2, 0)); \\ G_{ij}(n+1, n+1; U^*(m+2, 0)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} A(n+1, n+1; U^*(m+2, 0)); \\ A^*(n+1, n+1; U^*(m+2, 0)), \end{aligned}$$

а также $F_0(n+1, 0; U^*(m+2, 0))$ в зависимости от $U^*(m+2, 0)$, в общем случае не представляется возможным. Такое же замечание справедливо и для зависимости $U^*(m+2, 0)$ от спектральных характеристик $\Phi^*(n+1, 0)$ и $\Psi(n+1, 0)$. Необходимые соотношения формируются для каждой конкретной задачи синтеза оптимальных стохастических систем управления, они могут быть как линейными, так и нелинейными (например, с использованием спектральных характеристик множительного звена [4, 6]). Кроме того, для записи подобных соотношений используются, как правило, спектральные характеристики линейных функционалов [6, 18].

Основной сложностью при решении задачи синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом является то, что все входящие в соотношения (21)–(23) матрицы — это матрицы с бесконечным числом элементов, поэтому при расчетах, как правило, эти матрицы усекаются. При этом решения (10), (11) уравнений (5) следует искать в виде частичных сумм

$$\phi^*(t, x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \phi_{i_0 i_1 \dots i_n}^* \times e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (24)$$

$$\psi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \psi_{i_0 i_1 \dots i_n} \times e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (25)$$

где заданные числа L_0, L_1, \dots, L_n называются порядками усечения спектральных характеристик, а $\phi_{i_0 i_1 \dots i_n}^*$ и $\psi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ — элементы усеченных спектральных характеристик $\Phi^*(n+1, 0)$ и $\Psi(n+1, 0)$. Оптимальное управление в этом случае задается соотношением:

$$u_l^*(t, x(1)) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} u_{i_0 i_1 \dots i_m}^* \times e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x(1)), \quad l = 1, \dots, q, \quad (26)$$

где $u_{i_0 i_1 \dots i_m}^*$ — элементы усеченных спектральных характеристик $U_l^*(m+1, 0)$, полученных из $U^*(m+2, 0)$ в результате декомпозиции [6] (фактически в результате выделения подблоков матрицы). Выбор порядков усечения, а также выбор базисной системы определяют точность приближенного решения задачи синтеза оптимальных стохастических систем управления.

Для решения системы уравнений (21)–(23) представляется эффективным перейти к эквивалентной задаче безусловной оптимизации, а именно минимизировать нормы разностей левых и правых частей соотношений (21), (22) с учетом зависимости (23), используя для этого методы нулевого порядка [9] и метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума [10].

Не приводя подробного вывода, запишем соотношение для подсчета минимального значения функционала (4):

$$J(d_m^*) = - (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0))^T \times (E(1, 1) \otimes R^{-1}(n, n)) \Psi(n+1, 0), \quad (27)$$

в котором $R(n, n)$ — спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{R}^n; \rho(x))$. Это выражение получено с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов и начальных значений функций времени [6, 18] при применении спектрального преобразования к правой части (9).

4 Методическое обеспечение приближенного решения задачи синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления

Приведем алгоритм приближенного решения задачи синтеза.

1. Выбрать базисные системы

$$\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty; \\ \{p_{(1)}(i_1, \dots, i_m, x(1))\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty; \\ \{p_{(2)}(i_{m+1}, \dots, i_n, x(2))\}_{i_{m+1}, \dots, i_n=0}^\infty$$

пространств

$$L_2(T); L_2(\mathbb{R}^m; \rho_{(1)}(x(1))); L_2(\mathbb{R}^{n-m}; \rho_{(2)}(x(2)))$$

соответственно. Сформировать базисную систему

$$\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$$

пространства $L_2(\mathbb{R}^n; \rho(x) = \rho_{(1)}(x(1))\rho_{(2)}(x(2)))$:

$$p(i_1, \dots, i_n, x) = p_{(1)}(i_1, \dots, i_m, x(1)) \times p_{(2)}(i_{m+1}, \dots, i_n, x(2)), \quad i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots,$$

базисную систему

$$\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$$

пространства $L_2(T \times \mathbb{R}^n; \rho(x))$:

$$e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t)p(i_1, \dots, i_n, x), \\ i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots,$$

и базисную систему

$$\{e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x(1))\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$$

пространства $L_2(T \times \mathbb{R}^m; \rho_{(1)}(x(1)))$:

$$e_{(1)}(i_0, i_1, \dots, i_m, t, x(1)) = q(i_0, t)p_{(1)}(i_1, \dots, i_m, x(1)), \\ i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots$$

Выбрать порядки усечения L_0, L_1, \dots, L_n спектральных характеристик.

2. Вычислить матрицы-столбцы $q(1, 0; t_0)$ и $q(1, 0; t_1)$ значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ в точках t_0 и t_1 соответственно.

3. Вычислить спектральную характеристику $\Phi_0(n, 0)$ плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0 и спектральную характеристику $F(n, 0)$ функции $F(x)$.

4. Вычислить спектральные характеристики $\mathcal{P}(n+1, n+1)$ и $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$ операторов дифференцирования первого порядка по переменным t и x_i соответственно, $i = 1, \dots, n$; спектральные характеристики $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$ операторов дифференцирования второго порядка по переменным x_i и x_j , $i, j = 1, \dots, n$. Найти матрицу $P(n+1, n+1)$, используя (15).

5. Представить спектральные характеристики

$$F_i(n+1, n+1; U(m+2, 0));$$

$$G_{ij}(n+1, n+1; U(m+2, 0))$$

операторов умножения на функции $f_i(t, x, u(t, x_{(1)}))$ и $g_{ij}(t, x, u(t, x_{(1)}))$ соответственно как функции матрицы $U(m+2, 0)$, $i, j = 1, \dots, n$.

6. Найти спектральные характеристики $A(n+1, n+1; U(m+2, 0))$ и $A^*(n+1, n+1; U(m+2, 0))$ по формуле (18).

7. Представить спектральную характеристику $F_0(n+1, 0; U(m+2, 0))$ функции $f_0(t, x, u(t, x_{(1)}))$ как функцию матрицы $U(m+2, 0)$.

8. Представить матрицу $U(m+2, 0)$ (спектральные характеристики $U_l^*(m+1, 0)$ координат $u_l^*(t, x_{(1)})$, $l = 1, \dots, q$, оптимального управления $u^*(t, x_{(1)})$) как функцию спектральных характеристик $\Phi^*(n+1, 0)$ и $\Psi(n+1, 0)$ (при $m = n$ представить $U(n+2, 0)$ как функцию спектральной характеристики $\Psi(n+1, 0)$).

9. Найти спектральные характеристики $\Phi^*(n+1, 0)$ и $\Psi(n+1, 0)$, а также спектральные характеристики $U_l^*(m+1, 0)$, $l = 1, \dots, q$, образующие матрицу $U^*(m+2, 0)$, решая уравнения (21)–(23) (или эквивалентную задачу безусловной оптимизации).

10. Применяя формулы обращения (24)–(26), найти плотность вероятности $\phi^*(t, x)$ и координаты $u_l^*(t, x_{(1)})$ оптимального управления $u^*(t, x_{(1)})$, $l = 1, \dots, q$, и, следовательно, получить пару $d_m^* = (\phi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)}))$.

11. Подсчитать минимальное значение функционала качества управления, используя (27).

Пример. Найти оптимальное управление для двумерной системы ($n = 2$), описываемой уравнениями:

$$dX_1(t) = (X_2(t) + u(t)) dt + dW(t), \quad X_1(0) = X_{10};$$

$$dX_2(t) = 0; \quad X_2(0) = X_{20},$$

где $T = [0, 1]$, X_{10} и X_{20} — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное

распределение. Ограничения на управление отсутствуют ($u \in U = \mathbb{R}$), $W(t)$ — одномерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $X_0 = [X_{10} \ X_{20}]^T$.

Функционал (4) задан следующим образом:

$$J(d_m) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t, x_{(1)}) \phi(t, x) dt dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 \phi(1, x) dx.$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(t)$, оптимальное управление с неполной обратной связью $u^*(t, x_1)$, оптимальное управление с полной обратной связью $u^*(t, x_1, x_2)$ ($m = 0, 1, 2$) и соответствующие значения функционалов.

Выберем в качестве базисной системы пространства $L_2(T)$ полиномы Лежандра $\{P(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$, определенные на отрезке T , а для пространств $L_2(\mathbb{R}; \rho_1(x_1))$ и $L_2(\mathbb{R}; \rho_2(x_2))$ — полиномы Эрмита $\{G(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^\infty$ и $\{G(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^\infty$ [4, 6, 7, 14, 15, 17], т. е.

$$p(i_1, i_2, x_1, x_2) = G(i_1, x_1)G(i_2, x_2),$$

$$i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots;$$

$$e(i_0, i_1, i_2, t, x_1, x_2) = P(i_0, t)G(i_1, x_1)G(i_2, x_2),$$

$$i_0, i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Базисная система $\{e_{(1)}(i_0, \dots, t, x_{(1)})\}_{i_0, \dots=0}^\infty$ для представления оптимального управления зависит от степени информированности, а именно при $m = 0$ она совпадает с $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$, т. е. с $\{P(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$; при $m = 1$ определяется выражением

$$e_{(1)}(i_0, i_1, t, x_1) = P(i_0, t)G(i_1, x_1),$$

$$i_0, i_1 = 0, 1, 2, \dots;$$

при $m = 2$ совпадает с системой

$$\{e(i_0, i_1, i_2, t, x_1, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^\infty.$$

Порядки усечения спектральных характеристик выбранным следующим образом: $L_0 = 6$, $L_1 = L_2 = 3$.

Небольшой объем статьи не позволяет привести соотношения для определения оптимального управления в этой задаче, поэтому ограничимся результатами. При решении использовался метод сведения к эквивалентной задаче безусловной минимизации с последующим применением методов конфигураций (Хука–Дживса) [9] и имитации отжига [10]. Все численные расчеты были выполнены с помощью специализированного программного обеспечения *Spectrum* (см. приложение 2 и [19]),

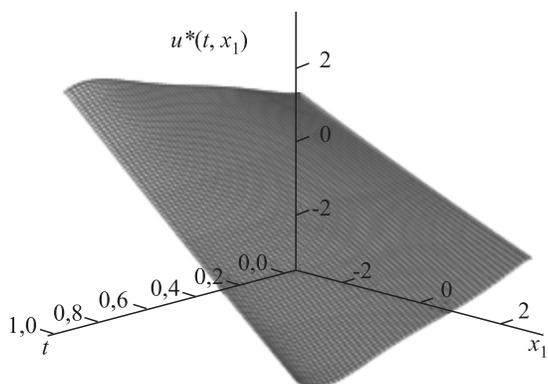


Рис. 2 График оптимального управления с неполной обратной связью

предназначенного для решения задач анализа и синтеза систем управления различных классов с использованием спектральной формы математического описания.

В результате вычислений при отсутствии информации о координатах вектора состояния получено оптимальное программное управление $u^*(t) \approx 0$, минимальное значение функционала качества управления $J(d_0^*) \approx 1,5$. При управлении по неполному вектору состояния получено оптимальное управление $u^*(t, x_1)$ (рис. 2), $J(d_1^*) \approx 0,901$. Графики оптимального управления с полной обратной связью (сечения при $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$) изображены на рис. 3, $J(d_2^*) \approx 0,846$.

Таким образом, справедливо неравенство $J(d_2^*) < J(d_1^*) < J(d_0^*)$, т.е. оптимальное управление с полной обратной связью обеспечивает наилучшее качество, а оптимальное программное управление — наихудшее.

Эти результаты хорошо согласуются с расчетами, приведенными в [2]: для значений $J(d_0^*)$ и $J(d_2^*)$ погрешность не превосходит величины $5 \cdot 10^{-4}$. Для значения $J(d_1^*)$ погрешность составила менее $3,0 \cdot 10^{-3}$, однако приведенное в [2] значение $J(d_1^*)$ тоже получено приближенно с некоторой погрешностью.

Были проведены дополнительные расчеты с использованием базисной системы обобщенных функций Эрмита вместо полиномов Эрмита [17]. В этом случае погрешность расчета критерия и оптимального управления была больше, что обусловлено свойствами обобщенных функций Эрмита, для ее уменьшения требуется увеличивать порядка усечения спектральных характеристик (расчеты проводились при $L_0 = 6$, $L_1 = L_2 = 3$ и $L_1 = L_2 = 5$).

5 Заключение

Основным результатом является методическое обеспечение синтеза оптимального в среднем управления нелинейными стохастическими системами, основанное на спектральной форме математического описания. Найдены спектральные аналоги соотношений для определения оптимального управления и вычисления минимального значения функционала. Практическая применимость разработанного методического обеспечения базируется на развитом алгоритмическом и программном обеспечении спектрального метода [4, 6, 7, 15–19]. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на решении модельной задачи синтеза при различной информированности о векторе состояния.

Спектральный метод синтеза может быть применен и для более сложных нелинейных стохастических систем.

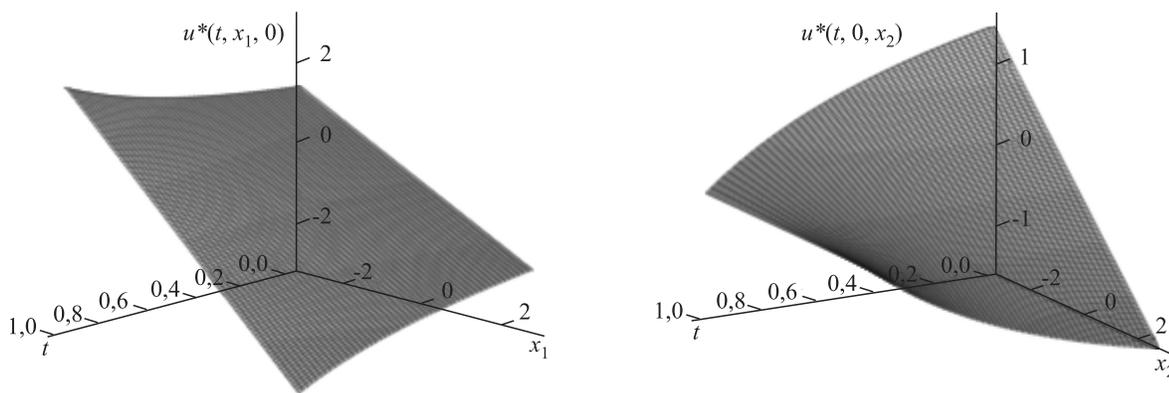


Рис. 3 Графики сечений оптимального управления с полной обратной связью

ческих систем: со случайным периодом квантования и со случайной структурой [6, 20].

