

# Информатика и её применения

Том 5 Выпуск 3 Год 2011

Тематический выпуск

Вероятностно-статистические методы  
и задачи информатики и информационных технологий

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	
<b>И. А. Соколов, В. Ю. Королев</b>	<b>2</b>
Асимптотически оптимальный критерий проверки гипотез о числе компонент смеси вероятностных распределений	
<b>В. Е. Бенинг, А. К. Горшенин, В. Ю. Королев</b>	<b>4</b>
Реконструкция распределений случайных функций в задачах однофотонной эмиссионной томографии при помощи аппроксимации экспоненциального множителя тригонометрическими многочленами	
<b>В. Г. Ушаков, О. В. Шестаков</b>	<b>17</b>
Диверсификация и ее связь с мерами риска	
<b>Д. О. Яковенко, М. А. Целищев</b>	<b>21</b>
Оценки устойчивости для некоторых систем обслуживания с катастрофами	
<b>А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, Т. Л. Панфилова, С. Я. Шоргин</b>	<b>27</b>
Об одной статистической задаче для случайных графов Интернет-типа	
<b>М. М. Лери, И. А. Чеплюкова</b>	<b>34</b>
Система массового обслуживания с отрицательными заявками, бункером для вытесненных заявок и различными интенсивностями обслуживания	
<b>Р. В. Разумчик</b>	<b>41</b>
Приближенные методы решения задачи диагностики плоским зондом сильноионизованной плазмы с учетом Кулоновских столкновений	
<b>И. А. Кудрявцева, А. В. Пантелеев</b>	<b>46</b>
Использование метрик при сравнительном исследовании качества работы алгоритмов сегментации изображений	
<b>П. П. Кольцов</b>	<b>53</b>
О неравенствах типа Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм	
<b>В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова, С. Я. Шоргин</b>	<b>64</b>
Об одной ядерной оценке плотности	
<b>В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков</b>	<b>67</b>
О скорости сходимости распределения выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону	
<b>О. В. Шестаков</b>	<b>74</b>
Усиленные законы больших чисел для числа безошибочных блоков при помехоустойчивом кодировании	
<b>А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш</b>	<b>80</b>
К 60-летию члена редколлегии журнала «Информатика и её применения», заместителя директора ИПИ РАН по научной работе, доктора технических наук А. А. Зацаринного	
<b>И. А. Соколов, С. Я. Шоргин</b>	<b>86</b>
Abstracts	<b>87</b>
Об авторах	<b>91</b>
About Authors	<b>92</b>

## Предисловие

Вниманию читателей журнала «Информатика и её применения» предлагается очередной тематический выпуск «Вероятностно-статистические методы и задачи информатики и информационных технологий». Предыдущие тематические выпуски журнала по данному направлению вышли в 2008 г. (т. 2, вып. 2), в 2009 г. (т. 3, вып. 3) и в 2010 г. (т. 4, вып. 2).

Статьи, собранные в данном журнале, посвящены разработке новых вероятностно-статистических методов, ориентированных на применение к решению конкретных задач информатики и информационных технологий, а также — в ряде случаев — и других прикладных задач. Проблематика, охватываемая публикуемыми работами, развивается в рамках научного сотрудничества между Институтом проблем информатики Российской академии наук (ИПИ РАН) и Факультетом вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в ходе работ над совместными научными проектами (в том числе в рамках функционирования Научно-образовательного центра «Вероятностно-статистические методы анализа рисков»). Многие из авторов статей, включенных в данный номер журнала, являются активными участниками традиционного международного семинара по проблемам устойчивости стохастических моделей, руководимого В. М. Золотаревым и В. Ю. Королевым; регулярные сессии этого семинара проводятся под эгидой МГУ и ИПИ РАН (в 2011 г. указанный семинар проводится в октябре в Калининградской области РФ).

Наряду с представителями ИПИ РАН и МГУ в число авторов данного выпуска журнала входят ученые из Научно-исследовательского института системных исследований РАН, Института проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов РАН, Института прикладных математических исследований Карельского НЦ РАН, Московского авиационного института, Вологодского государственного педагогического университета, НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, Казанского государственного университета, Дебреценского университета (Венгрия).

Несколько статей выпуска посвящено разработке и применению стохастических методов и информационных технологий для решения различных прикладных задач. В работе В. Г. Ушакова и О. В. Шестакова рассмотрена задача определения вероятностных характеристик случайных функций по распределениям интегральных преобразований, возникающих в задачах эмиссионной томографии. В статье Д. О. Яковенко и М. А. Целищева рассмотрены некоторые вопросы математической теории риска и предложен новый подход к диверсификации инвестиционных портфелей. Работа И. А. Кудрявцевой и А. В. Пантелеева посвящена построению и исследованию математической модели, описывающей динамику сильноионизованной плазмы. В статье П. П. Кольцова изучается качество работы ряда алгоритмов сегментации изображений. Статья А. Н. Чупрунова и И. Фазекаша посвящена вероятностному анализу числа безошибочных блоков при помехоустойчивом кодировании; получены усиленные законы больших чисел для указанных величин.

В данном выпуске традиционно присутствует тематика, весьма активно разрабатываемая в течение многих лет специалистами ИПИ РАН и МГУ, — методы моделирования и управления для информационно-телекоммуникационных и вычислительных систем, в частности методы теории массового обслуживания. В статье А. И. Зейфмана с соавторами рассматриваются модели обслуживания, описываемые марковскими цепями с непрерывным временем в случае наличия катастроф. В работе М. М. Лери и И. А. Чеплюковой рассматриваются случайные графы Интернет-типа, т. е. графы, степени вершин которых имеют степенные распределения; такие задачи находят применение при исследовании глобальных сетей передачи данных. Работа Р. В. Разумчика посвящена исследованию систем массового обслуживания специального вида — с отрицательными заявками и хранением вытесненных заявок.

Ряд статей посвящен развитию перспективных теоретических вероятностно-статистических методов, которые находят широкое применение в различных задачах информатики и информационных технологий. В работе В. Е. Бенинга, А. К. Горшенина и В. Ю. Королева рассмотрена задача статистической проверки гипотез о числе компонент смеси вероятностных распределений, приводится конструкция асимптотически наиболее мощного критерия. Результаты этой работы найдут применение в ряде прикладных задач, использующих математическую модель смеси вероятностных распределений (в информатике, моделировании финансовых рынков, физике турбулентной плазмы и т. д.). В статье В. Ю. Королева, И. Г. Шевцовой

и С. Я. Шоргина строится новая, улучшенная оценка точности нормальной аппроксимации для пуассоновских случайных сумм; как известно, указанные случайные суммы широко используются в качестве моделей многих реальных объектов, в том числе в информатике, физике и других прикладных областях. Работа В. Г. Ушакова и Н. Г. Ушакова посвящена исследованию ядерной оценки плотности распределения; эти результаты могут применяться, в частности, при анализе трафика в телекоммуникационных системах. Серьезные приложения в статистике могут получить результаты работы О. В. Шестакова, в которой доказаны оценки скорости сходимости распределения выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону.

Редакционная коллегия журнала выражает надежду, что данный тематический выпуск будет интересен специалистам в области теории вероятностей и математической статистики и их применения к решению задач информатики и информационных технологий.

Заместитель главного редактора журнала «Информатика и её применения»,  
директор ИПИ РАН, академик

*И. А. Соколов*

Редактор-составитель тематического выпуска,  
профессор кафедры математической статистики факультета  
вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова,  
ведущий научный сотрудник ИПИ РАН,  
доктор физико-математических наук

*В. Ю. Королев*

# АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ СМЕСИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ\*

В. Е. Бенинг<sup>1</sup>, А. К. Горшенин<sup>2</sup>, В. Ю. Королев<sup>3</sup>

**Аннотация:** Рассмотрена задача статистической проверки гипотез о числе компонент смеси вероятностных распределений. Приведен асимптотически наиболее мощный критерий. При выполнении достаточно слабых условий найдены предельные распределения, потеря мощности и асимптотический дефект. Подробно рассмотрено применение данного критерия к проверке гипотез о числе компонент смесей равномерных, нормальных и гамма-распределений.

**Ключевые слова:** смеси вероятностных распределений; асимптотически наиболее мощный критерий; потеря мощности; асимптотический дефект

## 1 Введение

В некоторых конкретных прикладных задачах, использующих математическую модель смеси вероятностных распределений, крайне важна корректная интерпретация полученных результатов (например, в физике турбулентной плазмы необходимо соотносить полученные компоненты смеси с наблюдаемыми в плазме процессами). Поэтому при выборе модели смеси важное значение имеет выбор не только типа смеси (сдвиговая, масштабная или сдвиг-масштабная) и ядер (смешиваемых распределений), но и числа компонент в подгоняемой к реальным данным модели. С увеличением числа параметров возрастает и согласие модели с данными. Однако известны примеры, когда использование моделей с большим числом параметров не только усложняет практические вычисления, но и приводит к неадекватной интерпретации (более подробно об этом см. [1, 2]).

Многие популярные алгоритмы (EM, SEM, MSEM-алгоритмы и их всевозможные модификации) для статистической декомпозиции смесей используют заданное число компонент и в процессе итерационной процедуры практически не могут менять это *заранее* заданное число. При этом в большинстве прикладных задач число компонент смеси

является неизвестным, и в лучшем случае возможно задать лишь некоторую оценку сверху большим значением, что, как было отмечено ранее, может приводить к неадекватным результатам. Известны так называемые информационные критерии Акаике [3] и байесовский [4], основанные на функции правдоподобия. Однако в ряде практически значимых моделей нарушаются условия регулярности, в частности в случае конечной смеси нормальных законов, вообще говоря, функция правдоподобия не является ограниченной, что приводит к необходимости использовать другие критерии, а также накладывать дополнительные искусственные технические условия для гарантии соблюдения формальных условий регулярности.