Приложение 1

Пусть m_1 и m_2 — заданные натуральные числа, $M = m_1 + m_2$. Многомерной матрицей $A(m_1, m_2)$ размерности M называется упорядоченная совокупность чисел $a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}$, $i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, j_1, j_2, \dots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \dots$. Первые m_1 индексов называются строчными (i_1, i_2, \dots, i_{m_1}), а остальные — столбцовыми (j_1, j_2, \dots, j_{m_2}). Разделение множества индексов на строчные и столбцовые позволяет задать структуру многомерной матрицы: обычно выделяют гиперквадратные матрицы, у которых число строчных и столбцовых индексов совпадает, гиперстолбцовые матрицы, все индексы которых строчные, и гиперстрочные матрицы, все индексы которых столбцовые.

Матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ и $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ называются равными, если соответствующие элементы этих матриц равны:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} = b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}, \\ i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, j_1, j_2, \dots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \dots$$

Суммой $A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2)$ матриц

$$A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}); \\ B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$$

называется матрица

$$C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}),$$

если

$$c_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} = a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} + \\ + b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}, \\ i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, j_1, j_2, \dots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \dots$$

Матрица $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ называется произведением матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ на число α ($B(m_1, m_2) = \alpha A(m_1, m_2)$), если

$$b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} = \alpha a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}, \\ i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, j_1, j_2, \dots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \dots$$

Произведением $A(m_1, m_3)B(m_3, m_2)$ матриц $A(m_1, m_3) = (a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_3}})$ и $B(m_3, m_2) = (b_{k_1 k_2 \dots k_{m_3} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ называется матрица $C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$, если

$$c_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} = \\ = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{m_3}=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_3}} b_{k_1 k_2 \dots k_{m_3} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} < \infty, \\ i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, j_1, j_2, \dots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \dots$$

Тензорным произведением $A(m_1, m_2) \otimes B(m_3, m_4)$ матриц $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ и $B(m_3, m_4) = (b_{k_1 k_2 \dots k_{m_3} l_1 l_2 \dots l_{m_4}})$ называется матрица

$$C(m_1 + m_3, m_2 + m_4) = \\ = (c_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_3} j_1 j_2 \dots j_{m_2} l_1 l_2 \dots l_{m_4}}),$$

если

$$c_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_3} j_1 j_2 \dots j_{m_2} l_1 l_2 \dots l_{m_4}} = \\ = a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} b_{k_1 k_2 \dots k_{m_3} l_1 l_2 \dots l_{m_4}}, \\ i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, k_1, k_2, \dots, k_{m_3}, \\ j_1, j_2, \dots, j_{m_2}, l_1, l_2, \dots, l_{m_4} = 0, 1, 2, \dots$$

Для матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ транспонированной матрицей называется матрица $A^T(m_2, m_1) = (a_{j_1 j_2 \dots j_{m_2} i_1 i_2 \dots i_{m_1}})$.

Гиперквадратная матрица $A^{-1}(m, m)$ называется обратной для гиперквадратной матрицы $A(m, m)$, если справедливо равенство:

$$A^{-1}(m, m)A(m, m) = A(m, m)A^{-1}(m, m) = \\ = E(m, m), \quad (28)$$

где $E(m, m)$ — единичная матрица, т. е. такая гиперквадратная матрица, что

$$B(m, m)E(m, m) = E(m, m)B(m, m) = B(m, m)$$

для любой гиперквадратной матрицы $B(m, m)$.

Обращение многомерных матриц, как правило, сводится к решению системы линейных уравнений относительно элементов матрицы $A^{-1}(m, m)$ (выражение (28) — матричная запись этой системы).

Для многомерных матриц с конечным числом элементов, т. е. при условии, что значения индексов ограничены, определены такие же понятия.

Приложение 2

Программное обеспечение *Spectrum* предназначено для решения различных задач теории управления спектральным методом [1, 4, 6, 7, 15], позволяющим свести исходную задачу, математическая модель которой содержит дифференциальные, интегро-дифференциальные, интегральные и разностные уравнения, в том числе с отклоняющимися аргументами, к системе уравнений для коэффициентов разложения искомой характеристики по функциям некоторой базисной системы. Ядро *Spectrum* образуют модуль спектральных преобразований и матричный калькулятор.

Модуль спектральных преобразований позволяет:

- рассчитывать спектральные характеристики непрерывных и дискретных типовых воздействий (линейной, показательной и тригонометрических функций, единичной ступенчатой функции, импульсной δ -функции и др.), плотностей вероятности типовых распределений;

- рассчитывать спектральные характеристики функций многих переменных, задаваемых как суперпозиции элементарных функций;
- рассчитывать первую и вторую спектральные плотности непрерывных и дискретных типовых случайных воздействий (например, белого шума);
- рассчитывать спектральные характеристики дифференциальных и разностных операторов, операторов интегрирования и суммирования, операторов умножения и сдвига (опережения и запаздывания), спектральные характеристики множительного звена;
- рассчитывать спектральные характеристики непрерывно-дискретных звеньев: дискретного элемента с бесконечно малым временем замыкания (звено с непрерывным входом и дискретным выходом), экстраполятора нулевого порядка (дискретный вход, непрерывный выход);
- вычислять значения базисных функций;
- проводить обратное спектральное преобразование спектральных характеристик.

При решении задач спектральным методом можно использовать следующие системы ортонормированных функций: полиномы Лежандра и Чебышева, тригонометрические функции, функции Уолша и Хаара, полиномы и функции Лагерра, полиномы и функции Эрмита, обобщенные функции Эрмита.

Для решения задач требуется задать алгоритм вычислений в спектральной области в виде последовательности формул, для ряда задач возможно автоматизированное составление такой последовательности с помощью диалогового формирователя. При его применении пользователю нужно указать необходимые параметры, такие как порядок системы, коэффициенты уравнения, начальные и краевые условия и т. п., по этим данным рассчитываются спектральные характеристики и формируется последовательность формул, которая затем обрабатывается матричным калькулятором.

При использовании диалогового формирователя можно создавать проекты для следующих классов задач теории управления: анализ линейных одномерных систем управления при детерминированных и случайных воздействиях [1, 4, 15]; анализ многомерных стохастических систем [6, 7]; анализ многомерных непрерывно-дискретных стохастических систем (многошаговых стохастических систем); анализ многомерных стохастических систем со случайной структурой [6]. Для других задач, при решении которых может быть использован спектральный метод, алгоритм вычислений можно ввести с помощью редактора формул.

Матричный калькулятор поддерживает различные операции алгебры многомерных матриц: сложение, вычитание, умножение на действительное число, умножение, тензорное умножение, транспонирование, нахождение обратной или псевдообратной матрицы, возведение в степень с натуральным показателем. Возможно вычисление нормы матрицы и построение сечений. Предусмотрена возможность агрегатирования и декомпозиции многомерных матриц.

При решении задач синтеза оптимального управления (или любых других задач, соотношения для решения которых в спектральной области представляют собой систему нелинейных уравнений) могут быть использованы методы безусловной оптимизации: метод конфигураций, адаптивный случайный поиск, метод наилучшей пробы, метод сопряженных направлений, метод деформируемого многогранника [9], метод имитации отжига и метод частиц в стае [10].

Для семантического контроля корректности производимых матричным калькулятором операций введена классификация матриц и векторов (спектральные характеристики функций, спектральные характеристики линейных операторов, матрицы-столбцы значений базисных функций и т. д.), что позволяет избежать смысловых ошибок в ходе решения задач. Например, результат умножения спектральных характеристик линейных операторов будет отнесен к этому же классу, напротив, сложение спектральной характеристики линейного оператора и матрицы значений базисных функций будет воспринято как семантическая ошибка.

Литература

1. Пантелеев А. В., Бортакоский А. С. Теория управления в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2003.
2. Пантелеев А. В. Оптимальные нелинейные системы управления: синтез при неполной информации. — М.: Вузовская книга, 2008.
3. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2004.
4. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.
5. Семенов В. В. Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. Вып. 2. — Саратов: СПИ, 1977. С. 3–36.
6. Пантелеев А. В., Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.
7. Пантелеев А. В., Рыбаков К. А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2010.
8. Семенов В. В. Синтез алгоритмов управления нелинейными системами при случайных воздействиях с ограниченным составом точных измерений // Аналитические методы синтеза регуляторов. Вып. 3. — Саратов: СПИ, 1978. С. 3–20.
9. Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2008.
10. Пантелеев А. В. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2009.

11. *Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Стохастическое исчисление // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 45. — М.: ВИНТИ, 1989.
12. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.
13. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
14. *Пугачев В. С.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МАИ, 1996.
15. *Семенов В. В., Рыбин В. В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. — М.: МАИ, 1984.
16. *Рыбин В. В.* Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. — М.: МАИ, 2003.
17. *Романов В. А., Рыбаков К. А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ, 2010. № 39 (<http://www.mai.ru>).
18. *Рыбаков К. А.* Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ, 2005. № 18 (<http://www.mai.ru>).
19. *Рыбаков К. А.* Программное обеспечение спектрального метода Spectrum // Труды МАИ, 2003. № 14 (<http://www.mai.ru>).
20. *Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.* Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.

ПРОБЛЕМА КОМПЕНСАЦИИ РЭЛЕЕВСКИХ ЗАМИРАНИЙ В РАДИОКАНАЛАХ ПОДВИЖНЫХ СИСТЕМ ГОЛОСОВОЙ СВЯЗИ

Н. Б. Преображенский¹, Я. Р. Файзулхаков²

Аннотация: Рассмотрена многолучевая стохастическая модель радиоканала. Предложен метод временного комплексирования речевого сигнала с тональной низкочастотной (НЧ) синхронизацией для передачи голосовых сигналов по рэлеевским радиоканалам, позволяющий повышать разборчивость за счет компенсации быстрых замираний. Пригодность нового метода подтверждена модельными экспериментами.

Ключевые слова: рэлеевские замирания; многолучевая модель; компенсация замираний; разборчивость речевого сигнала; радиосвязь; радиоканал

1 Введение

Используемые в голосовой связи дециметровые радиоволны слабо огибают препятствия [1, 2], т. е. распространяются, в основном, по прямой, но испытывают многочисленные отражения от окружающих объектов и подстилающей поверхности. Следствием многолучевого распространения являются замирания и искажения принимаемого сигнала [3, 4].

Формирование интерференционной картины многолучевого распространения можно проиллюстрировать схематически (рис. 1). При сложении нескольких сигналов, прошедших по разным путям и имеющих в точке приема в общем случае различные фазы, результирующий сигнал может оказаться как выше среднего уровня, так и ниже. Причем провалы (замирания) сигнала, образуемые при взаимной компенсации сигналов вследствие небла-

гоприятного сочетания их фаз и амплитуд, могут быть достаточно глубокими.

2 Модель многолучевой природы замираний

Сигналы, излучаемые в системах голосовой радиосвязи, являются узкополосными:

$$S_{\text{п}}(t, \lambda_0) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)] ,$$

где ω_0 — несущая частота сигнала, а $A(t)$ и $\theta(t)$ — функции, отображающие законы амплитудной и угловой модуляции [5, 6]. Искажения излученного сигнала $S_{\text{п}}(t, \lambda_0)$ принято рассматривать отдельно для *однолучевых* и *многолучевых* каналов. В однолучевых каналах электромагнитные колебания распространяются по одному пути. *Однолучевыми* каналами являются линии связи на расстояниях прямой видимости: линии ближней радиосвязи на коротких и ультракоротких волнах, линии связи земля—воздух, воздух—земля, воздух—воздух и т. п. Принятый полезный сигнал по отношению к излученному характеризуется дополнительными параметрами: случайным ослаблением, средним временем запаздывания, доплеровским смещением частоты и случайной начальной фазой (рис. 2).

Многолучевое распространение возникает при распространении ультракоротких волн (УКВ) в городской застройке (см. рис. 1), а также при передаче информации на дальние расстояния при отражении радиоволн от протяженных поверхностей суши и моря, при отражении от ионосферы и тропосферы. Из-за разных путей распространения радио-

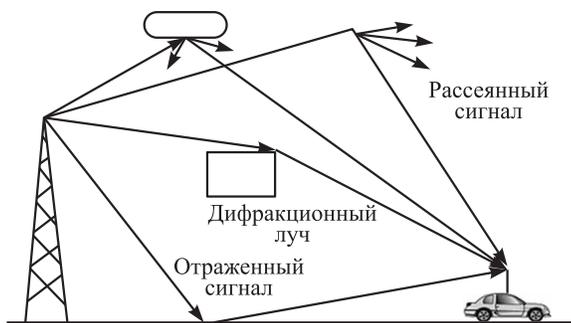


Рис. 1 Схема многолучевого распространения радиосигнала между базовой и подвижной радиостанциями

¹ Институт точной механики и вычислительной техники им. С. А. Лебедева, Московский физико-технический институт, факультет радиотехники и кибернетики, nbr@ipmce.ru

² Институт точной механики и вычислительной техники им. С. А. Лебедева, Московский физико-технический институт, факультет радиотехники и кибернетики, yakovr@yandex.ru

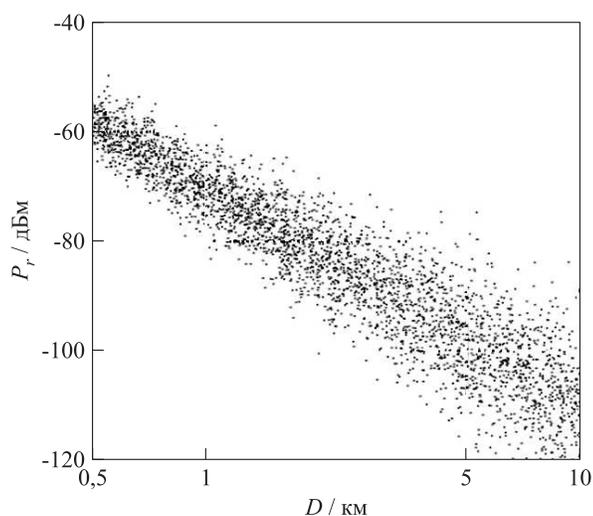


Рис. 2 Пример распределения уровня мощности P_r принимаемого сигнала

волн задержки отдельных принимаемых сигналов различны [1, 6]. При многолучевом распространении сигналов каждая из скалярных компонент выходного сигнала $S_{\Pi}(t, \lambda, \mathbf{r})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{\Pi}(t, \lambda, \mathbf{r}) &= \sum_{v=1}^N A(t - \tau_v) = \\ &= \left\{ \tilde{h}_{xvi}(t, \mathbf{r}) \cos [\omega_0 t - \omega_0 \tau_v + \theta(t - \tau_v)] + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{h}_{yvi}(t, \mathbf{r}) \sin [\omega_0 t - \omega_0 \tau_v + \theta(t - \tau_v)] \right\} = \\ &= \sum_{v=1}^N \gamma_{vi}(t, \mathbf{r}) A(t - \tau_v) \cos [\omega_0 + \varphi_{vi}(t, \mathbf{r}) + \\ &\quad + \theta(t - \tau_v)], \quad i = \overline{1, p}, \end{aligned}$$

где \mathbf{r} характеризует координаты точки наблюдаемой области пространства; τ_v — среднее время задержки v -го луча, которое в реальных каналах меняется значительно медленнее, чем сами сигналы, допускает простое измерение и может считаться известным в месте приема [6]; $\tilde{h}_{xvi}(t, \mathbf{r})$, $\tilde{h}_{yvi}(t, \mathbf{r})$ — квадратурные компоненты передаточной функции канала по i -й скалярной компоненте выходного сигнала в v -м луче; $\gamma_{vi}(t, \mathbf{r})$ — модуль той же передаточной функции; $\varphi_{vi}(t, \mathbf{r})$ — суммарный фазовый сдвиг; N — число лучей в канале, обусловленное его физическими свойствами.

Сигнал $S_{\Pi}(t, \lambda_0)$ при передаче имеет конечную длительность T , соответствующую длительности передаваемого им сообщения, поэтому $A(t) = 0$ при $t < 0$, $t > T$. Каждый из лучей сигнала является результатом наложения многих компонент (подлучей), разность задержек которых в

канале $\tau_{\text{пл}} \ll 1/F$, где F — полоса частот передаваемых сигналов. В условиях флуктуации это условие порождает неизбирательные по частоте замирания сигнала. Для стохастических каналов радиосвязи число компонент N является случайным [5].

В радиосвязи канал приходится считать стохастическим с некоторой вероятностной моделью для системной характеристики канала $\tilde{h}_{xvi}(t, \mathbf{r})$, $\tilde{h}_{yvi}(t, \mathbf{r})$. Учитывая, что эти компоненты в радиоканалах образуются суммированием большого числа слагаемых (подлучей) в условиях, когда выполняются требования центральной предельной теоремы теории вероятностей [7], их при заданном v можно считать независимыми, в общем случае неоднородными гауссовскими полями с математическими ожиданиями $m_{xvi}(t, \mathbf{r})$, $m_{yvi}(t, \mathbf{r})$ и корреляционными функциями $K_{xvi}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $K_{yvi}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ для каждой i -й скалярной компоненты поля. Независимость (некоррелированность) обеспечивается соответствующим поворотом системы координат. Это так называемая *общая гауссовская модель* канала [6, 7].

Исходя из экспериментальных данных можно считать, что коэффициенты корреляции у квадратурных компонент одинаковы: $R_{xvi}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = R_{yvi}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, причем для однородных полей они удовлетворительно аппроксимируются экспоненциальной функцией по переменным $t_2 - t_1$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Таким образом, *общая гауссовская модель* по каждой из скалярных компонент v -го луча описывается параметрами $m_{xvi}(t, \mathbf{r})$, $m_{yvi}(t, \mathbf{r})$, $\sigma_{xvi}^2(t, \mathbf{r})$, $\sigma_{yvi}^2(t, \mathbf{r})$ (дисперсии квадратурных компонент) и $R_{vi}(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (коэффициент корреляции по времени и пространству). Взаимную корреляцию скалярных компонент сигнала (с различными индексами i) и сигналов разных лучей (с различными v) для голосовых радиоканалов можно не учитывать [5, 6]. Для краткости обозначим $\tilde{h}_{xvi}(t, \mathbf{r}) = x$, $\tilde{h}_{yvi}(t, \mathbf{r}) = y$. Рассмотренная модель характеризуется совместно гауссовской четырехпараметрической плоскостью распределения вероятности (ПРВ):

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x(t, \mathbf{r})\sigma_y(t, \mathbf{r})} \exp \left\{ - \frac{[x - m_x(t, \mathbf{r})]^2}{2\sigma_x^2(t, \mathbf{r})} - \frac{[y - m_y(t, \mathbf{r})]^2}{2\sigma_y^2(t, \mathbf{r})} \right\}.$$

Четырехпараметрические распределения модуля $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$ каждого из элементов передаточной матрицы (амплитуд сигналов) и фаз $\varphi = \arctg(y/x)$ определяются более сложными формулами [6, 7].

Экспериментальные данные по замираниям в радиоканалах различных диапазонов подтверждают возможность удовлетворительной аппроксимации распределений амплитуд и фаз как общим четырехпараметрическим законом, так и его частными случаями:

- трехпараметрические замирания ($m_x = 0$);
- райсовские (обобщенно-рэлеевские) замирания ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2, m_x^2 + m_y^2 \neq 0$);
- подрэлеевские замирания ($m_x = m_y = 0$); наиболее глубокие замирания в рамках этой и более общих моделей соответствуют случаю одностороннего нормального распределения ($m_x = m_y = 0, \sigma_x^2 = 0$);
- **рэлеевские замирания** ($m_x = m_y = 0, \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$);
- канал без замираний ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0$).

Следует подчеркнуть, что в рамках четырехпараметрической (общей гауссовской) модели замирания амплитуд и фаз сигнала оказываются коррелированными. Однако параметры $\sigma_x^2, \sigma_y^2, m_x^2, m_y^2$ в большинстве реальных каналов связи можно считать не зависящими от t и \mathbf{r} , что подтверждается многочисленными экспериментальными данными [3, 6]. Кроме того, вследствие масштабирования сигнала в приемном тракте медленная составляющая замираний может считаться ском-

пенсированной. Исключением являются **рэлеевские замирания**

$$w_2(\gamma, \varphi) = \frac{\gamma}{2\pi\sigma^2} e^{-\gamma^2/(2\sigma^2)}. \quad (1)$$

Основную неприятность в подвижной голосовой связи составляют именно **рэлеевские замирания**, поскольку они бывают достаточно глубокими и при этом отношение сигнал/шум падает настолько сильно, что полезная информация может существенно искажаться, вплоть до полной ее потери.

3 Компенсация замираний

Медленные замирания связаны с изменением условий «затенения» при перемещении подвижной станции [3, 4]. Интенсивность медленных флуктуаций по экспериментальным данным (см. рис. 2) не превышает 8–12 дБ, а их периодичность соответствует перемещению подвижной станции на десятки метров. Фактически медленные замирания представляют собой изменения среднего уровня сигнала при перемещении подвижной станции, на которые накладываются *рэлеевские замирания*. Как отмечалось выше, в зоне радиовидимости медленные замирания считаются скомпенсированными.

Диапазон *рэлеевских* флуктуаций сигнала может достигать 40 дБ (рис. 3), из которых 10 дБ — превышение над средним уровнем и 30 дБ — провалы

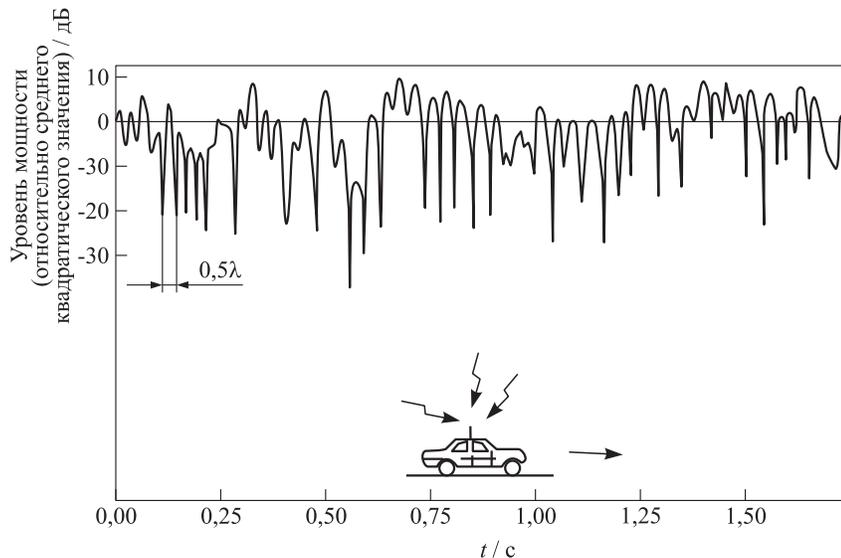


Рис. 3 Пример временной зависимости уровня мощности (относительно среднего квадратического значения) принимаемого радиосигнала в канале с рэлеевскими замираниями как результат многолучевого распространения в условиях плотной городской застройки

ниже среднего уровня. Причем частота проявлений глубоких провалов значительно ниже частоты менее глубоких. При неподвижном абонентском аппарате интенсивность принимаемого сигнала не меняется.

При перемещении станции периодичность флуктуации в пространстве составляет около полуволны, т. е. порядка 30–40 см в линейной мере (УКВ). Период флуктуации во времени зависит от скорости перемещения подвижной станции: например, при скорости 50 км/ч период флуктуации составляет около 20 мс, а при 100 км/ч — около 10 мс. Частота замираний глубиной от 30 до 10 дБ при скорости порядка 50 км/ч составляет 2–25 Гц соответственно, а средняя длительность замираний в интервале от 30 до 10 дБ при той же скорости — порядка 0,4–4 мс.

Для борьбы с быстрыми замираниями используются два основных подхода: разнесенный прием и расширение спектра (скачки по частоте, прямая модуляция). Для голосовой связи в диапазоне УКВ ($\lambda = 10\text{--}0,6$ м) методы расширения спектра из-за недостаточной канальной плотности оказываются неприменимыми [8, 9].

Разнесенный прием. Идея разнесенного приема как меры борьбы с быстрыми замираниями заключается в совместном использовании нескольких сигналов, различающихся (разнесенных) по какому-либо параметру или координате. Причем разнесение должно выбираться таким образом, чтобы вероятность одновременных замираний всех используемых сигналов была много меньше, чем какого-либо одного из них. Эффективность разнесенного приема тем выше, чем менее коррелированы замирания в составляющих сигналах. Кроме того, важна техническая реализуемость и простота используемого метода. Возможны следующие варианты разнесенного приема:

- во времени; при этом используются сигналы, сдвинутые во времени один относительно другого; этот метод сравнительно легко реализуем лишь в цифровой форме, и улучшение разборчивости сигнала отражается на пропускной способности канала связи;
- по частоте; при этом используется несколько частотных каналов, т. е. платой является расширение используемой полосы частот;
- по углу или по направлению; при этом прием производится на несколько антенн с рассогласованными (не полностью перекрывающимися) диаграммами направленности; в этом случае сигналы с выходов разных антенн коррелированы тем слабее, чем меньше перекрытие диаграмм направленности, но при этом

одновременно падает и эффективность приема (интенсивность принимаемого сигнала), по крайней мере, для всех антенн, кроме одной;

- по поляризации, когда, например, две антенны принимают сигналы двух взаимно ортогональных поляризаций; практического значения этот вариант не имеет, поскольку в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) замирания на разных поляризациях сильно коррелированы;
- в пространстве, т. е. с приемом сигналов на несколько пространственно разнесенных антенн; это единственный метод, находящий практическое применение, и именно он обычно имеется в виду, когда говорят о разнесенном приеме.

Для метода пространственного разнесения, с учетом сказанного выше, необходимы как минимум две приемные антенны, установленные с некоторым смещением одна относительно другой. Выигрыш от разнесенного приема тем заметнее, чем больше число используемых антенн, однако при этом возрастает и сложность технического решения. Поэтому практическое применение находит простейшая система с двумя приемными антеннами и, в основном, на базовых станциях. На подвижных станциях сколько-нибудь широкого распространения разнесенный прием не получил. Существенными характеристиками системы разнесенного приема являются расстояние между антеннами и способ совместного использования сигналов с выходов двух антенн. С ростом расстояния между антеннами корреляция между флуктуациями уровня принимаемых ими сигналов падает, и в этом смысле чем больше разнос антенн, тем выше эффективность разнесенного приема. Но тогда возрастает и сложность технической реализации, так что на практике разнос берется минимальным, при котором разнесенный прием уже достаточно эффективен. С учетом как аналитических оценок, так и эмпирических данных разнос обычно составляет около десятка длин волн, т. е. порядка нескольких метров для верхней части УКВ-диапазона [8, 9].

Объединение сигналов с выходов двух антенн возможно либо как выбор одного (более сильного) из двух сигналов, либо как суммирование обоих сигналов — додетекторное (когерентное) или последетекторное — с равными весами или взвешенными, обеспечивающими получение максимума отношения сигнал/шум. В случае двух приемных антенн различие в эффективности этих способов относительно невелико, поэтому на практике обычно применяется наиболее простой из них — выбор максимального из двух сигналов с коммутацией выхода соответствующего приемника на вход тракта последующей обработки.

4 Метод временного комплексирования речевого сигнала с тональной низкочастотной синхронизацией

4.1 Основные оценки рэлеевского канала

Из вышеприведенной ПРВ рэлеевского канала (1) можно показать: вероятность того, что огибающая A будет меньше или равна заданной величине x , находится интегрированием:

$$p(A \leq x) = \int_0^x p(A) dA = 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

При этом *средний уровень огибающей* в рэлеевском канале

$$E(A) = \int_0^\infty Ap(A) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma.$$

Мгновенное значение мощности принимаемого сигнала $P_{пр}$ связано с огибающей сигнала A соотношением $P_{пр} = A^2/2$. С учетом этого запишем функцию распределения мощности принимаемого сигнала:

$$p(P_{пр} \leq x) = p(A \leq \sqrt{2x}) = 1 - e^{-x/\sigma^2}.$$

Математическое ожидание мощности сигнала $E(P_{пр}) = \sigma^2$.