В частности, в работах [5, 6] для проверки гипотезы о том, что  $k_0$ -компонентная смесь нормальных распределений и  $k_1$ -компонентная смесь нормальных распределений одинаково близки к истинному распределению, т. е.

$$\mathbb{E}_h \{ \log f(x; \theta^*) \} = \mathbb{E}_h \{ \log g(x; \gamma^*) \},$$

против альтернативы, что одна из смесей приближает лучше, т. е.

$$\mathbb{E}_h \{ \log f(x; \theta^*) \} > \mathbb{E}_h \{ \log g(x; \gamma^*) \},$$

\*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 09-07-12032-офи-м, 11-07-00112а, 11-01-00515а и 11-01-12026-офи-м), а также Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, bening@yandex.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, a.k.gorshenin@gmail.com

<sup>3</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, vkorolev@cs.msu.su

предложено использовать статистику

$$LR = LR(\hat{\theta}, \hat{\gamma}; x) = \sum_{j=1}^n \log \frac{f(X_j; \hat{\theta})}{g(X_j; \hat{\gamma})}. \quad (1)$$

В качестве меры расстояния между данным и истинным распределением в указанных работах используется информационный критерий Кульбака–Лейблера (KLIC)

$$I(h : f; \theta) = \mathbb{E}_h \left\{ \log \frac{h(X; \vartheta)}{f(X; \theta)} \right\} = \int \log h(x; \vartheta) dH(x; \vartheta) - \int \log f(x; \theta) dH(x; \vartheta).$$

Здесь  $h(\cdot)$  — истинная плотность,  $f(\cdot)$  —  $k_1$ -компонентная смесь нормальных распределений,  $g(\cdot)$  —  $k_0$ -компонентная смесь нормальных распределений, а символ  $\mathbb{E}_h$  обозначает математическое ожидание относительно  $h(\cdot)$ ;  $\theta^*$  и  $\gamma^*$  минимизируют  $I(h : f; \theta)$  и  $I(h : g; \gamma)$  соответственно, а величины  $\hat{\theta}$  и  $\hat{\gamma}$  являются оценками максимального правдоподобия для  $\theta^*$  и  $\gamma^*$  соответственно.

При этом для смесей нормальных законов в предположении справедливости некоторых условий регулярности (а также дополнительных предположений, позволяющих избегать неограниченности функции правдоподобия) в работах [5, 6] отмечено, что статистика (1) в случае справедливости нулевой гипотезы имеет асимптотическое распределение, являющееся взвешенной суммой  $\chi^2$ -распределений. Но данный критерий не является оптимальным хотя бы в каком-то смысле. Однако в работе [7] показано, что для произвольной смеси вероятностных распределений, удовлетворяющих условиям регулярности, в случае справедливости альтернативы значение статистики стремится к бесконечности, т.е. такой критерий является состоятельным.

В данной работе предлагается альтернативный асимптотически оптимальный критерий проверки гипотез о числе компонент смеси вероятностных распределений в смысле максимизации предельной мощности критерия (см., например, книгу [8]).

## 2 Постановка задачи

Предположим, что каждое из независимых наблюдений  $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$  имеет плотность, представимую в виде конечной  $K$ -компонентной смеси плотностей некоторых законов распределения  $\psi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , вида

$$\sum_{i=1}^K p_i \psi_i(x), \quad \sum_{i=1}^K p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, K.$$

Отметим, что всюду предполагается, что смесь идентифицируема (если для конкретных распределений для этого требуются дополнительные условия, они оговариваются отдельно). Пусть  $k$  — некоторое известное натуральное число. Требуется проверить гипотезу

$$H_0 : K = k$$

против альтернативы

$$H_1 : K = k + 1.$$

Другими словами, требуется проверить значимость  $(k + 1)$ -й компоненты (например, если веса  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, k + 1$ , упорядочены по убыванию). Такая задача довольно типична и возникает, когда нужно убедиться в значимости компоненты с малым весом или отбросить ее без значимой потери информативности модели. Подобные проблемы особенно существенны для так называемых сеточных методов разделения смесей (см., например, [1, 2]).

Для удобства асимптотического анализа предлагаемых критериев сведем описанную выше задачу проверки гипотез о значении *дискретного* параметра  $K$  к задаче проверки гипотез о значении *непрерывного* параметра. С этой целью для некоторого  $\theta \in [0, 1]$  будем считать, что  $X_1$  имеет плотность

$$p(x, \theta) = (1 - \theta)f(x) + \theta g(x), \quad (2)$$

где

$$f(x) = \sum_{i=1}^k p_i \psi_i; \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1; \quad g(x) = \psi_{k+1}.$$

Требуется проверить простую гипотезу

$$H_0 : \theta = 0$$

против последовательности сложных альтернатив вида (так как равномерно наиболее мощного критерия для проверки простой гипотезы против сложной, как правило, не существует)

$$H_{n,1} : \theta = \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad 0 < t \leq C, \quad C > 0,$$

где параметр  $t$  неизвестен. Фактически осуществляется проверка гипотезы о том, является ли рассматриваемая смесь  $k$ -компонентной (при справедливости нулевой гипотезы  $H_0$ ) или  $(k + 1)$ -компонентной (при справедливости альтернативы  $H_{n,1}$ ).

### 3 Асимптотически наиболее мощный критерий проверки гипотез о числе компонент смеси

Используем асимптотический подход, подробно описанный, например, в книге [8]. Согласно лемме Неймана–Пирсона, для любого фиксированного  $t \in (0, C]$  наилучший критерий проверки гипотезы  $H_0$  против простой альтернативы

$$H_{n,1} : \theta = \frac{t}{\sqrt{n}}$$

основан на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_n(t) = \sum_{i=1}^n \left( l(X_i, tn^{-1/2}) - l(X_i, 0) \right), \quad (3)$$

где

$$l(x, \theta) = \log p(x, \theta).$$

Мощность такого критерия уровня  $\alpha \in (0, 1)$  обозначим через  $\beta_n^*(t)$ . Хотя статистика  $\Lambda_n(t)$  не может быть использована для построения критерия проверки гипотезы  $H_0$  против альтернативы  $H_{n,1}$  из-за того, что  $t$  неизвестно, однако  $\beta_n^*(t)$  задает верхнюю границу для мощности любого критерия при проверке гипотезы  $H_0$  против фиксированной альтернативы  $H_{n,1}$ ,  $t > 0$ .

В дальнейшем понадобятся следующие функции:

$$l^{(j)}(x) = \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} l(x, \theta) \Big|_{\theta=0}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} l^{(1)}(x) &= \frac{g(x) - f(x)}{(1 - \theta)f(x) + \theta g(x)} \Big|_{\theta=0} = \frac{g(x)}{f(x)} - 1; \\ l^{(2)}(x) &= -\frac{(g(x) - f(x))^2}{((1 - \theta)f(x) + \theta g(x))^2} \Big|_{\theta=0} = \\ &= -\left( \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right)^2; \\ l^{(j)}(x) &= \\ &= (-1)^{j+1} (j - 1)! \frac{(g(x) - f(x))^j}{((1 - \theta)f(x) + \theta g(x))^j} \Big|_{\theta=0} = \\ &= (-1)^{j+1} (j - 1)! \left( \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right)^j, \quad j \geq 1. \end{aligned} \right\} (4)$$

Фишеровская информация имеет вид:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}_0 \left( l^{(1)}(X_1) \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right)^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x)}{f(x)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x)}{f(x)} dx - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

В дальнейшем будем пользоваться известными соотношениями:

$$\mathbb{E}_0 l^{(1)}(X_1) = 0, \quad \mathbb{E}_0 l^{(2)}(X_1) = -I. \quad (6)$$

Запишем разложение в ряд Тейлора логарифмической производной из выражения (3):

$$\begin{aligned} l(X_i, tn^{-1/2}) - l(X_i, 0) &= \frac{t}{\sqrt{n}} l^{(1)}(X_i) + \\ &+ \frac{t^2}{2n} l^{(2)}(X_i) + \dots \end{aligned}$$

Тогда

$$\Lambda_n(t) = tL_n^{(1)} - \frac{t^2 I}{2} + \frac{t^2}{2\sqrt{n}} L_n^{(2)} + o(n^{-3/2}), \quad (7)$$

где

$$L_n^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (l^{(j)}(X_i) - \mathbb{E}_0 l^{(j)}(X_i)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Для получения формулы (7) были использованы соотношения (6). Критерий, основанный на статистике  $\Lambda_n(t)$ , отвергает гипотезу  $H_0$  в пользу альтернативы  $H_{n,1}$ , если

$$\Lambda_n(t) > c_{n,t},$$

где критическое значение  $c_{n,t}$  выбирается из условия

$$\mathbb{P}_{n,0}(\Lambda_n(t) > c_{n,t}) = \alpha,$$

где символом  $\mathbb{P}_{n,\theta}$  обозначено распределение  $\mathbf{X}_n$  при  $\theta \geq 0$ .

Так как  $\Lambda_n(t)$  представляет собой сумму независимых одинаково распределенных случайных величин, то из центральной предельной теоремы (ЦПТ) при  $n \rightarrow \infty$  следует, что  $\Lambda_n(t)$  имеет асимптотически нормальное распределение вида

$$\mathfrak{L}(\Lambda_n(t) | H_0) \rightarrow N\left(-\frac{1}{2} t^2 I, t^2 I\right); \quad (8)$$

$$\mathfrak{L}(\Lambda_n(t) | H_{n,1}) \rightarrow N\left(\frac{1}{2} t^2 I, t^2 I\right). \quad (9)$$



Отсюда несложно получить предельное значение мощности (см., например, книгу [8]):

$$\beta_n^*(t) \rightarrow \beta^*(t) = \Phi(t\sqrt{I} - u_\alpha),$$

где  $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ , символ  $\Phi(\cdot)$  обозначает функцию распределения стандартного нормального закона.

В качестве критерия с предельной мощностью  $\beta^*(t)$  для различения гипотез о числе компонент рассмотрим критерий, основанный на статистике  $L_n^{(1)}$ , т. е.

$$L_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{g(X_i)}{f(X_i)} - 1 \right) \quad (10)$$

Рассмотрим достаточные условия, при которых логарифм отношения правдоподобия асимптотически нормален, т. е. выполнены условия (8) и (9) при  $n \rightarrow \infty$ ,  $0 < t \leq C$ . Это так называемое условие локальной асимптотической нормальности, точнее возможность представить логарифм отношения правдоподобия  $\Lambda_n(t)$  в виде

$$\Lambda_n(t) = tL_n^{(1)} - \frac{t^2 I}{2} + \xi_n(t), \quad (11)$$

где остаточный член  $\xi_n(t)$  стремится к нулю по вероятности при гипотезе  $H_0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Хорошо известен следующий результат (см., например, статью [9]). Предположим, что плотность  $p(x, \theta)$  удовлетворяет следующим условиям:

- (А) При каждом  $x \in \mathbb{R}$  плотность  $p(x, \theta)$  абсолютно непрерывна по  $\theta$  в некоторой окрестности точки  $\theta = 0$ .
- (В) При каждом  $\theta$  из этой окрестности производная  $\partial p(x, \theta) / \partial \theta$  существует при почти всех (по мере Лебега)  $x \in \mathbb{R}$ .
- (С) Функция

$$I(\theta) \equiv \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial \log p(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 < \infty$$

положительна и непрерывна в этой окрестности.

Тогда выполнено условие (11).

Проверим выполнение этих условий для плотности  $p(x, \theta)$  из равенства (2) и сформулируем результат в следующем виде.

**Лемма 1.** Пусть фишеровская информация  $I$  из соотношения (5) конечна. Тогда для плотности  $p(x, \theta)$  из равенства (2) выполнено соотношение (11).

Доказательство будет заключаться в последовательной проверке условий (А)–(С). Обозначим через  $\delta$  необходимую правую окрестность точки

$\theta = 0$ . Всюду в дальнейшем подразумевается выполнение условия  $0 \leq \theta < \delta$ .

(А) Очевидно, что линейная функция является абсолютно непрерывной, поскольку если

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta_1,$$

где  $(a_i, b_i)$  — произвольная система попарно непересекающихся интервалов, то для произвольной линейной функции вида  $y(x) = ax + b$ ,  $a$  и  $b$  — конечные фиксированные числа, получим

$$\sum_i |y(b_i) - y(a_i)| = |a| \sum_i (b_i - a_i) < |a| \delta_1 = \varepsilon$$

при соответствующем выборе  $\delta_1$ . Плотность  $p(x, \theta)$  представима в виде:  $\theta(g(x) - f(x)) + f(x)$ , т. е. при каждом фиксированном  $x \in \mathbb{R}$  является линейной функцией по  $\theta$ , а значит, является абсолютно непрерывной по  $\theta$  из правой  $\delta$ -окрестности нуля.

(В) Найдем производную

$$\frac{\partial p(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial((1 - \theta)f(x) + \theta g(x))}{\partial \theta} = g(x) - f(x).$$

Очевидно, что данная производная существует при почти всех (по мере Лебега)  $x \in \mathbb{R}$  для любого  $\theta$  из правой  $\delta$ -окрестности нуля.

(С) Запишем выражение для функции  $I(\theta)$  более подробно:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial \log p(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \\ &= \mathbb{E}_\theta \left( \frac{g(x) - f(x)}{(1 - \theta)f(x) + \theta g(x)} \right)^2. \end{aligned}$$

Функция  $g(x) - f(x) \neq 0$  почти наверное, а в силу известного свойства интеграла Лебега это означает, что функция  $I(\theta) > 0$  (в силу неотрицательности подынтегрального выражения условие  $I(\theta) \neq 0$  эквивалентно  $I(\theta) > 0$ ) почти наверное для любого  $\theta$  из правой  $\delta$ -окрестности нуля (включая и значение  $\theta = 0$ ).

Далее, используя тот факт, что  $0 \leq \theta < \delta$ , получаем оценку для подынтегральной функции

$$\begin{aligned} \frac{(g(x) - f(x))^2}{(1 - \theta)f(x) + \theta g(x)} &\leq \frac{(g(x) - f(x))^2}{(1 - \theta)f(x) + \theta g(x)} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1 - \delta)} \frac{(g(x) - f(x))^2}{f(x)}. \quad (12) \end{aligned}$$

Функция, стоящая в правой части (12), представляет собой подынтегральное выражение для интеграла в фишеровской информации  $I$  из соотношения (5), который конечен по предположению леммы.

Воспользовавшись теоремой Лебега о мажорируемой сходимости (см., например, книгу [10]), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \int \frac{(g(x) - f(x))^2}{(1 - \theta)f(x) + \theta g(x)} dx &= \\ &= \int \frac{(g(x) - f(x))^2}{(1 - \theta_0)f(x) + \theta_0 g(x)} dx. \end{aligned}$$

Данное соотношение означает непрерывность функции  $I(\theta)$  в правой  $\delta$ -окрестности нуля (включая и значение  $\theta = 0$ ).  $\square$

Лемма 1 означает, что критерий  $L_n^{(1)}$  из равенства (10) является асимптотически наиболее мощным. Согласно ЦПТ,  $L_n^{(1)}$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет нормальное распределение с параметрами 0 и  $I$  (при справедливости нулевой гипотезы). Тогда критическое значение  $c_n^{(1)}$  может быть найдено из соотношений:

$$\mathbb{P}_{n,0}(L_n^{(1)} > c_n^{(1)}) = \alpha; \quad c_n^{(1)} = \sqrt{I}u_\alpha + o(1).$$

Для отыскания точного распределения  $L_n^{(1)}$  выпишем его характеристическую функцию, пользуясь тем, что элементы выборки — независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\begin{aligned} \phi_{L_n^{(1)}}(z) &= \left( e^{-iz/\sqrt{n}} \phi_\xi \left( \frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \\ &= e^{-iz\sqrt{n}} \left( \phi_\xi \left( \frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right)^n, \quad z \in \mathbb{R}; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{g(X_1)}{f(X_1)}; \quad \phi_\xi \left( \frac{z}{\sqrt{n}} \right) = \mathbb{E}_\theta \exp \left\{ i \frac{z}{\sqrt{n}} \xi \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{iz}{\sqrt{n}} \frac{g(x)}{f(x)} \right\} ((1 - \theta)f(x) + \theta g(x)) dx. \end{aligned}$$

Аналогично, используя соотношения

$$\begin{aligned} L_n^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{g(X_i)}{f(X_i)} - \sqrt{n}; \\ \frac{g(X_i)}{f(X_i)} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

можно применить аппарат преобразования Лапласа и записать преобразование Лапласа случайной величины

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

в виде

$$\Phi_{\eta_n}(s) = \left( \Phi_\xi \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \right)^n,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(s) &= \mathbb{E}_\theta \exp \{-s\xi\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -s \frac{g(x)}{f(x)} \right\} ((1 - \theta)f(x) + \theta g(x)) dx. \end{aligned}$$

Теперь, так как распределение неотрицательной случайной величины  $\eta_n$  однозначно определяется ее преобразованием Лапласа (см., например, [11]), то для практического определения распределения случайной величины  $L_n^{(1)}$  при конкретных  $f(x)$  и  $g(x)$  можно использовать процедуры численного обращения преобразования Лапласа.

### 3.1 Асимптотическое поведение разности мощностей

В работе [8] для нормированного предела разности мощностей (также называемого *потерей мощности*) для критерия, основанного на статистике (10), получено выражение:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^3}{8\sqrt{I}} \varphi(u_\alpha - t\sqrt{I}) \left[ \mathbb{D}_0 l^{(2)}(X_1) - \right. \\ &\quad \left. - I^{-1} \mathbb{E}_0^2 l^{(1)}(X_1) l^{(2)}(X_1) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

где символ  $\varphi(\cdot)$  обозначает плотность стандартного нормального распределения. Введем обозначение для моментов порядка  $s$  случайной величины  $\xi = g(X_1)/f(X_1)$ :

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \mathbb{E}_0 \xi^s = \mathbb{E}_0 \left( \frac{g(X_1)}{f(X_1)} \right)^s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^s(x)}{f^{s-1}(x)} dx, \\ &\quad s = 2, 3, 4. \quad (15) \end{aligned}$$

В этих обозначениях фишеровская информация (5) равна

$$I = \Psi_2 - 1. \quad (16)$$

Запишем величины, входящие в формулу (14), с учетом обозначений (15) и формулы (4) в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 l^{(1)}(X_1) l^{(2)}(X_1) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right)^3 f(x) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{g^3(x)}{f^3(x)} - 3 \frac{g^2(x)}{f^2(x)} + 3 \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right) f(x) dx = \\ &= -\Psi_3 + 3\Psi_2 - 2; \\ \mathbb{E}_0^2 l^{(1)}(X_1) l^{(2)}(X_1) &= (-\Psi_3 + 3\Psi_2 - 2)^2 = \\ &= \Psi_3^2 - 6\Psi_2\Psi_3 + 4\Psi_3 + 9\Psi_2^2 - 12\Psi_2 + 4. \end{aligned}$$



С учетом формул (6) и (16) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_0 l^{(2)}(X_1) &= \mathbb{E}_0 \left( l^{(2)}(X_1) \right)^2 - \left( \mathbb{E}_0 l^{(2)}(X_1) \right)^2 = \\ &= \mathbb{E}_0 \left( l^{(2)}(X_1) \right)^2 - (\Psi_2 - 1)^2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left( l^{(2)}(X_1) \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right)^4 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{g^4(x)}{f^4(x)} - 4 \frac{g^3(x)}{f^3(x)} + 6 \frac{g^2(x)}{f^2(x)} - 4 \frac{g(x)}{f(x)} + \right. \\ &\quad \left. + 1 \right) f(x) dx = \Psi_4 - 4\Psi_3 + 6\Psi_2 - 3 ; \\ \mathbb{D}_0 l^{(2)}(X_1) &= \Psi_4 - 4\Psi_3 + 6\Psi_2 - 3 - (\Psi_2 - 1)^2 . \end{aligned}$$

Окончательно получаем для величины  $r(t)$  из формулы (14) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^3}{8\sqrt{\Psi_2 - 1}} \varphi \left( u_\alpha - t\sqrt{\Psi_2 - 1} \right) \times \\ &\times \left( \mathbb{D}_0 l^{(2)}(X_1) - I^{-1} \mathbb{E}_0^2 l^{(1)}(X_1) l^{(2)}(X_1) \right) = \\ &= \frac{t^3}{8\sqrt{\Psi_2 - 1}} \varphi \left( u_\alpha - t\sqrt{\Psi_2 - 1} \right) \times \\ &\times \left( \Psi_4 - 4\Psi_3 + 6\Psi_2 - 3 - \Psi_2^2 + 2\Psi_2 - 1 + \right. \\ &\quad \left. + 6\Psi_3 - 9\Psi_2 + 3 - \frac{(\Psi_3 - 1)^2}{\Psi_2 - 1} \right) = \\ &= \frac{t^3}{8\sqrt{\Psi_2 - 1}} \varphi \left( u_\alpha - t\sqrt{\Psi_2 - 1} \right) \times \\ &\times \left( \Psi_4 + 2\Psi_3 - \Psi_2^2 - \Psi_2 - \frac{(\Psi_3 - 1)^2}{\Psi_2 - 1} - 1 \right) . \quad (17) \end{aligned}$$

С помощью величины  $r(t)$  можно найти асимптотический дефект, так как (см., например, книгу [8]) с учетом формул (16) и (17)

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (k_n - n) = \frac{2r(t)}{t\sqrt{I}\varphi(t\sqrt{I} - u_\alpha)} = \\ &= 2 \frac{t^3}{8\sqrt{\Psi_2 - 1}} \varphi \left( u_\alpha - t\sqrt{\Psi_2 - 1} \right) \times \\ &\times \left( \Psi_4 + 2\Psi_3 - \Psi_2^2 - \Psi_2 - \frac{(\Psi_3 - 1)^2}{\Psi_2 - 1} - 1 \right) / \\ &\quad \left( t\sqrt{\Psi_2 - 1} \varphi(t\sqrt{\Psi_2 - 1} - u_\alpha) \right) = \\ &= \frac{t^2}{4(\Psi_2 - 1)} \left( \Psi_4 + 2\Psi_3 - \Psi_2^2 - \Psi_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\Psi_3 - 1)^2}{\Psi_2 - 1} - 1 \right) . \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь через  $d_n$  обозначен дефект,  $k_n$  — число наблюдений, необходимых критерию, основанному на статистике  $L_n^{(1)}$  из формулы (10), для достижения той же мощности, что и критерию, основанному на статистике  $\Lambda_n(t)$  из формулы (3), при альтернативах вида  $t/\sqrt{n}$ . Первое равенство в соотношении (18) понимается в том смысле, что если предел существует и конечен, то он, по определению, называется асимптотическим дефектом.