Запас на замирание F для рэлеевского канала связан с *вероятностью нарушения связи* $P_{нс}$ соотношением $F = -1/\ln(1 - P_{нс})$. При $P_{нс} \ll 1$ можно использовать оценку $F = -1/P_{нс}$ или $F_{дБ} = -10 \lg P_{нс}$. Следовательно, увеличение запаса на замирание на 10 дБ приводит к уменьшению вероятности нарушения связи в 10 раз. Например, для $P_{нс} = 0,01$ величина запаса на замирание должна быть $F \approx 30$ дБ.

4.2 Базовые преобразования

Преобразование сообщения заключается в приведении его к компенсационной форме. Для компенсации замираний в речевом сообщении движущихся радиостанций речевой поток необходимо преобразовать по форме таким образом, чтобы преобразование, по существу, являлось разнесением в пространстве приема/передачи.

Длительность замираний в реальных радиоканалах обуславливается длительностью приема в когерентной зоне $\Delta_{кор}$, которая характеризуется, в

первую очередь, физическими свойствами среды передачи (в основном, характером рельефа местности и абсолютной скоростью движения станции).

Речевой поток $C(t)$, $t \in [0, T]$ кадрируется:

$$[C(t_i), C(t_{i+1})], \quad i = \overline{1, T/\Delta_{кор}}. \quad (2)$$

Все преобразования осуществляются внутри кадра, который для этого разбивается на сегменты.

Из-за узкополосности УКВ-радиосигнала применение временных масштабируемых преобразований речевого потока весьма ограничено [9]. Тем не менее, следует учитывать, что дифференциальная энтропия (средняя информация) [10] источника

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \log_2 C(t) dt$$

достигает своего максимума в случае гауссовской плотности распределения сигнала:

$$H_\Gamma = \frac{\ln(2\pi\sigma^2 e)}{2 \ln 2},$$

а спектральная плотность мощности речевого сигнала имеет хорошую аппроксимацию функцией плотности вероятности Лапласа [11], энтропия которой

$$H_\Pi = \frac{\ln(\sqrt{2}\sigma e)}{\ln 2}.$$

Воспользовавшись избыточностью $H_\Pi < H_\Gamma$, можно увеличить энтропию сообщения, заполнив ее компенсационной информацией.

Для этого сигнал внутри кадра посегментно комплексировается $C_k(t) \gg \delta + C_k(t + \Delta_{кор}/2)$. Циклический временной сдвиг $C_k(t) \gg \delta$ обеспечивает диффузный характер преобразования. При этом разнесенный прием/передача, выраженный во временных преобразованиях, реализуется сложением отстоящих во времени сегментов. Для обратимости преобразования и сохранения амплитудного спектра сложение «закольцовывается» модулем. Таким образом, прямое преобразование \vec{D} на передающей стороне до модуляции

$$\vec{D}_n : \begin{cases} C_{k+1}(t) = \left[C_k(t) \gg \right. \\ \left. \gg \delta + C_k \left(t + \frac{\Delta_{кор}}{2} \right) \right] \bmod A; \\ C_{k+1} \left(t + \frac{\Delta_{кор}}{2} \right) = C_k(t) \\ \text{для } \forall t \in \left[t_i, t_i + \frac{\Delta_{кор}}{2} \right], \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3)$$

где A — максимальное значение амплитуды модулирующего сигнала $A = \max_{t \in [0, T]} C(t)$. Обратное

преобразование \overleftarrow{D} после приема и демодуляции

$$\overleftarrow{D}_n: \begin{cases} C_{k+1}(t) = \left(\left[C_k(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - C_k \left(t + \frac{\Delta_{\text{кор}}}{2} \right) \right] \bmod A \right) \ll \delta, \\ C_{k+1} \left(t + \frac{\Delta_{\text{кор}}}{2} \right) = C_k(t) \\ \text{для } \forall t \in \left[t_i, t_i + \frac{\Delta_{\text{кор}}}{2} \right], k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4)$$

Преобразования \overrightarrow{D}_n и \overleftarrow{D}_n итеративные: $n = 5 \dots 10$. Величина временного сдвига δ на итерацию берется $\delta = \Delta_{\text{кор}} / (2n)$.

4.3 Синхронизация кадров

Для корректного преобразования \overleftarrow{D} принятого сообщения по рэлеевскому каналу необходимо определить границы кадра. Для маркировки смежных сегментов и разделения границ кадров предлагается использовать тоновый сигнал $\Gamma(i)$, расположенный в неслышимой нижней части спектра:

$$C_m(t) = C_{k+1}(t) + \Gamma(i), \\ \forall t \in \left[t_i, t_i + \frac{\Delta_{\text{кор}}}{2} \right], i = \overline{1, T/\Delta_{\text{кор}}}.$$

При приеме НЧ сигнал отфильтровывается и используется для синхронизации кадров.

4.4 Реализация компенсационной схемы

Временные преобразования осуществляет специально разработанный компенсационный блок (прямого/обратного преобразования). Его макет реализован в виде программной модели устройства комплексирования и памяти с использованием специализированных плат дельта-кодера и дельта-декодера.

Речевой сигнал, поступающий на вход, преобразуется адаптивным дельта-кодером в цифровую форму и записывается в память в виде последовательности речевых сегментов (2). В соответствии с формулами (3) и (4) прямого \overrightarrow{D}_n и обратного \overleftarrow{D}_n преобразований устройство создает компенсационную форму этих сегментов в кадре. После выполнения процедуры комплексирования, адаптивный дельта-кодер восстанавливает на выходе преобразователя модулирующую форму сигнала внутри каждого сегмента. В режиме приема по тональному

НЧ-синхросигналу производится кадровая синхронизация и обратное преобразование для восстановления исходного речевого сигнала.

5 Численное моделирование схемы временного комплексирования

Качество восстановления сигнала является важнейшей эксплуатационной характеристикой компенсатора. Оно определяется искажениями сигнала при его частотных или временных преобразованиях и может быть выражено *разборчивостью* и *узнаваемостью* восстановленной речи. Приемлемым или коммерческим качеством восстановленной на приемном конце речи считается такое, когда слушатель без усилий может определить голос говорящего и смысл произносимого сообщения. Точную количественную оценку разборчивости речи можно получить путем измерения процента правильно переданных тестовых сообщений при проведении длительных и трудоемких артикуляционных испытаний.

Для моделирования голосовых сообщений оператора передающей станции (рис. 4) были записаны голосовые образчики — фонетические символы радиоловительского позывного автора *RD3AUV*. Образчики записывались в *wav*-файл с частотой дискретизации 5 кГц и 8-битным квантованием.

После применения к речевому потоку прямого комплексирования преобразования над сообщением выполнялись имитационные преобразования передачи по рэлеевскому каналу: в речевом сигнале «наводились» быстрые замирания (рис. 5).

Анализ качества восстановления сообщений основывается на *критерии информационного рассогласования* [12] между исходными $C_{\text{и}}(t)$, $t \in [0, T]$ и восстановленными $C_{\text{в}}(t)$, $t \in [0, T]$ после передачи по рэлеевскому каналу сообщениями. Информационное рассогласование $\gamma_{\text{и,в}}$ рассчитывается на основе оценок автоковариационных матриц речевых сигналов

$$\gamma_{\text{и,в}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\text{tr} \left(\frac{K_{\text{и}}^i}{K_{\text{в}}^i} \right) - \ln K_{\text{в}}^i \right], \quad (5)$$

где $K_{\text{в}}^i$ и $K_{\text{и}}^i$ — выборочные оценки автоковариационных матриц i -х сегментов исходного $C_{\text{и}}(t_i)$ и восстановленного $C_{\text{в}}(t_i)$ сообщений. Оценка качества восстановления производится вычислением информационного рассогласования (5) между сегментами сравниваемых речевых сообщений. Оцен-

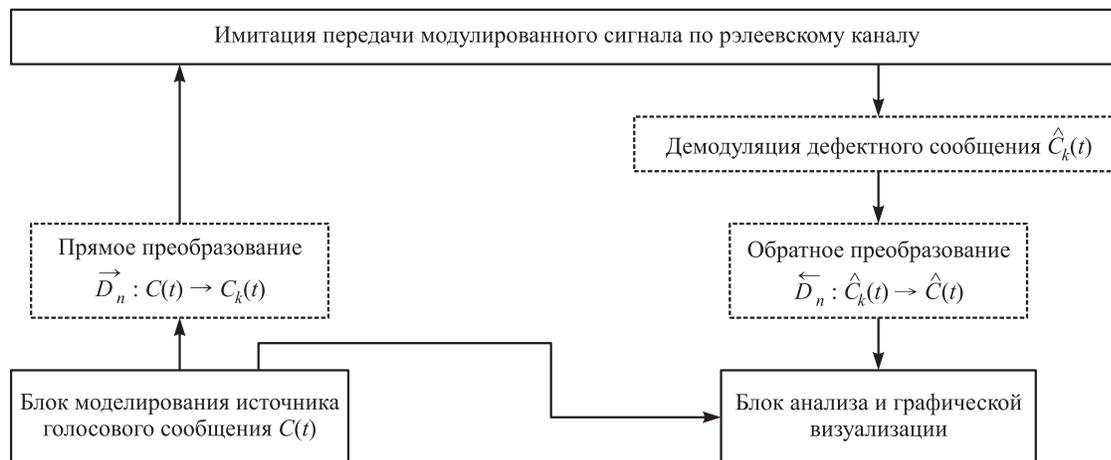


Рис. 4 Структурная схема системы моделирования. Стрелками обозначена циркуляция модельного сообщения

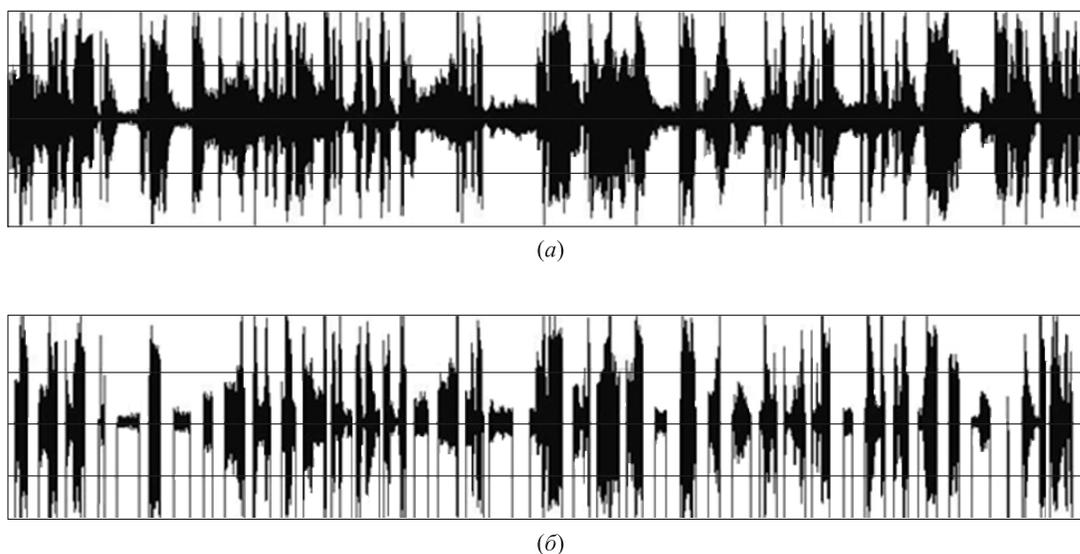


Рис. 5 Визуализация: (а) компенсированный речевой сигнал; (б) дефектный речевой сигнал

Таблица 1 Рассогласование речевых сигналов в зависимости от коэффициента заполнения сигнала замираниями

Коэффициент заполнения	Информационное рассогласование
0	0,00172
0,1	0,06381
0,15	0,08493
0,3	0,12926
0,4	0,23752
0,6	0,41841

ка автоковариационных матриц производится методом скользящего окна [12].

Из табл. 1 видно, что предложенный метод компенсации замираний на основе временного

комплексирования обеспечивает удовлетворительную разборчивость при коэффициенте заполнения 0,4. Снижение результатов восстановления при больших значениях коэффициента обусловлено превышением интервалов замираний над длиной внутрикадрового сегмента.

6 Выводы

Недостатки метода:

- снижение оперативности обмена голосовыми сообщениями из-за задержки и, следовательно, проигрыш бескомпенсационной передачи при неглубоких замираниях;
- ухудшение качества речевого сигнала из-за временного комплексирования.

Достоинства:

- быстрота обработки;
- незначительное увеличение сложности и стоимости принимаемого и передающего устройств;
- простота технического внедрения, так как подобно маскирующему устройству компенсатор может быть реализован в виде больших интегральных схем (БИС) и интегрирован в тангенту (использование специализированных БИС позволяет при энергопотреблении 75 мВт обеспечить удовлетворительное качество восстановления речевого сигнала);
- существенное повышение разборчивости в условиях глубоких замираний;
- возможность осуществления связи при сильных замираниях.

Таким образом, предложенный метод временного комплексирования расширяет возможности применения верхних УКВ-диапазонов в подвижной радиосвязи.

Литература

1. Черенкова Е. Л., Чернышев О. В. Распространение радиоволн. — М.: Радио и связь, 1984. 272 с.
2. Макаров Г. И., Новиков В. В., Рыбачек С. Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. — М.: Наука, 1991. 196 с.
3. Okumura Y., Ohmohri E., Kawano T., Fukada K. Field strength and its variability in VHF and UHF land-mobile radio service // Rev. Electrical Communication Laboratories, 1968. Vol. 16. No. 9-10. P. 825–873.
4. Hata M. Empirical formula for propagation loss in land mobile radio service // IEEE Trans. Veh. Technol., 1980. Vol. VT-29. No. 3. P. 317–325.
5. Голяницкий И. А. Математические модели и методы в радиосвязи / Под ред. Ю. А. Громакова. — М.: ЭКО-Трендз, 2005. 440 с.
6. Васильев К. К. Математическое моделирование систем связи: Учебное пособие. — Ульяновск: УлГТУ, 2008. 170 с.
7. Синицын И. Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. 768 с.
8. Сикарев А. А. Оптимальный разнесенный когерентный и некогерентный прием в каналах с флуктуационными и сосредоточенными помехами // Проблемы передачи информации, 1973. Т. 9 № 1. С. 57–65.
9. Андрианов М. Н. Повышение помехоустойчивости подвижной связи в канале с логнормальными замираниями комплексированием прерывистой связи с разнесенным приемом сигналов // Электромагнитные волны и электронные системы, 2009. Т. 14. № 7. С. 11–17.
10. Вернер М. Дифференциальная энтропия // Основы кодирования. — М.: Техносфера, 2004. С. 109–114.
11. Рабинер Л. Р., Шафер Р. В. Цифровая обработка речевых сигналов / Пер. с англ.; под ред. Ю. Н. Прохорова, М. В. Назарова. — М.: Радио и связь, 1981. 496 с.
12. Савченко В. В. Различение случайных сигналов в частотной области // Радиотехника и электроника, 1997. Т. 42. № 4. С. 426–429.