### 3.2 Условия сходимости моментных характеристик $\Psi_s$

Рассмотрим условия, гарантирующие конечность моментных характеристик (15) для некоторых частных случаев смесей распределений. Приведем подробный вывод для фишеровской информации (5), т.е. для моментной характеристики  $\Psi_2$ . Для остальных условия получаются аналогично с учетом того, что

$$\begin{aligned} \left( \sum_i a_i \right)^2 &= \sum_i a_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j ; \\ \left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^3 &= \sum_i a_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} a_i a_j^2 + k \prod_i a_i , \end{aligned}$$

и для любых  $a > 0, b \geq 0$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} .$$

**Нормальное распределение.** В этом случае

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^k p_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - a_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} ; \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1 , \\ g(x) &= \frac{1}{\sigma_{k+1} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - a_{k+1})^2}{2\sigma_{k+1}^2} \right\} . \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{g^2(x)}{f(x)} &= \exp \left\{ -\frac{(x - a_{k+1})^2}{\sigma_{k+1}^2} \right\} / \\ &\quad \left( \sqrt{2\pi} \sigma_{k+1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{p_j}{\sigma_j} \exp \left\{ -\frac{(x - a_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\} \right) = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_{k+1}^2} (x^2 - 2a_{k+1}x + a_{k+1}^2) \right\} / \\ &\quad \left( \sqrt{2\pi} \sigma_{k+1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{p_j}{\sigma_j} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} (x^2 - 2a_jx + a_j^2) \right\} \right) = \end{aligned}$$

$$= \left( \sqrt{2\pi}\sigma_{k+1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{p_j}{\sigma_j} \exp \left\{ x^2 \left( \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_j^2} \right) + 2x \left( \frac{a_j}{2\sigma_j^2} - \frac{a_{k+1}}{\sigma_{k+1}^2} \right) + \left( \frac{a_{k+1}^2}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{a_j^2}{2\sigma_j^2} \right) \right\} \right)^{-1}. \quad (19)$$

При  $|x| \rightarrow \infty$  парабола относительно  $x$  вида

$$y_j(x) = x^2 \left( \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_j^2} \right) + 2x \left( \frac{a_j}{2\sigma_j^2} - \frac{a_{k+1}}{\sigma_{k+1}^2} \right) + \left( \frac{a_{k+1}^2}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{a_j^2}{2\sigma_j^2} \right)$$

может иметь пределом либо  $+\infty$ , либо  $-\infty$ . Первая ситуация, очевидно, имеет место, если

$$\frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_j^2} = \frac{2\sigma_j^2 - \sigma_{k+1}^2}{2\sigma_j^2\sigma_{k+1}^2} > 0,$$

что выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{k+1}^2 < 2\sigma_j^2.$$

Поэтому, если выполнено условие

$$\sigma_{k+1}^2 < 2 \max_{1 \leq j \leq k} \sigma_j^2, \quad (20)$$

то функция в знаменателе соотношения (19) неограниченно возрастает при  $|x| \rightarrow \infty$ , являясь при этом величиной порядка  $O(e^{\alpha x^2})$  при некотором  $\alpha > 0$ . Обозначим  $\sigma_{j_0}^2 = \max_{1 \leq j \leq k} \sigma_j^2$ . В таком случае, поскольку  $\sigma_{k+1}^{-2} - (1/2)\sigma_{j_0}^{-2} > 0$  и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_{j_0}^2} - \left( \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_i^2} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{j_0}^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right) < 0, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{g^2(x)}{f(x)} &= \left( C \exp \left\{ x^2 \left( \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_{j_0}^2} \right) + 2x \left( \frac{a_{j_0}}{2\sigma_{j_0}^2} - \frac{a_{k+1}}{\sigma_{k+1}^2} \right) + \left( \frac{a_{k+1}^2}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{a_{j_0}^2}{2\sigma_{j_0}^2} \right) \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 + O(e^{-x^2}) \right) \right)^{-1} = \\ &= \left( O(e^{\alpha x^2}) \left( 1 + O(e^{-x^2}) \right) \right)^{-1} = O(e^{-\alpha x^2}), \\ &\quad \alpha > 0, \quad C > 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и интеграл в соотношении (5) конечен.

Пусть вместо условия (20) выполнено соотношение

$$\sigma_{k+1}^2 = 2\sigma_{j_0}^2,$$

Тогда для любого  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{g^2(x)}{f(x)} &= \frac{1}{e^{\alpha x + C} \left( 1 + O(e^{-x^2}) \right)} = \\ &= \frac{1}{O(e^{\alpha x}) \left( 1 + O(e^{-x^2}) \right)} = O(e^{-\alpha x}), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, можно заключить, что для конечности фишеровской информации из формулы (5) достаточно, чтобы было выполнено условие (20).

Предположим теперь, что

$$\sigma_{k+1}^2 > 2 \max_{1 \leq j \leq k} \sigma_j^2, \quad (21)$$

а интеграл из соотношения (5) сходится. Из неравенства (21) следует, что все коэффициенты при  $x^2$  в равенстве (19) отрицательны:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_{j_0}^2} - \left( \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_i^2} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{j_0}^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right) < 0, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{g^2(x)}{f(x)} &= \left( C \exp \left\{ x^2 \left( \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{1}{2\sigma_{j_0}^2} \right) + 2x \left( \frac{a_{j_0}}{2\sigma_{j_0}^2} - \frac{a_{k+1}}{\sigma_{k+1}^2} \right) + \left( \frac{a_{k+1}^2}{\sigma_{k+1}^2} - \frac{a_{j_0}^2}{2\sigma_{j_0}^2} \right) \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{2\pi}\sigma_{k+1}^2 \cdot \left( 1 + O(e^{-x^2}) \right) \right)^{-1} = \\ &= \left( O(e^{-\alpha x^2}) \left( 1 + O(e^{-x^2}) \right) \right)^{-1} = O(e^{\alpha x^2}), \\ &\quad \alpha > 0, \quad C > 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поэтому интеграл из равенства (5) расходится (аналогично вычислению интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  переходим к полярным координатам и получаем расходящийся интеграл  $\int_0^{\infty} e^t dt$ ). Полученное противоречие доказывает, что условие (20) является необходимым и достаточным для существования фишеровской информации в данном случае.

Вообще, достаточным условием сходимости моментных характеристик, определяемых соотношением (15), в случае конечной смеси нормальных законов является условие:

$$\sigma_{k+1}^2 < \frac{s}{s-1} \max_{1 \leq j \leq k} \sigma_j^2, \quad s = 2, 3, 4,$$

для каждой из моментных характеристик  $\Psi_s$ . Таким образом, для конечности моментных характеристик (15) сразу для всех  $s = 2, 3, 4$  достаточно выполнения условия:

$$\sigma_{k+1}^2 < \frac{4}{3} \max_{1 \leq j \leq k} \sigma_j^2. \quad (22)$$

**Гамма-распределение.** В этом случае

$$f(x) = \sum_{i=1}^k p_i \frac{\alpha_i^{\beta_i}}{\Gamma(\beta_i)} x^{\beta_i-1} e^{-\alpha_i x}; \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1;$$

$$g(x) = \frac{\alpha_{k+1}^{\beta_{k+1}}}{\Gamma(\beta_{k+1})} x^{\beta_{k+1}-1} e^{-\alpha_{k+1} x}, \quad x \geq 0.$$

Имеем

$$\frac{g^2(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_{k+1}^{2\beta_{k+1}}}{\Gamma^2(\beta_{k+1})} x^{2\beta_{k+1}-2} e^{-2\alpha_{k+1} x} /$$

$$\sum_{i=1}^k p_i \frac{\alpha_i^{\beta_i}}{\Gamma(\beta_i)} x^{\beta_i-1} e^{-\alpha_i x} =$$

$$= \frac{\alpha_{k+1}^{2\beta_{k+1}}}{\Gamma^2(\beta_{k+1})} \left( \sum_{i=1}^k \frac{p_i \alpha_i^{\beta_i}}{\Gamma(\beta_i)} x^{\beta_i-2\beta_{k+1}+1} e^{(2\alpha_{k+1}-\alpha_i)x} \right)^{-1}.$$

Сходимость интеграла из равенства (5) зависит от показателей функций в знаменателе. Отметим, что любое слагаемое, содержащее множитель вида  $x^{1-\nu}$ ,  $\nu > 1$ , имеет особенность в нуле, а любое слагаемое, содержащее множитель вида  $e^{\mu x}$ ,  $\mu > 0$ , имеет особенность на  $+\infty$ . Таким образом, для сходимости подынтегральной функции в 0 и на  $+\infty$  в знаменателе должны быть слагаемые с подобными множителями. Итак, для ограниченности подынтегральной функции хотя бы для одного номера  $i$  должно существовать  $\nu_i > 1$  и хотя бы для одного номера  $j$  должно существовать  $\mu_j > 0$ :

$$\frac{g^2(x)}{f(x)} = O(x^{\nu_i-1} e^{-\mu_j x}) A(x),$$

где  $A(x)$  — ограниченная функция, не имеющая особенностей в 0 и на  $+\infty$ , поэтому можно считать, что  $A(x) \leq C$  и

$$\frac{g^2(x)}{f(x)} = O(x^{\nu_i-1} e^{-\mu_j x}), \quad x \rightarrow 0, +\infty.$$

Учитывая вид гамма-функции и сказанное ранее, получаем, что для интегрируемости необходимо, чтобы неравенства  $\nu_i > 1$ ,  $\mu_j > 0$  выполнялись

хотя бы для одного номера  $i$  и  $j$  соответственно. Получим

$$\nu_i = 2\beta_{k+1} - \beta_i > 1 \Rightarrow \beta_{k+1} > \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq k} (\beta_i + 1);$$

$$\mu_j = 2\alpha_{k+1} - \alpha_j > 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} > \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq k} \alpha_j.$$

Отдельно рассмотрим случай наличия в знаменателе слагаемых вида  $e^{\mu_j x}$  (т. е. случай, когда  $\nu_i = 1$  для некоторого номера  $i$ ). Из очевидного неравенства

$$\frac{1}{e^{\mu x} + b} \leq \frac{1}{e^{\mu x}}, \quad b \geq 0,$$

следует, что интеграл из соотношения (5) сходится при  $\nu_i = 1$ , если  $\mu_j > 0$ . Если же  $\mu_j \leq 0$ , то выводы о сходимости интеграла делаются на основании поведения функций в сумме, для которой предполагается отсутствие в ней слагаемых вида  $e^{\mu_j x}$ , а этот случай был рассмотрен ранее. Итак, интеграл сходится в случае, когда выполнены условия

$$\beta_{k+1} \geq \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq k} (\beta_i + 1); \quad \alpha_{k+1} > \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq k} \alpha_j.$$

Вообще, достаточным условием сходимости моментных характеристик в соотношении (15) в случае конечной смеси гамма-распределений являются условия

$$\beta_{k+1} \geq s^{-1} \min_{1 \leq i \leq k} ((s-1)\beta_i + 1);$$

$$\alpha_{k+1} > \frac{s-1}{s} \min_{1 \leq j \leq k} \alpha_j, \quad s = 2, 3, 4,$$

для каждой из моментных характеристик  $\Psi_s$ . Заметим, что при  $s \geq 2$ ,  $\beta_0 = \min_{1 \leq i \leq k} \beta_i$  неравенство

$$\frac{1}{2} \beta_0 + \frac{1}{2} \leq \frac{s-1}{s} \beta_0 + \frac{1}{s}$$

справедливо только при условии  $\beta_0 > 1$ . Таким образом, для конечности моментных характеристик (15) сразу для всех  $s = 2, 3, 4$  достаточные условия приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} &\beta_{k+1} \geq \\ &\geq \max \left\{ \frac{1}{4} \min_{1 \leq i \leq k} (3\beta_i + 1), \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq k} (\beta_i + 1) \right\}; \\ &\alpha_{k+1} > \frac{3}{4} \min_{1 \leq j \leq k} \alpha_j. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

**Замечание 1.** Предположим, что при проверке гипотез на реальных данных добавляется компонента, для которой условия вида (22) или (23) не выполнены. Приведем алгоритм, позволяющий считать данные условия выполненными без потери общности. Будем последовательно из плотности  $f(x)$

исключать компоненты, для которых условия вида (22), (23) выполнены. Вместо этой компоненты в  $f(x)$  добавим компоненту  $g(x)$  и перенормируем веса так, чтобы они в сумме равнялись единице. Тогда мы получим некоторую смесь

$$p_i(x, \theta) = (1 - \theta)f_i(x) + \theta g_i(x),$$

где

$$f(x) = \sum_{j \neq i} p_j \psi_j; \quad \sum_{j \neq i} p_j = 1; \quad g_i(x) = \psi_i.$$

В таких обозначениях условия вида (22) или (23) уже будут выполнены. А значит, последовательно перебирая все номера  $i$ , для которых указанные условия будут выполнены, можно проверить, является ли смесь  $k$ - или  $(k + 1)$ -компонентной. Если хотя бы в одном случае получится, что верна нулевая гипотеза, значит, смесь является  $k$ -компонентной.

Итак, из вышесказанного получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть моментные характеристики  $\Psi_s$ ,  $s = 2, 3, 4$ , из соотношения (15) конечны. Тогда для проверки гипотез о числе компонент идентифицируемой смеси вероятностных распределений может быть использован критерий, основанный на статистике

$$L_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{g(X_i)}{f(X_i)} - 1 \right)$$

и обладающий следующими свойствами:

1. При справедливости нулевой гипотезы эта статистика имеет нормальное распределение с параметрами 0 и  $\Psi_2 - 1$ :

$$\mathcal{L}(L_n^{(1)} | H_0) \rightarrow N(0, \Psi_2 - 1).$$

2. При справедливости альтернативы эта статистика имеет нормальное распределение с параметрами  $t(\Psi_2 - 1)$  и  $\Psi_2 - 1$ :

$$\mathcal{L}(L_n^{(1)} | H_{n,1}) \rightarrow N(t(\Psi_2 - 1), \Psi_2 - 1).$$

3. Данный критерий является асимптотически наиболее мощным критерием с предельной мощностью (для заданного уровня  $\alpha \in (0, 1)$ ) вида

$$\beta^*(t) = \Phi(t\sqrt{\Psi_2 - 1} - u_\alpha).$$

4. Потеря мощности этого критерия равна

$$r(t) = \frac{t^3}{8\sqrt{\Psi_2 - 1}} \varphi \left( u_\alpha - t\sqrt{\Psi_2 - 1} \right) \left( \Psi_4 + 2\Psi_3 - \Psi_2^2 - \Psi_2 - \frac{(\Psi_3 - 1)^2}{\Psi_2 - 1} - 1 \right).$$

5. Асимптотический дефект этого критерия равен

$$d = \frac{t^2}{4(\Psi_2 - 1)} \left( \Psi_4 + 2\Psi_3 - \Psi_2^2 - \Psi_2 - \frac{(\Psi_3 - 1)^2}{\Psi_2 - 1} - 1 \right).$$

**Замечание 2.** В случае рассмотрения конечной смеси нормальных законов для конечности моментных характеристик  $\Psi_s$  достаточно потребовать выполнение условий (22), а в случае рассмотрения конечной смеси гамма-распределений — условий (23).

**Замечание 3.** Отметим, что в теореме 1 подразумевается выполнение условия  $\Psi_2 > 1$ . Его справедливость в терминах фишеровской информации была доказана при проверке условия (C) леммы 1.

## 4 Примеры конкретных смесей вероятностных распределений

В этом разделе рассмотрим частные случаи смесей, для которых в явном виде можно выписать выражения для интегралов (15). Всюду далее предполагается, что рассматриваются идентифицируемые смеси (для нормального и гамма-распределений это условие конечности числа компонент смеси, что следует из результатов работы [12]). Для равномерного распределения воспользуемся следующим утверждением.

**Утверждение 1.** Пусть  $A(M) = \bigcup_{i \in M} [a_i, b_i]$ , где  $M$  — некоторое подмножество номеров. Обозначим семейство конечных смесей равномерных распределений через

$$H = \left\{ F(x) = \sum_{i=1}^k p_i F_i(x), \sum_{i=1}^k p_i = 1, F_i \in \mathfrak{F} \right\},$$

где  $\mathfrak{F} = \{F(x, a_i, b_i), x \in \mathbb{R}, -\infty < a_i < b_i < \infty, i \in \mathbb{N}\}$  — некоторое множество функций распределения равномерных законов (возможно, конечное). Семейство  $H$  идентифицируемо тогда и только тогда, когда

$$A(M_1) \setminus A(M_2) \neq \emptyset \quad (24)$$

для всех возможных различных  $M_1$  и  $M_2$ ,  $M_i \subseteq \mathbb{N}$ . Доказательство. Для доказательства утверждения нужно показать, основываясь на результатах работы [13], что условие (24) является необходимым и достаточным для линейной независимости множества  $\mathfrak{F}$  над полем действительных чисел.

Будем пользоваться тем фактом, что функции распределения линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их плотности. В этом просто убедиться, дифференцируя

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

где  $\alpha_i$  — действительные числа, одновременно не равные нулю. Для плотностей имеем соответственно тождество

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i = 0. \quad (26)$$

Очевидно, что интегрирование тождества (26) приводит к соотношению (25).

*Необходимость.* Покажем, что если  $\mathfrak{F}$  является линейно независимым множеством над  $\mathbb{R}$ , то условие (24) выполнено. Предположим, что это не так. Тогда

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i = 0$$

только для тривиального набора чисел  $\{\alpha_i\}$  и условие (24) не выполняется, т. е. для некоторых параметров  $a < b < c < d$  (без ограничения общности рассмотрим случай совпадения числа элементов в  $M_1$  и  $M_2$ ; сказанное останется верным и для разного числа элементов в сумме в равенстве (25))

$$[a, b] \cup [b, d] = [a, c] \cup [c, d].$$

Но

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \frac{1}{b-a} \mathcal{I}([a, b]) + \alpha_2 \frac{1}{d-b} \mathcal{I}([b, d]) + \\ & + \alpha_3 \frac{1}{c-a} \mathcal{I}([a, c]) + \alpha_4 \frac{1}{d-c} \mathcal{I}([c, d]) = 0 \end{aligned}$$

не только для тривиального набора коэффициентов. Так, в качестве такого набора можно рассмотреть  $(b-a, d-b, -c+a, -d+c)$ . Получаем противоречие с линейной независимостью множества  $\mathfrak{F}$ .