ДЕРЕВО РАБОТ И МАССОВО-ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА

В. А. Козмидиади¹

Аннотация: Рассмотрен механизм, обобщающий *MapReduce*. Особое внимание уделено способам раздачи работ для параллельного выполнения. Предполагается, что простые работы образуют дерево, а разделением сложных работ на части ведаёт координатор. Исполнители же выполняют только простые работы. Оказывается, что от порядка обхода дерева работ существенно зависит сложность восстановления после отказа узла. Основное внимание уделено способам обхода дерева работ.

Ключевые слова: *MapReduce*; массово-параллельная обработка; обходы дерева; дерево работ; восстановление после отказа

1 Введение

Сейчас большой популярностью пользуется конструкция (*framework*) *MapReduce* [1], предложенная фирмой *Google*, — программная модель для обработки и создания больших наборов данных. *MapReduce* предназначена для обработки на кластерах, т. е. системах, которые допускают массово-параллельную обработку (*massive parallel processing*). Значительную роль в понимании функционирования *MapReduce* сыграла статья [2]. Параллельно с работами *Google*, но значительно позднее, начаты работы по реализации *MapReduce* [3] в рамках открытого проекта *Apache Hadoop* [4].

Объясним, следуя [5], функционирование *MapReduce*. Среди узлов кластера или процессов выделяется один *мастер* (*master*) и многие *рабочие* (*workers*). Допустим, что следует решить простейшую проблему: обработать массив, разбив его на подмассивы. В таком случае задача мастера сводится к тому, что он делит этот массив на части, посылает каждому из рабочих положенный ему подмассив, а затем получает результаты и объединяет их. При этом *map* использует в качестве входных параметров функцию и набор значений, применяя эту функцию к каждому из значений, а *reduce* комбинирует полученные результаты. Созданная в *Google* конструкция *MapReduce* делает примерно то же самое, но по отношению к гигантским объемам данных. В этом случае *map* — это функция запроса от пользователя, помещенная в библиотеку *MapReduce*. Ее работа сводится к выбору входной пары, ее обработке и формированию результата в виде значения и некоторого промежуточного ключа, служащего указателем для *reduce*. Конструкция *MapReduce* собирает вместе все значения с одинаковыми промежуточными ключами и передает их в функцию *reduce*, также написанную пользователем. Эта функция

воспринимает промежуточные значения, каким-то образом их собирает и воспроизводит результат, выложенный обычно меньшим числом значений, чем входное множество.

При вызове функции из библиотеки *MapReduce* выполняется примерно такая последовательность операций.

1. Входные файлы разбиваются на срезы размером от 16 до 64 Мбайт каждый, и на кластере запускаются копии программы. Одна из них мастер, а остальные — рабочие. Всего создается *M* работ *map* и *R* работ *reduce*. Поиск свободных узлов и назначением работ занимается мастер.
2. В процессе исполнения рабочие, назначенные на выполнение работы *map*, считывают содержимое соответствующих срезов, осуществляют их грамматический разбор, выделяют отдельные пары «ключ и соответствующее ему значение», а потом передают эти пары в обрабатывающую их функцию *map*. Промежуточное значение в виде идентификатора и значения буферизуется в памяти.
3. Периодически буферизованные пары сбрасываются на локальный диск, разделенный на *R* областей. Расположение этих пар передается мастеру, который отвечает за дальнейшую передачу этих адресов рабочим, выполняющим *reduce*.
4. Рабочие, выполняющие работу *reduce*, ждут сообщения от мастера о местоположении промежуточных пар. По его получении они, используя процедуры удаленного вызова, считывают буферизованные данные с локальных дисков тех рабочих, которые выполняют *map*. Загрузив

¹Институт проблем информатики Российской академии наук, v.kozmidiady@gmail.com

все промежуточные данные, рабочие сортируют их по промежуточным ключам и, если есть необходимость, группируют.

5. Рабочий обрабатывает данные по промежуточным ключам и передает их в соответствующую функцию *reduce* для вывода результатов.
6. Когда все работы *map* и *reduce* завершаются, конструкция *MapReduce* возобновляет выполнение вызывающей программы и та продолжает исполнять пользовательский код.

В настоящей статье рассматривается не собственно конструкция *MapReduce* (эта конструкция может использоваться в качестве одного из примеров), а способы раздачи работ для параллельного выполнения. Предполагается, что простые работы образуют дерево, а разделением сложных работ на части ведаёт координатор (или мастер). Исполнители же (или рабочие) выполняют только простые работы. В центре рассмотрения — огромные деревья работ, число вершин которых может достигать 10^{10} , а количество исполнителей — 10^4 . Оказывается, что от порядка обхода дерева работ существенно зависит сложность восстановления после отказа узла. Фактически статья посвящена связи обходов дерева работ и сложности восстановления. Рассматриваются только отказы, при которых происходит останов при ошибке (*fail-stop faults*), считается, что никаких других отказов не происходит, в частности отсутствуют византийские отказы [6].

2 Основные определения

Для параллельного выполнения некоторого задания его следует разделить на части, которые могут быть выполнены параллельно разными процессами, возможно, находящимися на разных процессорах. Минимальная неделимая часть задания, т. е. часть, которая не допускает деления на части, выполняемые параллельно, называется *простой работой*. Естественно, что для некоторых частей важен порядок их обработки по отношению к остальным. Минимальный набор простых работ $\{p_1, \dots, p_n\}$, которые должны быть выполнены перед тем, как может начать выполняться некоторая другая простая работа p , называется *полной базой* простой работы p и обозначается как $B_F(p)$. Если $B_F(p) = \emptyset$, то p называется *листовой работой*, иначе — *управляющей* или *составной работой*. Если выбросить из $B_F(p)$ все такие простые работы $B_F(p_i)$, что $p_i \in B_F(p)$ и $B_F(p_i) \subseteq B_F(p)$, то образуется *база* p , которая обозначается через $B(p)$. Если $p_i \in B(p)$, то p_i *подчинена* p . Множеству простых работ одного задания можно сопоставить направленный *граф работ*,

вершинами которого являются простые работы, а дугами $p \rightarrow p_i, p_i \in B(p)$.

Дальше рассматриваются только такие задания, для которых граф работ:

- не меняется в процессе выполнения;
- представляет собой дерево. Корнем этого дерева в невырожденном случае является некоторая управляющая работа, которая соответствует всему заданию в целом.

Все простые работы должны быть *идемпотентными*. Это означает, что работа, будучи прерванной в любом месте и повторена сначала, даст тот же результат, как если бы она не была прервана, а дошла до конца.

В статье [7] даются примерно те же определения, однако они уточнены.

Для каждой вершины дерева работ нумеруются все дуги, исходящие из этой вершины, так: $0, 1, \dots, n$. Эта нумерация локальна: каждая вершина имеет свою нумерацию. Дерево работ включает в себя номера дуг; другая нумерация — другое дерево. Путь от корня до любой вершины p дерева можно задать как последовательность номеров дуг, ведущих к заданной вершине. Эта последовательность называется p -путем.

Выполнение задания осуществляют его *участники*, т. е. процессы или потоки (*threads*) одного процессора или многих процессоров, если они образуют кластер. В зависимости от типа выполняемой работы участник может играть роль *исполнителя*, выполняя листовую работу, или роль *координатора*, выполняя управляющую работу.

2.1 Порядок обхода дерева работ

Обход дерева работ должен удовлетворять такому условию: «пока не выполнена управляющая работа, не могут выполняться подчиненные ей простые работы». Этому условию, например, удовлетворяют алгоритмы поиска в глубину (*Depth-first search, DFS*) и поиска в ширину (*Breadth-first search, BFS*). Описание этих алгоритмов можно найти, например, в [8]. Предполагается, что всюду используется алгоритм *DFS*, хотя алгоритмов, удовлетворяющих сформулированному выше условию, бесконечно много.

Сравнение с конструкцией *MapReduce* показывает, что в *MapReduce* дерево работ имеет высоту 1, поэтому не возникает вопроса о порядке обхода этого дерева.

2.2 Пример

Примером является задание, заключающееся в копировании параллельной (распределенной) файловой системы, причем предполагается, что как символические (*symbolic*), так и жесткие (*hard*) ссылки отсутствуют. Для выполнения этого задания используется кластер, на узлах которого размещены координатор и исполнители как отдельные процессы. При этом процесс-координатор один, на его узле могут располагаться процессы-исполнители. На других узлах размещены только процессы-исполнители.

Листовая работа представляет собой копирование отдельного файла или создание каталога, не содержащего ни файлов, ни подкаталогов. Управляющая работа — это создание каталога, который содержит подкаталоги и/или файлы. Дуги ведут от каталога к файлам или подкаталогам в нем. Импотентность простых работ означает, что структура каталогов и содержимое файлов в исходной файловой системе не меняются во время копирования. Если каталог или файл уже существуют в месте, куда выполняется копирование, подобная ситуация не рассматривается как ошибка. Просто подобный каталог или файл должны быть предварительно удалены.

2.3 Алгоритмы с фиксированным координатором

В зависимости от алгоритма распределения и выполнения работ участник может как менять свою роль при обработке задания, так и выполнять одну и ту же роль в течение всей обработки. Алгоритм может также ограничивать число участников, играющих определенную роль, и их размещение. Например, можно рассмотреть случай, при котором имеется один участник-координатор, причем он не может никому передавать своих полномочий. Остальные участники исполняют роли исполнителей. Изменение ролей может произойти только из-за отказа участников. Такие алгоритмы называются *алгоритмами с фиксированным координатором* (ФК-алгоритмами). Анализ этих алгоритмов существенно проще, чем анализ алгоритмов, которые не являются ФК-алгоритмами. Это основная причина того, что во всем дальнейшем изложении рассматриваются только ФК-алгоритмы, причем это не оговаривается специально.

Выполнение задания происходит так. Координатор раздает исполнителям листовые работы (управляющие работы он обрабатывает сам) и получает сообщения об окончании выполнения розданных работ. Очередей листовых работ у исполните-

лей нет, поэтому сообщение о завершении работы одновременно служит запросом на получение следующей работы. Конечно, допускаются простои исполнителей, если у координатора нет работ, которые можно было бы им поручить.

2.4 Продолжение примера

Далее продолжается рассмотрение примера с копированием файловой системы. Координатор обходит дерево исходной файловой системы, начиная с ее корня. Обход дерева файловой системы должен удовлетворять такому условию, связанному со спецификой копирования: «пока не создан каталог, нельзя создавать подкаталоги и файлы в нем». Этому условию, например, удовлетворяет алгоритм поиска в глубину, который и используется. В этом случае координатор действует так. Из достигнутой вершины может исходить несколько дуг. Если число дуг равно 0, координатор поручает исполнителю листовую работу, т. е. скопировать этот файл или же создать пустой каталог. Далее он возвращается к каталогу, которому принадлежит достигнутая вершина. Если из достигнутой вершины исходит несколько дуг, а она предварительно не была посещена, она помечается как посещенная, и в ней устанавливается 0 — признак того, что обрабатывается дуга 0. Если достигнутая вершина уже была посещена, проверяется, все ли дуги обработаны. Если это так, координатор возвращается к каталогу, которому принадлежит достигнутая вершина. Если это не так, происходит переход по следующей дуге и помечается, какая дуга обрабатывается. Возврат из корня означает конец выполнения задания.

Конечно, координатор и исполнители должны обмениваться сообщениями. Координатор должен сообщить исполнителю, какая листовая работа ему поручена; в свою очередь, исполнитель должен оповестить координатора о завершении работы.

2.5 Алгоритмы

Все далее рассматриваемые алгоритмы — это ФК-алгоритмы, которые используют поиск в глубину. Их названия выглядят так: *xy*-алгоритм, причем *x* и *y* характеризуют вход и выход, $x \in \{A, C\}$, $y \in \{A, C\}$; *A* означает асинхронный, а *C* — синхронный. Алгоритмы *CC*, *AA*, *AC* и *CA* описаны в [9].

2.5.1 Алгоритм с синхронным входом и выходом

Алгоритмы с синхронным входом и выходом (*CC*-алгоритмы) дальше будут называться *2C*-алгоритмами. Они характеризуются следующим. Координатор при получении от исполнителя сообщения

о завершении выполнения листовой работы продолжает перебор дуг, исходящих из управляющей работы. Если ему встречается листовая работа, он отдает ее на выполнение одному из исполнителей, готовых ее взять на выполнение, отмечая в своем контексте, какому исполнителю и какую работу он передал. Если встречается управляющая работа, координатор ждет, пока будут выполнены все текущие работы, т. е. освободятся все исполнители. После этого он начинает перебирать дуги, исходящие из найденной управляющей работы. Такое ожидание означает синхронное перемещение всех участников вниз по дереву работ (синхронный вход в обработку управляющей работы). Когда будет выполнена последняя работа, соответствующая последней дуге, которая исходит из текущей управляющей работы, координатор поднимается вверх по дереву работ, чтобы продолжить обход. Такое ожидание означает синхронное перемещение всех участников вверх по дереву работ, т. е. синхронный выход из обработки управляющей работы.

2.5.2 Алгоритм с асинхронным входом и выходом

Алгоритмы с асинхронным входом и выходом (АА-алгоритм) дальше будут называться 2А-алгоритмами. В отличие от 2С-алгоритма, в данном алгоритме нет ожидания завершения всех выданных листовых работ перед началом обработки управляющей работы и после ее завершения. Это значит, что при обнаружении управляющей работы координатор начинает ее выполнять, не дожидаясь освобождения всех исполнителей. По мере освобождения исполнителей координатор отыскивает и передает листовые работы из новой управляющей работы свободным исполнителям. Когда передана на выполнение листовая работа, соответствующая последней дуге, исходящей из управляющей работы, координатор завершает выполнение этой управляющей работы. При этом он не ждет, пока будут выполнены листовые работы, как в 2С-алгоритме. Далее координатор продолжает выполнять управляющую работу, которая была прервана обнаружением новой управляющей работы. Исполнители же по-прежнему обращаются к координатору за листовыми работами. По-видимому, 2А-алгоритм наиболее производителен, поскольку он загружает работами исполнителей, как только они освобождаются, однако при этом используется обход в глубину. Интересно было бы оценить, можно ли достигнуть лучших результатов, если отказаться от поиска в глубину, сохраняя, конечно, принцип «пока не выполнена управляющая работа, не могут выполняться подчиненные ей работы». Этой проблеме посвящена работа [10].