*Достаточность.* Теперь предположим, что условие (24) выполнено, а  $\mathfrak{F}$  является линейно зависимым множеством над  $\mathbb{R}$ . Справедливость условия (24) означает, что существует отрезок  $[c_k, d_k]$  такой, что

$$[c_k, d_k] \subseteq [a_k, b_k] : [c_k, d_k] \not\subseteq (A(M_1) \cap A(M_2)).$$

Теперь, рассматривая линейно зависимые плотности в (26) при  $x \in [c_k, d_k]$ , получаем

$$\alpha_k C \equiv 0, \quad C > 0,$$

поэтому  $\alpha_k = 0$ , причем равенство нулю коэффициента справедливо для всех  $x \in \mathbb{R}$ , так как коэффициенты в сумме в тождестве (26) от  $x$  не зависят и тождество (26) должно выполняться сразу для всех  $x$ . Таким образом, коэффициент перед плотностью равномерного на сегменте  $[a_k, b_k]$  распределения в (26) равен нулю, при этом условие (24) выполняется, а  $\mathfrak{F}$  — линейно зависимое множество. Далее, поступая описанным выше способом, получаем, что все коэффициенты при плотностях равны нулю. Получаем противоречие с предположением о линейной зависимости. Значит, множество  $\mathfrak{F}$  над  $\mathbb{R}$  не может быть линейно зависимым при выполнении условия (24).  $\square$

**Равномерное распределение.** В данном случае

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^k p_i \frac{1}{b_i - a_i} \mathcal{I}([a_i, b_i]); \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1; \\ g(x) &= \frac{1}{b_{k+1} - a_{k+1}} \mathcal{I}([a_{k+1}, b_{k+1}]), \end{aligned}$$

где символом  $\mathcal{I}(\cdot)$  обозначен индикатор соответствующего множества. Предположим, что

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \cap \left( \bigcup_{i=1}^k [a_i, b_i] \right) \neq \emptyset.$$

Тогда моменты (15), которые могут быть использованы для нахождения величины  $r(t)$  из равенства (17), равны (отметим, что в данном случае в силу определения равномерного распределения интегрирование ведется по ограниченному множеству, а подынтегральная функция не имеет особенностей)

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^s(x)}{f^s(x)} f(x) dx = \frac{1}{(b_{k+1} - a_{k+1})^s} \times \\ & \times \sum_{j=1}^k \frac{1}{b_j - a_j} \int_{a_j}^{b_j} \mathcal{I}_{k+1}([a_j, b_j]) \left( \frac{1}{b_j - a_j} + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ i \neq j}} \frac{\mathcal{I}_i([a_j, b_j])}{b_i - a_i} \right)^{-s} dx = \frac{1}{(b_{k+1} - a_{k+1})^s} \times \\ & \times \sum_{j=1}^k \frac{1}{b_j - a_j} \int_{A_j} \left( \frac{1}{b_j - a_j} + \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ i \neq j}} \frac{\mathcal{I}_i([a_j, b_j])}{b_i - a_i} \right)^{-s} dx = \\ & = \frac{1}{(b_{k+1} - a_{k+1})^s} \sum_{j=1}^k \frac{1}{b_j - a_j} \sum_{t=1}^{m^j-1} (c_{t+1}^j - c_t^j) \times \\ & \times \left( \frac{1}{b_j - a_j} + \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ i \neq j}} \frac{\mathcal{I}_i([c_t^j, c_{t+1}^j])}{b_i - a_i} \right)^{-s}, \quad s = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{I}_j([c_i, c_{i+1}]) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_j \leq c_i \leq c_{i+1} \leq b_j; \\ 0, & [c_i, c_{i+1}] \notin [a_j, b_j]; \end{cases}$$

$$A_j = [a_j, b_j] \cap [a_{k+1}, b_{k+1}];$$

набор  $c_1^j, \dots, c_{m^j}^j$  составляет разбиение множества  $A_j$  на непересекающиеся (за исключением границ) сегменты  $[c_t^j, c_{t+1}^j]$ . При этом считаем, что если  $A_j = \emptyset$ , то  $m^j = 1$  и все  $c_t^j \equiv 0$ .

Теперь выпишем характеристическую функцию из соотношения (13) для данного случая:

$$\begin{aligned} \phi_{L_n^{(1)}}(z) &= \left( e^{-iz/\sqrt{n}} \phi_\xi \left( \frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = e^{-iz\sqrt{n}} \left( \phi_\xi \left( \frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \\ &= e^{-iz\sqrt{n}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{iz}{\sqrt{n}} \frac{g(x)}{f(x)} \right\} ((1-\theta)f(x) + \theta g(x)) dx \right)^n = \\ &= e^{-iz\sqrt{n}} \left( (1-\theta) \sum_{j=1}^k \frac{1}{b_j - a_j} \int_{a_j}^{b_j} \exp \left\{ \frac{iz}{\sqrt{n}} \frac{\mathcal{I}_{k+1}([a_j, b_j]) / (b_{k+1} - a_{k+1})}{(b_j - a_j)^{-1} + \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ i \neq j}} \mathcal{I}_i([a_j, b_j]) / (b_i - a_i)} \right\} dx + \right. \\ &\quad \left. + \theta \frac{1}{b_{k+1} - a_{k+1}} \int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \exp \left\{ \frac{iz}{\sqrt{n}} \left( (b_{k+1} - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\mathcal{I}_i([a_{k+1}, b_{k+1}])}{b_i - a_i} \right)^{-1} \right\} dx \right)^n = \\ &= e^{-iz\sqrt{n}} \left( (1-\theta) \sum_{j=1}^k \frac{1}{b_j - a_j} \sum_{t=1}^{m^j-1} (c_{t+1}^j - c_t^j) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{iz}{\sqrt{n}} \frac{1}{b_{k+1} - a_{k+1}} \left( \frac{1}{b_j - a_j} + \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ i \neq j}} \frac{\mathcal{I}_i([a_j, b_j])}{b_i - a_i} \right)^{-1} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \theta \frac{1}{b_{k+1} - a_{k+1}} \sum_{t=1}^{l-1} (c_{t+1}^{k+1} - c_t^{k+1}) \exp \left\{ \frac{iz}{\sqrt{n}} \left( (b_{k+1} - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\mathcal{I}_i([a_{k+1}, b_{k+1}])}{b_i - a_i} \right)^{-1} \right\} \right)^n. \end{aligned}$$

Аналогично получается выражение для преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \Phi_{L_n^{(1)}}(s) &= e^{s\sqrt{n}} \left( (1-\theta) \sum_{j=1}^k \frac{1}{b_j - a_j} \sum_{t=1}^{m^j-1} (c_{t+1}^j - c_t^j) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ -\frac{s}{\sqrt{n}} \frac{1}{b_{k+1} - a_{k+1}} \left( \frac{1}{b_j - a_j} + \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ i \neq j}} \frac{\mathcal{I}_i([a_j, b_j])}{b_i - a_i} \right)^{-1} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \theta \frac{1}{b_{k+1} - a_{k+1}} \sum_{t=1}^{l-1} (c_{t+1}^{k+1} - c_t^{k+1}) \exp \left\{ -\frac{s}{\sqrt{n}} \left( (b_{k+1} - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\mathcal{I}_i([a_{k+1}, b_{k+1}])}{b_i - a_i} \right)^{-1} \right\} \right)^n, \quad s > 0. \end{aligned}$$

**Нормальное распределение.** Пусть выполнены условия (22). Проверяться гипотеза о том, что плотность каждого наблюдения является нормальным законом, против альтернативы, что плотность представляет собой смесь двух нормальных законов. В данном случае

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}; \\ g(x) &= \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}. \end{aligned}$$



Моменты, определенные в соотношении (15), которые входят в величину  $r(t)$  (см. (17)), равны

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \frac{\sigma_1^{s-1}}{\sigma_2^s \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -s \frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2} + (s-1) \frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} dx = \\ &= \frac{\sigma_1^{s-1}}{\sigma_2^s \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -x^2 \left( \frac{s}{2\sigma_2^2} - \frac{s-1}{2\sigma_1^2} \right) + x \left( \frac{sa_2}{\sigma_2^2} - \frac{(s-1)a_1}{\sigma_1^2} \right) + \frac{(s-1)a_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{sa_2^2}{2\sigma_2^2} \right\} dx = \\ &= \frac{\sigma_1^{s-1}}{\sigma_2^s \sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{s/(2\sigma_2^2) - (s-1)/(2\sigma_1^2)}} \times \\ &\times \exp \left\{ \left( \frac{sa_2}{\sigma_2^2} - \frac{(s-1)a_1}{\sigma_1^2} \right)^2 / \left( 4 \left( \frac{s}{2\sigma_2^2} - \frac{s-1}{2\sigma_1^2} \right) \right) + \frac{(s-1)a_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{sa_2^2}{2\sigma_2^2} \right\} = \\ &= \frac{\sigma_1^s}{\sigma_2^{s-1} \sqrt{s\sigma_1^2 - (s-1)\sigma_2^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ \left( \frac{sa_2}{\sigma_2^2} - \frac{(s-1)a_1}{\sigma_1^2} \right)^2 / \left( 2 \left( \frac{s}{\sigma_2^2} - \frac{s-1}{\sigma_1^2} \right) \right) + \frac{(s-1)a_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{sa_2^2}{2\sigma_2^2} \right\} = \\ &= \frac{\sigma_1^s}{\sigma_2^{s-1} \sqrt{s\sigma_1^2 - (s-1)\sigma_2^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ \left( sa_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - (s-1)a_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 / \left( 2(s\sigma_1^2 - (s-1)\sigma_2^2) \right) + \frac{(s-1)a_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{sa_2^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad s = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Отметим, что при нахождении значения интеграла использовалось следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ -ax^2 + bx + c \} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left\{ \frac{b^2}{4a} + c \right\}.$$

**Гамма-распределение.** Пусть выполнены условия (23). Проверяем гипотезу о том, что плотность каждого наблюдения определяется гамма-распределением, против альтернативы, что плотность представляет собой смесь двух гамма-распределений. В данном случае

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} x^{\beta_1-1} e^{-\alpha_1 x}; \\ g(x) &= \frac{\alpha_2^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2)} x^{\beta_2-1} e^{-\alpha_2 x}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Моменты, определенные в соотношении (15), которые входят в величину  $r(t)$  (см. (17)), равны:

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \frac{\Gamma^{s-1}(\beta_1) \alpha_2^{s\beta_2}}{\Gamma^s(\beta_2) \alpha_1^{(s-1)\beta_1}} \int_0^{\infty} x^{s\beta_2 - (s-1)\beta_1 - 1} e^{-x(s\alpha_2 - (s-1)\alpha_1)} dx = \\ &= \frac{\alpha_2^{s\beta_2}}{\alpha_1^{(s-1)\beta_1}} \frac{1}{(s\alpha_2 - (s-1)\alpha_1)^{s\beta_2 - (s-1)\beta_1}} \frac{\Gamma^{s-1}(\beta_1) \Gamma(s\beta_2 - (s-1)\beta_1)}{\Gamma^s(\beta_2)}, \quad s = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

## Литература

1. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. — М.: ИПИ РАН, 2007. 363 с.
2. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. — М.: МГУ, 2011. 510 с.
3. *Akaike H.* Information theory and an extension of the maximum likelihood principle // 2nd Symposium (International) on Information Theory / Eds. B. N. Petrov, F. Csake. — Budapest, 1973. P. 267–281.
4. *Schwartz G.* Estimating the dimension of a model // The Annals of Statistics, 1978. Vol. 6. P. 461–464.
5. *Lo Y., Mendell N. R., Rubin D. B.* Testing the number of components in a normal mixture // Biometrika, 2001. Vol. 88. No. 3. P. 767–778.
6. *Lo Y.* Likelihood ratio tests of the number of components in a normal mixture with unequal variances // Statistics and Probability Lett., 2005. Vol. 71. P. 225–235.
7. *Vuong Q. H.* Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses // Econometrica, 1989. Vol. 57. Iss. 2. P. 307–333.
8. *Bening V. E.* Asymptotic theory of testing statistical hypothesis: Efficient statistics, optimality, power loss and deficiency. — Utrecht: VSP, 2000. 277 p.
9. *Hájek J.* Asymptotically most powerful rank-order tests // Ann. Math. Statist., 1962. Vol. 33. P. 1124–1147.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — 4-е изд. — М.: Наука, 1976.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Либроком, 2010. 766 с.
12. *Teicher H.* Identifiability of finite mixtures // The Annals of Statistics, 1963. Vol. 34. No. 4. P. 1265–1269.
13. *Yakowitz S. J., Spragins J. D.* On the identifiability of finite mixtures // The Annals of Statistics, 1968. Vol. 39. No. 1. P. 209–214.

# РЕКОНСТРУКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОДНОФОТОННОЙ ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ ПРИ ПОМОЩИ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО МНОЖИТЕЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ\*

В. Г. Ушаков<sup>1</sup>, О. В. Шестаков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассмотрена задача определения вероятностных характеристик случайных функций по распределениям интегральных преобразований, возникающих в задачах эмиссионной томографии. В классе дискретных случайных функций разработан метод восстановления распределений.

**Ключевые слова:** эмиссионная томография; преобразование Радона; проекции; случайные функции

## 1 Введение

При исследовании биологических и других чувствительных объектов с помощью методов однофотонной эмиссионной томографии возникает задача определения вероятностных характеристик двумерных случайных функций по характеристикам их интегральных преобразований вида

$$R_{\mu}f(s, \theta) = \int_{x\theta=s} f(x)e^{D\mu(x, \theta^{\perp})} dl, \quad \theta \in S^1, \quad s \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

(см. [1–4]), где  $f(x)$  — непрерывная функция с компактным носителем, имеющая смысл интенсивности излучения, интеграл берется вдоль прямой  $x\theta = s$ ,  $S^1$  — множество направлений, задаваемых единичными векторами в  $\mathbf{R}^2$  с центром в начале координат, а  $D\mu(x, \theta^{\perp})$  — весовая функция, равная

$$D\mu(x, \theta^{\perp}) = \int_0^{\infty} \mu(x + t\theta^{\perp}) dt.$$

Здесь  $\mu(x)$  — известная функция с компактным носителем,  $\theta = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , а  $\theta^{\perp} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ . Функция  $-\mu(x)$  имеет смысл коэффициента поглощения. Если  $\mu(x)$  равна константе на носителе  $f(x)$ , то  $R_{\mu}(s, \theta)$  превращается в экспоненциальное преобразование Радона [1]. По аналогии с экспоненциальным преобразованием Радона будем называть интегральные преобразования вида (1) проекциями, т. е. проекция представляет собой функцию от  $s$

при фиксированном  $\theta$ . Вопрос возможности обращения преобразования (1) оставался открытым более 20 лет. В последние годы проблема была успешно решена и были получены различные формулы обращения (см., например, [2–4]).

Часто в задачах однофотонной эмиссионной томографии вполне естественно считать функцию, описывающую интенсивность излучения, случайной. При этом состояния (реализации) этой функции меняются во время процесса получения проекций. Это приводит к тому, что восстановление даже одной реализации случайной функции обычными томографическими методами становится невозможным.

В работах [5–9] рассмотрена задача определения вероятностных характеристик двумерных случайных функций по характеристикам одномерных проекций без учета поглощения или в предположении, что коэффициент поглощения равен константе. Показано, что в общем случае эта задача характеризуется сильной неоднозначностью и содержательные результаты удается получить лишь в том случае, когда случайная функция дискретна (имеет не более чем счетное число состояний). В работах [6, 9] для класса таких функций разработан метод восстановления распределений двумерных случайных функций. В работе [10] показано, что при коэффициенте поглощения, равном известной функции  $-\mu(x)$ , имеющей компактный носитель и принадлежащей классу Гельдера (с некоторым

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11-01-00515а и 11-01-12026-офи-м).

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, vgushakov@mail.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, oshestakov@cs.msu.ru

параметром), возможно восстановить распределения двумерных дискретных случайных функций. В данной работе предложен метод такого восстановления.

## 2 Постановка задачи и теорема единственности

Пусть дискретная двумерная случайная функция  $\xi(x)$  имеет вид

$$\xi(x) = f_\nu(x),$$

где  $f_1(x), f_2(x), \dots$  — последовательность непрерывных интегрируемых функций, имеющих компактный носитель (без потери общности будем считать, что этим носителем является единичный круг  $U = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ), а  $\nu$  — случайная величина, принимающая целые положительные значения.

Вероятностная структура таких случайных функций полностью определяется распределением, т.е. набором  $(f_1(x), f_2(x), \dots; p_1, p_2, \dots)$ , где  $p_i = P(\xi(x) = f_i(x)), i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ . Распределение  $\xi(x)$  будем обозначать через  $P_\xi$ , а распределение проекции через  $P_{R_\mu \xi_\theta}$ . Будем также полагать, что носителем функции  $\mu(x)$  является единичный круг  $U$ .

Как показано в [10], в рамках этой модели распределение двумерной случайной функции полностью определяется распределениями проекций. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть случайные функции  $\xi(x)$  и  $\eta(x)$  имеют описанный выше вид и  $P_{R_\mu \xi_\theta} = P_{R_\mu \eta_\theta}$  для всех  $\theta \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  — любое подмножество  $S^1$ , имеющее положительную меру, тогда

$$P_\xi = P_\eta.$$

Другими словами, при сделанных предположениях распределение любой двумерной случайной функции однозначно определяется распределениями проекций, зарегистрированных в любом сколь угодно узком диапазоне углов обзора.

## 3 Метод группировки проекций

Итак, в рамках описанной модели возможно восстановить распределение двумерной случайной функции, зная распределения ее проекций на множестве  $\Lambda$ , имеющем положительную меру. В этом

пункте будет предложен метод, позволяющий разделить множество зарегистрированных проекций на группы, соответствующие различным состояниям случайной функции. Для удобства будем полагать, что  $\Lambda$  совпадает с  $S^1$ .

Для простоты изложения в данной работе будут рассматриваться случайные функции, имеющие всего два состояния. Обобщение на любое конечное число состояний очевидно, а для случая счетного числа состояний можно произвести процедуру «усечения» распределений проекций, так же как это делается в [6] для случая отсутствия поглощения. Кроме того, поскольку в условиях рассматриваемой задачи функции  $f_i(x)$  описывают распределение плотности источников излучения в объекте, будем предполагать, что они неотрицательны. Также будем предполагать, что функции нормированы, т.е. интегралы от них по всей области определения равны 1 (при выполнении этих предположений функции  $f_i(x)$  являются плотностями вероятностных распределений).

Итак, пусть случайная функция  $\xi(x)$  принимает два состояния  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Предполагается, что известны распределения проекций для всех  $\theta \in S^1$ , т.е. для каждого  $\theta \in S^1$  известны функции  $R_\mu f_i(s, \theta), i = 1, 2$ , являющиеся проекциями функций  $f_i(x), i = 1, 2$ , и реализующиеся с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Причем, вообще говоря, заранее неизвестно, какое состояние проекции соответствует какому состоянию функции, т.е. может оказаться так, что  $R_\mu f_1(s, \theta)$  является проекцией  $f_2(x)$ , а  $R_\mu f_2(s, \theta)$  — проекцией  $f_1(x)$ . Необходимо разделить функции  $R_\mu f_i(s, \theta), i = 1, 2$ , для всех  $\theta \in S^1$  на группы так, чтобы каждая группа состояний проекций относилась к одному состоянию случайной функции.

Если  $p_1 \neq p_2$ , тогда такое разделение можно произвести по вероятностям состояний проекций, т.е. для всех  $\theta \in S^1$  то значение  $R_\mu f_i(s, \theta)$ , которое реализуется с вероятностью  $p_1$ , относится к первой группе, а значение  $R_\mu f_i(s, \theta)$ , которое реализуется с вероятностью  $p_2$ , — ко второй.

В случае, когда  $p_1 = p_2 = 1/2$ , метод группировки проекций основан на использовании некоторых свойств так называемых моментов проекций.

Для  $m = 0, 1, \dots$  определим функции

$$J^{(m)}(\theta) = \int_{\mathbf{R}} R_\mu f(s, \theta) s^m ds. \quad (2)$$

Интеграл  $J^{(m)}(\theta)$  называют  $m$ -м моментом проекции  $R_\mu f(s, \theta)$  для данного направления  $\theta$ . Подставим в (2) выражение (1) для  $R_\mu f(s, \theta)$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}} R_{\mu} f(s, \theta) s^m ds &= \\
 &= \int_{\mathbf{R}} s^m \int_{x\theta=s} f(x) e^{D\mu(x, \theta^{\perp})} dl ds = \\
 &= \int_{\mathbf{R}^2} (x \cdot \theta)^m e^{D\mu(x, \theta^{\perp})} f(x) dx = \\
 &= \int_U (x \cdot \theta)^m e^{D\mu(x, \theta^{\perp})} f(x) dx.
 \end{aligned}$$

Пусть  $P_n(x, \theta)$  — тригонометрический многочлен степени  $n$  наилучшего приближения для функции  $e^{D\mu(x, \theta^{\perp})}$ . Если функция  $\mu(x)$  непрерывно дифференцируема на  $U$  и

$$\sup_{x \in U} |\mu(x)| = A_{\mu}; \quad \sup_{x \in U} \|\text{grad} \mu(x)\| = C_{\mu},$$

тогда, учитывая, что носителем функции  $\mu(x)$  является круг  $U$ , с помощью теоремы Джексона [11] можно показать, что для всех  $x \in U$  справедливо

$$\sup_{x \in U} |e^{D\mu(x, \theta^{\perp})} - P_n(x, \theta)| \leq \frac{24e^{2A_{\mu}} C_{\mu}}{n}. \quad (3)$$

Определим функцию

$$I^{(m, n)}(\theta) = \int_U (x \cdot \theta)^m P_n(x, \theta) f(x) dx. \quad (4)$$