2.5.3 Алгоритмы с асинхронным (синхронным) входом и синхронным (асинхронным) выходом

Обычно эти алгоритмы не используются, однако приведем их для полной картины. В алгоритме с асинхронным входом и асинхронным выходом (АС-алгоритме) координатор не ожидает освобождения всех исполнителей перед спуском по дуге, ведущей к управляющей работе. В алгоритме с синхронным входом и асинхронным выходом (СА-алгоритме) ожидание не делается перед подъемом по последней дуге.

2.6 Контекст

Назовем *контекстом* набор данных, которые необходимы участнику для следующих функций:

- выполнения своей роли при *нормальной* (в отсутствие отказов) работе. Для координатора это раздача исполнителям листовых работ и обработка сообщений об их окончании, а также обработка управляющих работ. Для исполнителей это выполнение листовой работы и посылка сообщения о ее окончании. Особым образом отмечена *точка активности* координатора. Эта точка задается p -путем, ведущим к последней листовой работе, которая была поручена какому-либо исполнителю. Точка активности — то место, начиная с которого координатор должен продолжить обход дерева работ при освобождении какого-либо исполнителя;
- восстановления выполнения задания при отказе одного или нескольких участников.

Контекст координатора меняет только сам координатор. Причин его изменения при нормальной работе только две:

- (1) поручение исполнителю выполнить листовую работу;
- (2) сообщение исполнителя о завершении выполнения.

Координатор, используя свой контекст, вычисляет контекст исполнителя и направляет ему его вместе с поручением выполнить листовую работу. Подобная передача контекста называется *естественной*. Вообще говоря, в процессе выполнения листовой работы координатор может изменить контекст исполнителя *неестественным* образом, не оказывая при этом влияния на выполнение работы. Зачем это может быть нужно, будет рассмотрено дальше.

2.7 История контекстов

Поскольку контексты и координатора, и исполнителя изменяются в одном единственном процессе-координаторе, на множестве контекстов всех участников, участвующих в выполнении задания, можно ввести линейный порядок и связать с каждым контекстом его номер. Эта последовательность называется *историей контекстов*. Для одного и того же дерева работ история контекстов может быть различной. Конечно, она может меняться при изменении алгоритма, более того, при неизменном алгоритме различные выполнения задания при одних и тех же работах могут дать разные истории, так как длительности работ, а потому и моменты их завершения, случайны. Имеет место недетерминированность, о которой идет речь в [11, 12]. Несмотря на это, различные реализации истории контекстов (при неизменном алгоритме) довольно близки. В пределах некоторого отрезка истории контекстов отдельные контексты могут быть переставлены, что соответствует разным порядкам завершения листовых работ, подчиненных одной управляющей работе. Однако запуск работ неизменен и определяется их нумерацией. В любом случае недетерминированность не сказывается на результате выполнения задания — он должен быть одинаковым.

3 Размышления о восстановлении

3.1 Можно ли достигнуть равенства числа пострадавших и повторяемых листовых работ?

В некоторых случаях это возможно. Рассмотрим, например, какой-нибудь xy -алгоритм. Допустим, что происходит отказ узла или узлов, не содержащих координатора. Контекст координатора, конечно, содержит информацию о том, какие работы выполнял каждый из исполнителей. Поэтому координатор знает, какими листовыми работами были заняты отказавшие исполнители, и может повторить только их. Для этого даже не нужно знать, как устроены контексты исполнителей.

Попробуем повторить то же рассуждение в случае отказа двух узлов, один из которых содержит координатора. Предположим далее, что используется $2C$ -алгоритм (самый простой), причем контекст исполнителя представляет собой p -путь к выполняемой работе. Все исполнители, кроме одного, завязли в своих работах, они трудяги; координатор в пределах одной составной работы последо-

вательно поручает листовые работы одному и тому же исполнителю-передовику. Передовик получает очередную листовую работу, выполняет ее, получает следующую и т. д. Все это происходит в одной управляющей работе. В некоторый момент отказывают координатор и передовик (инициатива наказуема). При восстановлении можно опираться только на контексты исполнителей-трудяг. Если координатор передавал сообщения с контекстами только передовику и при этом действовал естественным образом, об этих сообщениях и выполненных при этом работах трудяги не знают, как, впрочем, не знают и о пострадавших работах. Поэтому приходится повторять уже выполненные листовые работы. Таким образом, напрашивающееся решение, позволяющее избежать лишних повторов, — изменять контексты исполнителей-трудяг неестественным образом. Это необходимо, чтобы обеспечить нужное для надежности некоторое число синхронных копий, поскольку только одна копия изготавливается естественно. Возникает неприятная проблема синхронизации (коммита, *commit*): либо все назначенные исполнители сохранили копии, либо — никто. Просто, но топорно и расточительно по времени. Можно ли избавиться от необходимости синхронизации, можно ли доказать, что иначе нельзя? Не удается даже корректно сформулировать задачу. Однако представляется, что если решение есть, то найти его очень непросто. Поэтому будем исходить из таких ограничений:

1. Не использовать больше двух синхронных контекстов или фрагментов контекстов (например, у координатора и исполнителя, который выполняет листовую работу).
2. Не использовать неестественное изменение контекстов.
3. При одиночных отказах требуется исключить повторение уже выполненных листовых работ. Допускается только повторение незавершенных работ.
4. При множественных отказах допускаются повторения. Вероятно, не слишком простая задача — разработка алгоритма с нетривиальной верхней оценкой числа повторений.

3.2 Какие могут быть контексты?

Выше было сказано, какими не должны быть контексты, но точно они не описаны. Рассмотрим контексты описанных алгоритмов; при этом не будут учитываться проблемы восстановления координатора после отказа.

3.2.1 Контексты 2C-алгоритма

Контекст исполнителя для этого алгоритма очень прост. Он представляет собой p -путь, ведущий к листовой работе, которую выполняет исполнитель, и номер контекста в истории контекстов (который, вообще говоря, не нужен). Если исполнитель свободен, он хранит контекст последней выполненной работы. Контекст координатора немногим сложнее: q -путь, ведущий к управляющей работе, которой подчинены листовые работы, выполняющиеся исполнителями. Этот q -путь кончается пучком дуг, которые соответствуют работам, выполняемым исполнителями, причем каждой такой работе приписан номер исполнителя. В контекст координатора включено также множество исполнителей, не занятых никакой работой. Кроме того, точка активности координатора отмечена соответствующим p -путем. Когда листовая работа завершается, соответствующая дуга удаляется. Аналогично управляющая работа удаляется, когда завершены все подчиненные ей листовые и управляющие работы.

3.2.2 Контексты 2A-алгоритма

Контекст исполнителя для 2A-алгоритма таков же, что и для 2C-алгоритма; однако контекст координатора много сложнее. Это поддерево дерева работ, которое включает в себя все p -пути выполняющихся исполнителями листовых работ с приписанными им номерами исполнителей. Кроме того, присутствует точка активности координатора и множество исполнителей, не занятых никакой работой.

3.2.3 Контексты AC- и CA-алгоритмов

После приведенных примеров нетрудно представить себе, как должны выглядеть контексты для этих алгоритмов.

3.3 Переход от контекстов исполнителей к контексту координатора

Пусть в некоторый момент времени имеется контекст координатора и контексты всех исполнителей. Тогда должны быть верны следующие утверждения:

- по контексту координатора вычисляется контекст любого исполнителя. В частности, это означает, что координатор знает, какой работой занят каждый исполнитель (или он бездельничает);
- по контекстам всех исполнителей вычисляется последний контекст координатора;

- по контекстам некоторых (но не всех) исполнителей вычисляется контекст координатора, который может совпадать или предшествовать его последнему контексту.

Неясно только, в любой ли момент времени должны быть верны эти утверждения или только в моменты взаимодействий. Но и взаимодействие не атомарно. Так или иначе, для всех xu -алгоритмов сформулированные утверждения гарантируют, что при отказе любого числа исполнителей будут повторяться только пострадавшие работы, а отказ координатора (в отсутствие отказа исполнителей) окажется незамеченным. Это несколько больше, чем допускается ограничениями 3 и 4 (см. п. 3.1), поэтому можно ослабить утверждения, но как?

Пусть в некоторый момент времени произошел отказ, пострадали координатор и несколько исполнителей. Тогда по контекстам оставшихся в живых исполнителей (хотя бы одного) можно вычислить некоторый контекст координатора, начиная с которого новый координатор обеспечивает корректное продолжение и завершение задания. Под *корректным* понимается такое продолжение, которое приводит к тому же результату, что и при отсутствии отказа. Однако при двойном отказе (координатор и исполнитель) не удастся ограничить нетривиальным образом количество выполненных работ, которые должны быть повторены (см. пример с передовиком и тудягами).

Способ, который будет рассматриваться дальше, таков. Каждый раз, когда координатор поручает исполнителю выполнение листовой работы, он передает ему в качестве контекста исполнителя свой контекст на этот момент или некоторую его часть. Неестественная коррекция контекста исполнителя не используется. У истории контекстов есть нумерация, поэтому каждый контекст имеет свой номер, который передается вместе с контекстом; исполнитель его запоминает. При восстановлении после отказа координатора можно упорядочить сохранившиеся контексты исполнителей по их номерам и восстановить контекст координатора.

3.4 Как могут выглядеть контексты?

Далее следует более подробное рассмотрение контекста координатора и исполнителей.

3.4.1 Контекст координатора

В общем случае (при поиске в глубину) он очень похож на контекст координатора в 2A-алгоритме. Контекст — это поддерево дерева работ. Все листья

этого поддерева таковы, что они соответствуют листовым работам, которые выполняются исполнителями. Каждой вершине-листу приписан номер исполнителя. Каждой вершине, не являющейся листом (она соответствует управляющей работе), приписано число, равное номеру некоторой дуги, исходящей из этой вершины. Число это соответствует последней работе, которая уже выполнена, причем выполнены все предшествующие ей (при поиске в глубину) работы. Кроме того, отмечена точка активности координатора. Координатор поддерживает номер контекста в истории контекстов. Как уже говорилось, координатор меняет свой контекст, когда он получает от исполнителя сообщение о завершении выполнения листовой работы и когда он поручает исполнителю выполнение листовой работы. Такого контекста координатору достаточно для нормальной (безотказной) работы.

3.4.2 Контекст исполнителя

Координатор, поручая исполнителю листовую работу, передает ему в качестве его контекста свой контекст на этот момент, включая точку активности и номер контекста в истории контекстов. Такого контекста исполнителю более чем достаточно, чтобы выполнить порученную работу, ему нужно только знать свой номер и отыскать эту работу. Кстати, точка активности в этом контексте очевидна, она определяется путем к порученной работе.

3.4.3 Восстановление

Некоторый исполнитель (например, имеющий минимальный номер; см. по этому поводу [13]), зная, что отказал координатор, берет на себя функции нового координатора. Он отыскивает среди контекстов выживших исполнителей самый свежий (большой по номеру) и на основании него вычисляет свой контекст. Почему нельзя в качестве контекста координатора прямо использовать самый свежий контекст? Потому что нужно поручить каким-то исполнителям работы, о которых из контекста известно, что они выполнялись отказавшими исполнителями. А свободных исполнителей в момент отказа может не хватить из-за их занятости (ведь время отказа больше времени, в которое был зафиксирован самый свежий контекст), да и вообще, общее число исполнителей из-за отказа уменьшилось. Хотелось бы описание этих дополнительных работ расположить в контексте.

3.5 Промежуточные итоги

Описанный 2A-алгоритм работоспособен, но он очень неэффективен в нормальном режиме. Его

неэффективность определяется огромным контекстом, размер которого оценивается как $O(hw)$, где h — высота дерева работ, а w — число исполнителей. Контекст — это дерево, которое координатор должен передавать на другие узлы кластера. Как его обновлять, вычислять разности? В общем случае это непонятно. Использование 2C-алгоритма приводит к слишком большим временам ожидания, которые снижают параллелизм. Чтобы попытаться получить более эффективное решение, чем 2C-алгоритм, но менее расточительное, чем 2A-алгоритм, можно двигаться в следующих направлениях:

- отказаться от 2A-алгоритма в пользу менее эффективного алгоритма, который бы удовлетворился более скромным контекстом (см. разд. 4);
- попытаться более детально изучить контекст, которого требует 2A-алгоритм. Контексты, которые описывались выше, недостаточно проработаны; на самом деле все выглядит, возможно, не таким объемистым (см. разд. 5);
- попытаться упростить описанный алгоритм, допуская большее количество повторяемых зря работ для упрощения контекста (см. разд. 6).

4 Хвостология

Хвостология, естественно, занимается изучением хвостов. *Хвост* — это дерево, все вершины которого имеют не больше одного потомка, не являющегося листом. Такой волосатый шнур или кусок колючей проволоки. Очень интересный объект. Хвосты могут лысеть и обрастать волосами (листьями), они могут укорачиваться и расти. Оказывается, что многие интересные алгоритмы распределения и выполнения работ опираются на хвосты.

Во всех дальнейших рисунках используются следующие обозначения:

- белый кружок — управляющая работа;
- черный кружок — листовая работа;
- сплошная стрелка — дуга, в конце которой выполняется листовая работа;
- пунктирная стрелка — еще не обнаруженная координатором работа.

Выполненные работы на рисунках отсутствуют.

4.1 CC-алгоритм

Для этого алгоритма контекст координатора очень прост. Он выглядит как p -путь к управляющей работе; последняя вершина этого пути имеет пучок исходящих дуг, кончающихся листьями. Этот

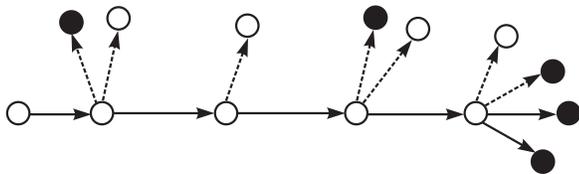


Рис. 1 Хвост CC -алгоритма

контекст напоминает хвост пуделя с кисточкой на конце. Пример хвоста приведен на рис. 1. Как живет такой контекст-хвост? В кисточку добавляются новые волосы-листья, старые выпадают. Когда координатор, перебирая дуги, исходящие из некоторой управляющей работы, обнаруживает новую управляющую работу, он ждет, когда кисточка исчезнет (хвост облысеет). Когда это происходит, хвост удлиняется, на конце вырастает новая кисточка. Возврат из управляющей работы — голый хвост укорачивается, потом, возможно, снова удлиняется и, наконец, на кончике вырастает кисточка. Растущая кисточка — это точка активности координатора. Размер контекста можно оценить как $O(h + w)$, где h — высота дерева работ, а w — число исполнителей.

Контекст координатора делит дерево работ на три части: левую, промежуточную и правую. В левой части все работы выполнены, в правой не только никакая работа не выполнена — даже ни одна из них не начата.

Контекст координатора легко сообщить исполнителю, передавая ему очередное поручение. Процедура восстановления очевидна.

4.2 AC -алгоритм

Контекст-хвост координатора устроен более сложно, это уже не хвост пуделя, но это по-прежнему хвост, однако волосы на нем растут по всей длине. Хвост ирландского сеттера. Как этот хвост выглядит и живет?

Хвост клочковатый, волосы могут исходить только из управляющих работ, но действительно растут они только в кисточке на конце хвоста. А в других местах они могут только выпадать. Хвост может удлиняться, несмотря на это, на конце есть кисточка, но при удлинении старая кисточка перестает расти, зато на некотором расстоянии от нее

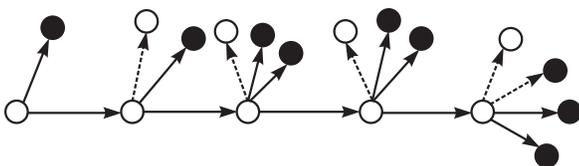


Рис. 2 Хвост AC -алгоритма

вырастает новая. Хвост укорачивается, когда его конец лысеет. Промежуточная кисточка оказывается на конце хвоста, она снова может обрастать новыми волосами. Пример хвоста приведен на рис. 2. Размер контекста оценивается как $O(h + w)$ в тех же обозначениях.

Сказанное выше для $2C$ -алгоритма о делении на три части, передаче контекста координатора исполнителям и восстановлении верно и здесь.

4.3 $1^{1/2}A^{1/2}C$ -алгоритм

Еще более сложно устроен контекст-хвост координатора, но это по-прежнему хвост. Растущая кисточка (она всегда одна) может быть не только на конце хвоста, но и на расстоянии 1 от конца (но действительно растущая кисточка всегда одна). Хвост обрастает не по всей длине и не на конце, а на некотором отдалении от конца. На конце кисточка; когда конец хвоста лысеет, он может отвалиться. Пример хвоста приведен на рис. 3. Размер контекста по-прежнему $O(h + w)$.

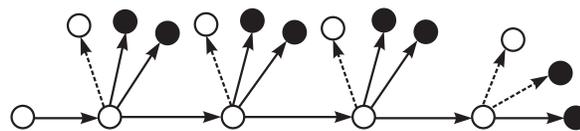


Рис. 3 Хвост $1^{1/2}A^{1/2}C$ -алгоритма

4.4 Общие свойства хвостатых алгоритмов

Рассмотрение кончается на $1^{1/2}A^{1/2}C$ -алгоритме, который, конечно, выбран только для примера, он достаточно искусственный. Его недостатки понятны. Он плохо себя ведет, если, например, дерево работ устроено так. В корне много управляющих работ, каждая из которых состоит из небольшого числа (по сравнению с числом исполнителей) простых работ. При переходе от одной управляющей работы к другой (вверх, вниз) $1^{1/2}A^{1/2}C$ -алгоритм ждет завершения простых работ первой управляющей работы.

Для хвостатых алгоритмов характерно следующее:

- хвост не может ветвиться (иначе какой же это хвост?);
- просты контексты, размер контекста оценивается как $O(h + w)$;
- проста передача контекста координатора исполнителям;

- прозрачно восстановление;
- справедливо сказанное о делении на три части.

Можно ли в хвостологии продвинуться дальше, т. е. придумать такой хвостатый алгоритм, какой-нибудь $3^7/8A^1/8C$, который был бы удовлетворителен по распараллеливанию, но, оставаясь хвостатым, сохранил бы простоту контекста, его оценку и прозрачность восстановления?

5 Линия фронта и очаги сопротивления

Попытаемся более детально разобраться с контекстом координатора для 2A-алгоритма. Здесь уже примитивная хвостология не помогает, нужно привлекать военные аналогии.

Деятельность координатора напоминает наступление по всему фронту на территорию противника. Есть линия фронта (κ -путь), справа от которой лежит территория противника; слева от нее — завоеванная территория. Координатор бежит по линии фронта, иногда он перебрасывает простые работы справа налево (когда они завершаются), иногда перемещает линию фронта. Эта его деятельность похожа на ту, которой он занимался в AC- или $1^1/2A^1/2C$ -алгоритме. Линия фронта выглядит как хвост. Однако иногда координатор перемещает линию фронта так, что в тылу остается целое поддерево, если оно уже просмотрено и в нем есть только незавершенные простые работы. Такие работы — это очаги сопротивления в тылу, они окружены, не получают подкреплений (в виде новых простых работ, все просмотрено) и обречены на капитуляцию. Но пока за ними нужно следить, чтобы не упустить момент капитуляции, после которой об очаге можно забыть. Если сама линия фронта активно живет как хвост, то присоединенные к ней поддеревья — очаги сопротивления — постепенно засыхают, т. е. капитулируют и исчезают. Вся эта картина (хвост, на котором висят засыхающие сучья) представляет собой контекст координатора для 2A-алгоритма.

Структура контекста детализировалась, но от этого не стало легче. По-прежнему непонятно, как координатор может пересылать свой контекст исполнителю, как вычислить разность между контекстами. Можно ли продвинуться по этому пути, упрощая контекст за счет меньшего параллелизма, или этот путь безнадежен? Ощущение двойственное. С одной стороны, представляется, что следует не учитывать множественные отказы и при них идти на большие повторения. Но, с другой стороны, остается опасение — тот ли путь выбран.

6 Запланированное отступление

Линия отступления — κ -путь в дереве работ, по левую сторону от которого все работы выполнены, а по правую находятся в неопределенном состоянии. Возможно, работа справа выполнена, возможно, выполняется, но также возможно, что ее выполнение не начато. В частности, все очаги сопротивления должны оказаться по правую сторону от линии отступления. Линия отступления — голый хвост. κ -путь, который ограничивает левую часть, рассмотренную в разд. 4, это тоже линия отступления. Работы, расположенные в левой части, не повторяются.

Рассмотрим теперь 2A-алгоритм, при котором координатор передает линию отступления исполнителю, поручая ему работу. Каждый исполнитель имеет свою версию этой линии, т. е. синхронность линий не поддерживается. Но, поскольку имеется ровно один координатор, версии линий отступления, которыми располагают исполнители, линейно упорядочены по времени. Переберем случаи отказов, которые могут произойти.

1. Одиночный отказ исполнителя. Поскольку координатор не пострадал, он, безусловно, знает, какой простой работой занимался пострадавший исполнитель. Поэтому нужно повторить заново эту работу.
2. Одиночный отказ координатора. Так как все исполнители живы, один из них (например, имеющий самую свежую версию линии отступления) берет на себя функции координатора. Он опрашивает всех остальных исполнителей, какие работы они выполняли. Далее, располагая свежей версией линии отступления и зная, какими работами занимаются исполнители, он конструирует точную копию контекста координатора в тот момент, когда произошел отказ. Никакие работы не повторяются.
3. Множественный отказ исполнителей, координатор не пострадал. Аналогично случаю 1.
4. Множественный отказ, при котором пострадал координатор. Исполнители выбирают самую свежую (из уцелевших) версию линии отступления. Выбирается новый координатор — это тот исполнитель, который владеет самой свежей версией. В качестве контекста он использует свою линию отступления. При этом все работы, которые находятся справа от этой линии, повторяются. Объем повторяемых работ зависит от того, насколько свежая версия линии отступления сохранилась, ограничить этот

объем не удается. Непонятно, как просто учесть текущие работы, которые выполняют исполнители: их приходится останавливать. Остается неясным, как выбирается точка активности координатора. Ведь линия отступления — это голый хвост, не за что уцепиться.

Таким образом, достигнута простота контекстов ценой увеличения повторений работ при множественных отказах. Не исключено, что это вполне работоспособный алгоритм, поскольку увеличение числа повторов проявляется в редкостных ситуациях.

7 Заключение

В статье рассмотрены только ФК-алгоритмы. Это сделано для того, чтобы упростить описанные алгоритмы. Однако нужно было бы рассмотреть более общие алгоритмы. Отчасти это сделано в [9]. Здесь есть два пути:

- (1) сделать координатор подвижным, не отказываясь от его единственности. Координатор может передать свои полномочия другому узлу (или процессу);
- (2) отказаться от единственности координатора. Естественным кажется равноправие всех процессов.

На первом пути достаточно ясны алгоритмы. Некоторые решения, которые были рассмотрены выше, можно прямо использовать. Второй путь не таков. Очень заманчиво сделать все процессы равноправными, это не только более красиво, но и более отказоустойчиво. Но как этого достигнуть? Подобного сорта алгоритмы — это неизведанное поле для исследований.

Литература

1. *Dean J., Ghemawat S.* MapReduce: Simplified Data Processing on large clusters // Communications of the

- ACM — 50th Anniversary issue: 1958–2008, 2008. Vol. 51. No. 1. P. 107–114.
2. *Lämmel R.* Google's MapReduce programming model — revisited // Sci. Computer Programming, 2008. No. 70. P. 1–30.
 3. *Lam C.* Hadoop in action. — Manning Publications, 2010. 325 p.
 4. Apache Hadoop: <http://hadoop.apache.org>.
 5. *Черняк Л.* MapReduce — будущее баз данных // Открытые системы. СУБД, 2009. № 2. С. 24–29.
 6. *Lamport L., Shostak R., Pease M.* The Byzantine generals problem // ACM Transactions on Programming Languages and Systems, 1982. Vol. 4. No. 3. P. 382–401.
 7. *Дьячков В. А., Захаров В. Н., Козмидиади В. А., Кузьмин А. В., Попов А. С., Шулятников Д. С.* Сервисные приложения для работы с иерархическими данными в распределенной файловой системе // Системы и средства информатики. Вып. 18. — М.: Наука, 2008. С. 20–35.
 8. *Knuth D. E.* The art of computer programming. Vol. 1. 3rd ed. — Boston: Addison-Wesley, 1997. 650 p.
 9. *Дьячков В. А., Захаров В. Н., Козмидиади В. А., Кузьмин А. В., Шулятников Д. С.* Алгоритмы параллельного выполнения заданий сервисных приложений в распределенной среде // Системы и средства информатики. Вып. 18. — М.: Наука, 2008. С. 49–70.
 10. *Kurant M., Markopoulou A., Thiran P.* On the bias of BFS (Breadth First Search) // International Teletraffic Congress (ITC 22). Amsterdam, 2010. P. 1–8.
 11. *Захаров В. Н., Козмидиади В. А., Кузьмин А. В.* Описание недетерминированного поведения и проблема отказоустойчивости приложений // Системы и средства информатики. Вып. 15. — М.: Наука, 2005. С. 338–358.
 12. *Захаров В. Н., Козмидиади В. А.* Средства обеспечения отказоустойчивости приложений // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. № 1. С. 14–26.
 13. *Arts T., Claessen K., Svensson H.* Semi-formal development of a fault-tolerant leader election protocol in Erlang // Formal Methods and Software Engineering: 4th Conference (International) on Formal Engineering Methods. — Berlin/Heidelberg: Springer, 2005. P. 140–154.

THEORY OF COMPLEX STOCHASTIC SYSTEMS

V. S. Pugachev and I. N. Sinitsyn¹

¹IPI RAN, sinitsin@dol.ru

Applied theory of probabilistic distributions in the infinite-dimensional differential stochastic systems based on equations for characteristic functionals is given. Structural theory of forming filters is considered. Conditional probability measures for typical connections of stochastic systems are presented. Six illustrative examples are given. The article is the widening of the report at the seminar dedicated to the 85th anniversary of Academician V. S. Pugachev (IPI RAS, Moscow, 1996).

Keywords: differential stochastic system; multivariate characteristic functional; typical connections of complex stochastic systems

INFORMATIONAL MODELS FOR THE EARTH IRREGULAR ROTATION

Yu. G. Markov¹, V. V. Perepelkin¹, I. N. Sinitsyn², and N. N. Semendyaev³

¹MAI, vadimkin1@yandex.ru

²IPI RAN, sinitsin@dol.ru

³IPI RAN, nsemendyaev@ipiran.ru

On-line and off-line stochastic informational models of the Earth irregular rotation are considered. Special attention is paid to the models for time intervals from 1–2 to 10–30 days.

Keywords: astrometric measurement; software tools; informational model; irregular rotation of the Earth; IERS; Kalman and Pugachev filters; MATLAB

STOCHASTIC INFORMATIONAL TECHNOLOGIES BASED ON PUGACHEV FILTERING

E. R. Korepanov

IPI RAN, EKorepanov@ipiran.ru

The survey of modern state of the art and new theoretical and practical results in Pugachev filtering and data processing in nonlinear stochastic systems are presented. Software tool “StS-Filter” in MATLAB is considered.

Keywords: stochastic informational technology; filtering; stochastic systems; Kalman and Pugachev filters; software tools; MATLAB

THEORY OF COMPLEX SYSTEMS AND CYBERNETIC PICTURE OF THE WORLD

M. B. Ignatyev

International Institute of Cybernetics and Artonics in St.-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, kira@robotek.ru

Any complex system interacts with changing environment and its availability depends on its adaptability. The number of arbitrary coefficients in the structure of equivalent equations of complex system changes in the process of learning. In systems with more than six variables, the number of arbitrary coefficients at first increases, and then, passing through the maximum, begins to decrease. This phenomenon makes it possible to explain the processes of system growth, complication, and death in biological, economical, and physical-engineering systems. The linguo-combinatorial method of complex systems investigation is used, key words being taken for building equivalent equations.

Keywords: adaptation; combinatorial simulation; uncertainty; appearance; essence; general systems theory; physics; astronomy; social economics

SYNTHESIS OF OPTIMAL NONLINEAR STOCHASTIC CONTROL SYSTEMS BY THE SPECTRAL METHOD

A. V. Panteleev¹ and K. A. Rybakov²

¹Moscow Aviation Institute, Mathematical Cybernetics Department, avpanteleev@inbox.ru

²Moscow Aviation Institute, Mathematical Cybernetics Department, rkoffice@mail.ru

A new method based on the spectral form of mathematical description for finding the optimal control with incomplete information about state for nonlinear stochastic systems is considered. The paper contains expressions for determining the optimal control using the spectral form of mathematical description. An algorithm for synthesizing the optimal control with incomplete information is developed; its efficiency is demonstrated by solving a model problem of synthesizing the optimal control for two-dimensional stochastic system under various information conditions.

Keywords: optimal control; synthesis with incomplete information; spectral method; spectral transform; spectral form of mathematical description; stochastic system; Bellman equation; Fokker–Planck–Kolmogorov equation

PROBLEM OF COMPENSATION OF RAYLEIGH FADING IN RADIO CHANNELS OF VOICE MOBILE COMMUNICATION SYSTEMS

N. B. Preobrajenskiy¹ and Ya. R. Fayzulkhakov²

¹Lebedev Institute of Precision Mechanics and Computer Engineering; Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Radio Engineering and Cybernetics, nbp@ipmce.ru

²Lebedev Institute of Precision Mechanics and Computer Engineering; Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Radio Engineering and Cybernetics, yakovr@yandex.ru

This paper focuses on the problem of a stochastic multipath model of a radio channel. The authors suggested a method of time complexification of voice signal with subfrequency tone synchronization for voice signals transition by the Rayleigh's radio channels that can allow to increase voice signal legibility at the expense of Rayleigh fading compensation. Acceptability of the new method has been confirmed by the model experiments.

Keywords: Rayleigh fading; multipath model; fading compensation; voice signal legibility; radio communication; radio channel

WORK TREE AND MASSIVELY PARALLEL PROCESSING

V. Kozmidiady

IPI RAN, v.kozmidiady@gmail.com

A mechanism is considered, summarizing MapReduce. A special attention is paid to the methods of distribution of works for concurrent execution. It is assumed that simple works form a tree and there is a coordinator who is responsible for the division of complex works. Workers execute simple works only. It appears that on the order of tree of traversal works substantially depends complexity of renewals after the refuse of site. Main attention is paid to the methods of tree traversal operation.

Keywords: MapReduce; Massive parallel processing; tree of traversals; work tree; fault-tolerant

Об авторах

Игнатъев Михаил Борисович (р. 1932) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ, лауреат Государственной премии СССР и премии Президента России, вице-президент Академии информатизации образования, директор Международного института кибернетики и артоники при Санкт-Петербургском государственном университете аэрокосмического приборостроения

Козмидиادي Владимир Александрович (р. 1936) — доктор технических наук, главный научный сотрудник ИПИ РАН

Корепанов Эдуард Рудольфович (р. 1966) — кандидат технических наук, заведующий сектором ИПИ РАН

Марков Юрий Георгиевич (р. 1945) — доктор физико-математических наук, профессор Московского авиационного института (государственного технического университета)

Пантелеев Андрей Владимирович (р. 1955) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета)

Перепелкин Вадим Владимирович (р. 1981) — кандидат физико-математических наук, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета)

Преображенский Николай Борисович (р. 1952) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник ИТМиВТ им. С. А. Лебедева РАН; доцент факультета радиотехники и кибернетики МФТИ

Пугачёв Владимир Семёнович (1911–1998) — академик (действительный член) АН СССР и Российской академии наук, известный советский и российский ученый

Рыбаков Константин Александрович (р. 1979) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета)

Семендяев Николай Николаевич (р. 1983) — программист ИПИ РАН

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заведующий отделом ИПИ РАН

Файзулхаков Яков Рафаилович (р. 1982) — кандидат технических наук, научный сотрудник ИТМиВТ им. С. А. Лебедева РАН; преподаватель факультета радиотехники и кибернетики МФТИ

About Authors

Fayzulkhakov Iakov R. (b. 1982) — Candidate of Science (PhD) in technology, scientist, Lebedev Institute of Precision Mechanics and Computer Engineering; lecturer, Department of Radio Engineering and Cybernetics, Moscow Institute of Physics and Technology

Ignatyev Mikhail B. (b. 1932) — Doctor of Science in technology, professor, laureate of the USSR State Prize and the Russian Presidential Prize, Vice-President of Informational Education Academy, Director of the International Institute of Cybernetics and Artonics in St.-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

Korepanov Eduard R. (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in technology, Head of Laboratory, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Kozmidiady Vladimir A. (b. 1936) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Markov Yuri G. (b. 1945) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Moscow Aviation Institute

Panteleev Andrei V. (b. 1955) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor; Head of the

Department of Mathematics and Cybernetics, Moscow Aviation Institute

Perepelkin Vadim V. (b. 1981) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Moscow Aviation Institute

Preobrajenskiy Nikolay B. (b. 1952) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Lebedev Institute of Precision Mechanics and Computer Engineering; associate professor, Department of Radio Engineering and Cybernetics, Moscow Institute of Physics and Technology

Pugachev Vladimir S. (1911–1998) — Academician of the USSR Academy of Sciences and the Russian Academy of Sciences, well-known Soviet and Russian scientist

Rybakov Konstantin A. (b. 1979) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Mathematics and Cybernetics, Moscow Aviation Institute

Semendyaev Nikolay N. (b. 1983) — programmer, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, honored scientist of RF, Head of Department, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences



25 лет

Институту проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук

Институт проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук (ИППМ РАН) создан Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР, посвященным образованию крупного межведомственного «Центра информатики и электроники», № 613/180 от 22 мая 1986 г. и Постановлением Президиума РАН № 1174 от 01 октября 1986 г. Первым директором института был член-корреспондент АН СССР Б. В. Баталов (1938–1989). В настоящее время институт возглавляет академик РАН Стемповский Александр Леонидович, доктор технических наук, профессор, академик РАН, лауреат Государственной премии РФ в области науки и техники, кавалер орденов Почета и Дружбы, автор 138 научных работ, один из ведущих ученых России в области систем автоматизированного проектирования микро- и нанoeлектронной аппаратуры и методов оптимального проектирования цифровых сверхбольших интегральных схем.

ИППМ РАН входит в состав Отделения нанотехнологий и информационных технологий (ОНИТ) РАН. Институт расположен в центре российской микроэлектроники — городе Зеленограде.

В институте работают 47 научных сотрудников, в том числе: 1 академик РАН; 1 член-корреспондент РАН; 8 докторов наук; 17 кандидатов наук; 20 дипломированных инженеров и магистров.

Институт ведет фундаментальные научные исследования по следующим основным направлениям:

- системы автоматизации проектирования в микро- и нанoeлектронике;
- методология проектирования интегральных схем и систем высокой сложности;
- высокопроизводительные вычислительные системы.

За последние десять лет было выполнено 99 НИОКР, опубликовано более 420 статей и докладов на российских и международных конференциях, защищены две докторские и девять кандидатских диссертаций, получено восемь патентов.

Прикладные работы института, в основном, являются продолжением фундаментальных и связаны с внедрением их результатов в промышленность. Это проектирование интегральных схем и устройств микро- и нанoeлектроники (*сложно-функциональных блоков для систем на кристалле; цифровых, цифро-аналоговых и аналого-цифровых СБИС; интегральных сенсоров для различных применений*); разработка микросистем (*навигационных систем высокой точности; интеллектуальных фотоприемных микроэлектронных устройств*); создание прецизионных систем наноразмеров.

Институт активно участвует в выполнении ряда федеральных целевых программ, программ исследований государственных академий наук, Президиума РАН и Отделений РАН, программ РФФИ и т. д.

Важным направлением деятельности института является развитие как российского, так и международного научного сотрудничества. Совместно с Комиссией Европейских Сообществ, Комитетом при Президенте РФ по политике информатизации, Международной ассоциацией по обработке информации (IFIP, International Federation for Information Processing), Ассоциацией по вычислительной технике (ACM, Association for Computing Machinery), ОАО Телеком, а также рядом крупнейших европейских университетов ИППМ РАН, начиная с 1991 г., организовал и провел серию Международных семинаров по автоматизации проектирования (RUSSIAN WORKSHOP); Пан-европейский форум, посвященный сотрудничеству европейских ученых в области науки, техники и образования; Международный семинар по многоуровневому проектированию низкомощностных схем; серию Международных конференций по проблемам твердотельной фотоники, оптоэлектроники и методологии проектирования фотоприемных



Директор ИППМ РАН академик А. Л. Стемповский



ИППМ РАН

устройств. В 2005–2010 гг. Институтом организованы и успешно проведены четыре Всероссийских научно-технических конференции «Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем» (серия МЭС).

ИППМ РАН представляет Российскую академию наук в качестве учредителя крупнейшей в Европе ежегодной Международной конференции и выставки по автоматизации проектирования и опыту разработки микроэлектронных устройств и систем (“Design, Automation and Test in Europe”), которая, начиная с 1992 г., проводится в крупнейших промышленных Европейских центрах. Вместе с Институтом организаторами конференции являются ACM SIGDA, EDA Consortium, European Design and Automation Association, ECSI, IEEE Council on EDA (CEDA).

В рамках двусторонних договоров о сотрудничестве в ИППМ РАН выполнялись совместные проекты с рядом ведущих компаний и университетов США и Европы: University of California at Berkeley (UC Berkeley); Carnegie Mellon University (CMU); Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG); Universite Catholique de Louvain (UCL); Czech Technical University in Prague (CTU); ЗАО «ИНТЕЛ А/О» (отделение компании Intel Corp. в России).

В Институте ведется планомерная работа по подготовке научных кадров высшей квалификации через собственную аспирантуру по специальностям 05.13.05 — «*Элементы и устройства вычислительной техники и систем управления*», технические науки и 05.13.12 — «*Системы автоматизации проектирования*», технические науки (электроника и вычислительная техника). В ИППМ РАН действует диссертационный совет Д 002.078.01 по защите докторских и кандидатских диссертаций по тем же специальностям. Инженерные кадры готовят в учебных центрах МГИЭТ(ТУ) и МГИЭМ(ТУ), созданных при ИППМ РАН. С 2008 г. при Институте работают совместная с Южным федеральным университетом лаборатория и Научно-образовательный центр — «Разработка микро- и наноэлектронных систем».

ИППМ РАН рад продолжить сотрудничество со своими партнерами, а также всегда открыт для взаимодействия с другими научно-исследовательскими организациями.

Москва 124681, ул. Советская, д. 3.
Тел./факс: +7(499)729-9208. Тел.: +7(499)729-9890.
e-mail: ippm@ippm.ru
<http://www.ippm.ru>

Правила подготовки рукописей статей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений. Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи, в виде исключения, могут печататься на английском языке. Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях. Публикация не должна нарушать закон об авторских правах. Направляя свою рукопись в редакцию, авторы автоматически передают учредителям и редколлегии неисключительные права на издание данной статьи на русском языке и на ее распространение в России и за рубежом. При этом за авторами сохраняются все права как собственников данной рукописи. В связи с этим авторами должно быть представлено в редакцию письмо в следующей форме: Соглашение о передаче права на публикацию:

«Мы, нижеподписавшиеся, авторы рукописи « _____ », передаем учредителям и редколлегии журнала «Информатика и её применения» неисключительное право опубликовать данную рукопись статьи на русском языке как в печатной, так и в электронной версиях журнала. Мы подтверждаем, что данная публикация не нарушает авторского права других лиц или организаций. Подписи авторов: (ф. и. о., дата, адрес)».

Указанное соглашение может быть представлено как в бумажном виде, так и в виде отсканированной копии (с подписями авторов).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности опубликования представленной статьи в открытой печати.

2. Статья подписывается всеми авторами. На отдельном листе представляются данные автора (или всех авторов): фамилия, полное имя и отчество, телефон, факс, e-mail, почтовый адрес. Если работа выполнена несколькими авторами, указывается фамилия одного из них, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет самостоятельную экспертизу присланных статей. Возвращение рукописи на доработку не означает, что статья уже принята к печати. Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.
4. Решение редакционной коллегии о принятии статьи к печати или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия не обязуется направлять рецензию авторам отклоненной статьи.
5. Корректурa статей высылается авторам для просмотра. Редакция просит авторов присылать свои замечания в кратчайшие сроки.
6. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки. Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3. Основной текст: стиль — «Обычный»; шрифт Times New Roman, размер 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине. Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 25 страниц указанного формата. Ознакомиться с шаблонами, содержащими примеры оформления, можно по адресу в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.
7. К рукописи, предоставляемой в 2-х экземплярах, обязательно прилагается электронная версия статьи (как правило, в форматах MS WORD (.doc) или ЛАТЭХ (.tex), а также — дополнительно — в формате .pdf) на дискете, лазерном диске или по электронной почте. Сокращения слов, кроме стандартных, не применяются. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы.

8. Статья должна содержать следующую информацию на русском и английском языках: название, Ф.И.О. авторов, места работы авторов и их электронные адреса, подробные сведения об авторах, оформленные в соответствии с форматом, определяемым файлами http://www.ipiran.ru/journal/issues/2011_05_01/authors.asp и http://www.ipiran.ru/journal/issues/2011_01_eng/authors.asp, аннотация (не более 100 слов), ключевые слова. Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в порядке их первого упоминания. В списке литературы не должно быть позиций, на которые нет ссылки в тексте статьи. Все фамилии авторов, заглавия статей, названия книг, конференций и т. п. даются на языке оригинала, если этот язык использует кириллический или латинский алфавит.
9. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.
10. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:
- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
 - использовать attach (присоединение);
 - в случае больших объемов информации возможно использование общеизвестных архиваторов (ZIP, RAR);
 - в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.
11. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию с авторов не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции: Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ИПИ РАН
Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05 E-mail: rust@ipiran.ru

Технический редактор Л. Кокушкина
Выпускающий редактор Т. Торжкова
Художественный редактор М. Седакова
Сдано в набор 15.05.11. Подписано в печать 31.05.11. Формат 60 x 84 / 8
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл.-печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 200 экз.

Заказ №

Издательство «ТОРУС ПРЕСС», Москва 119991, ул. Косыгина, д. 4
torus@torus-press.ru; <http://www.torus-press.ru>

Отпечатано в ППП «Типография «Наука» с готовых файлов
Москва 121099, Шубинский пер., д. 6