Легко видеть, что  $I^{(m, n)}(\theta)$  представляет собой многочлен степени  $m + n$ . В силу (3) для всех  $\theta \in S^1$

$$\begin{aligned}
 |J^{(m)}(\theta) - I^{(m, n)}(\theta)| &\leq \\
 &\leq \int_U |(x \cdot \theta)^m| |e^{D\mu(x, \theta^{\perp})} - P_n(x, \theta)| f(x) dx \leq \\
 &\leq \frac{24e^{2A_{\mu}} C_{\mu}}{n}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Заметим, что в силу компактности носителя, если все моменты двух непрерывных функций совпадают между собой, то эти функции равны. Значит, если функции  $R_{\mu} f_i(s, \theta)$ ,  $i = 1, 2$ , различны, то найдется номер  $m$ , для которого моменты  $J_i^{(m)}(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ , различаются. Посчитаем по формуле (2) моменты  $J_i^{(m)}(\theta_k)$  в равноотстоящих интерполяционных точках  $\theta_k$  [12],  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, \dots, 2m + 2n$ . Всего существует  $2^{2m+2n+1}$  способов распределить значения  $J_i^{(m)}(\theta_k)$ ,  $i = 1, 2$ , по двум группам. Обозначим через  $H$  множество всех возможных распределений. Решим линейные системы уравнений

$$G_h^{(m, n)}(\theta_n) = J_{i_n^h}^{(m)}(\theta_n), \quad (6)$$

где  $i_n^h = 1$  или  $2$  в зависимости от  $h$ ,  $n = 0, \dots, 2m + 2n$ , для всех возможных распределений  $h$  из  $H$ . Здесь  $G_h^{(m, n)}(\theta)$  — многочлен степени  $m + n$ , коэффициенты которого определяются из системы (6). В результате получим  $2^{2m+2n+1}$  многочленов  $G_h^{(m, n)}(\theta)$ ,  $h = 1, \dots, 2^{2m+2n+1}$ , претендующих на роль приближения для функции  $I_1^{(m, n)}(\theta)$  или  $I_2^{(m, n)}(\theta)$ , определяемой выражением (4). Чтобы оценить погрешность, с которой вычисляются приближения функций  $I_i^{(m, n)}(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ , воспользуемся известной оценкой погрешности интерполяции тригонометрическими многочленами [11]. Для многочлена  $G_h^{(m, n)}(\theta)$ , претендующего на роль приближения для  $I_1^{(m, n)}(\theta)$  или  $I_2^{(m)}(\theta)$ , в силу (5) должно выполняться

$$\begin{aligned}
 |G_h^{(m, n)}(\theta) - I_1^{(m, n)}(\theta)| &\leq \\
 &\leq \frac{24e^{2A_{\mu}} C_{\mu}}{n} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln(n + m) \right)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 |G_h^{(m, n)}(\theta) - I_2^{(m, n)}(\theta)| &\leq \\
 &\leq \frac{24e^{2A_{\mu}} C_{\mu}}{n} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln(n + m) \right)
 \end{aligned}$$

для всех  $\theta \in S^1$ . Следовательно, при всех  $\theta \in S^1$  должно выполняться

$$\begin{aligned}
 |G_h^{(m, n)}(\theta) - J_1^{(m)}(\theta)| &\leq \\
 &\leq \frac{24e^{2A_{\mu}} C_{\mu}}{n} \left( 9 + \frac{4}{\pi} \ln(n + m) \right) \quad (7')
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 |G_h^{(m, n)}(\theta) - J_2^{(m)}(\theta)| &\leq \\
 &\leq \frac{24e^{2A_{\mu}} C_{\mu}}{n} \left( 9 + \frac{4}{\pi} \ln(n + m) \right). \quad (7'')
 \end{aligned}$$

Начиная с некоторого  $n$ , найдется всего два распределения  $h_1$  и  $h_2$  из  $H$ , для которых эти неравенства справедливы при всех  $\theta \in S^1$ . Для этих распределений многочлены  $G_{h_i}^{(m, n)}(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ , и будут приближениями для функций  $J_i^{(m)}(\theta)$ . При фиксированном  $m$  выражение в правой части (7') и (7'') стремится к нулю при  $n$ , стремящемся к бесконечности. Поэтому можно сколь угодно близко равномерно аппроксимировать функцию  $J_i^{(m)}(\theta)$  многочленом  $G_{h_i}^{(m, n)}(\theta)$ .

Далее при вычислении для каждого  $\theta \in S^1$  значений интегралов  $J_i^{(m)}(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ , по формуле (2) проекции относятся к той или иной группе в зависимости от того, к значению какого из найденных многочленов  $G_{h_i}^{(m,n)}(\theta)$ ,  $i = 1, 2$ , в точке  $\theta$  ближе значения этих интегралов.

После того как проекции распределены по группам, можно восстановить каждое состояние случайной функции, а значит и ее распределение, с помощью формул Новикова или Наттерера (см., например, [3, 4]).

Описанный метод является точным в том смысле, что если проекции функций известны точно, то по ним, в принципе, можно сколь угодно точно приблизить функцию  $J_i^{(m)}(\theta)$  и по ее значениям осуществить группировку проекций. Однако на практике реализовать подобное точное восстановление невозможно. Этому препятствуют, по крайней мере, две причины. Первая кроется в самой сущности метода, поскольку при аппроксимации функции  $J_i^{(m)}(\theta)$  многочленом  $G_{h_i}^{(m,n)}(\theta)$  возникает погрешность интерполяции. Вторая связана с невозможностью точного измерения проекций. Если проекции заданы с некоторой ошибкой, не превышающей уровень  $\varepsilon$ , то можно получить следующую оценку для погрешности приближения функции  $J_i^{(m)}(\theta)$ :

$$\begin{aligned} & \left| G_{h_i}^{(m,n)}(\theta) - J_i^{(m)}(\theta) \right| \leq \\ & \leq \left( \frac{2\varepsilon}{m+1} + \frac{24e^{2A_\mu} C_\mu}{n} \right) \left( 9 + \frac{4}{\pi} \ln(n+m) \right). \end{aligned}$$

## Литература

1. Федоров Г. А., Терещенко С. А. Вычислительная эмиссионная томография. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
2. Arbuzov E. V., Bukhgeim A. L., Kazantsev S. G. Two-dimensional tomography problems and the theory of A-analytic functions // Siberian Adv. Math., 1998. Vol. 8. P. 1–20.
3. Natterer F. Inversion of the attenuated Radon transform // Inverse Problems, 2001. Vol. 17. P. 113–119.
4. Novikov R. G. An inversion formula for the attenuated X-ray transformation // Ark. Mat., 2002. Vol. 40. P. 145–167.
5. Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Восстановление вероятностных характеристик многомерных случайных функций по проекциям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2001. № 4. С. 32–39.
6. Shestakov O. V. An algorithm to reconstruct probabilistic distributions of multivariate random functions from the distributions of their projections // J. Math. Sci., 2002. Vol. 112. No. 2. P. 4198–4204.
7. Шестаков О. В. О единственности восстановления вероятностных характеристик многомерных случайных функций по вероятностным характеристикам их проекций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2003. № 3. С. 37–41.
8. Ушаков В. Г., Шестаков О. В. Экспоненциальное преобразование Радона случайных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2005. № 1. С. 49–55.
9. Shestakov O. V. Inversion of exponential Radon transform of random functions // Transactions of XXV Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, 2005. P. 264–269.
10. Ушаков В. Г., Шестаков О. В. Восстановление вероятностных характеристик случайных функций в задачах однофотонной эмиссионной томографии // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. № 1. С. 20–24.
11. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.
12. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. — М.: ГТТИ, 1933.



# ДИВЕРСИФИКАЦИЯ И ЕЕ СВЯЗЬ С МЕРАМИ РИСКА

Д. О. Яковенко<sup>1</sup>, М. А. Целищев<sup>2</sup>

**Аннотация:** Предложен новый подход к понятию диверсификации инвестиционных портфелей, которое определяется как бинарное отношение во множестве портфелей с конечным первым моментом. Показано, что это бинарное отношение является (в определенном смысле) частичной упорядоченностью. Рассмотрены важные свойства этого определения, а также необходимые и достаточные условия сравнимости портфелей, важнейшую роль в которых играет когерентная мера риска *Expected Shortfall* (ожидаемый дефицит). В качестве примера приводится интерпретация диверсификации информационного риска.

**Ключевые слова:** диверсификация; инвестиционные портфели; сравнение портфелей; когерентные меры риска; *Expected Shortfall*; информационный риск

## 1 Введение

Диверсификация является одним из основных способов управления рисками практически во всех областях экономической деятельности. В основе диверсификации лежит идея распределения риска по различным источникам, недопущение ситуации, когда одно неблагоприятное событие — резкое изменение цены какого-либо товара, нарушение контрактом графика поставок и т. п. — может привести к катастрофическим последствиям. В статье предложено формальное определение диверсификации и рассмотрены свойства этого определения. В качестве примера рассматривается диверсификация информационных систем как способ управления информационными рисками, под которыми понимаются риски возникновения убытков из-за неправильной организации или умышленного нарушения информационных потоков и систем организации.

## 2 Формализация понятия диверсификации

Введем вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , где  $\Omega = [0; 1)$ ,  $\mathcal{F}$  — сигма-алгебра борелевских множеств на  $[0; 1)$ ,  $\mu$  — мера Лебега.  $\Omega$  интерпретируется как пространство возможных вариантов развития событий (траекторий) на рынке. Под инвестиционным портфелем в этой статье понимается не набор ценных бумаг, а некая стратегия, которой придерживается инвестор. Стратегия представляет собой случайную величину  $\xi$ , определенную на введенном выше вероятностном пространстве и такую, что на

траектории  $\omega \in \Omega$  инвестор несет потери, равные  $\xi(\omega)$  (если  $\xi(\omega) < 0$ , то инвестор получает прибыль в размере  $-\xi(\omega)$ ). Класс всех рассматриваемых стратегий полагаем таким:  $V = \{\xi : \exists E|\xi| < \infty\}$ .

Будем использовать следующие обозначения:

1.  $\xi_1 \sim \xi_2 \Leftrightarrow F_{\xi_1}(x) \equiv F_{\xi_2}(x)$ , т. е.  $\xi_1$  и  $\xi_2$  одинаково распределены.
2.  $\xi^{(\alpha)} = \inf\{x : F_{\xi}(x) > \alpha\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , — верхняя квантиль порядка  $\alpha$ .

В дальнейшем потребуются две операции над портфелями: сложение двух портфелей и умножение портфеля на константу. Под суммой двух портфелей  $\xi_1$  и  $\xi_2$  понимается портфель, который на траектории  $\omega \in \Omega$  дает потери  $\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$ , а под умножением на константу  $\alpha \in [0, 1]$  (другие константы не понадобятся) портфеля  $\xi$  понимается портфель, который на траектории  $\omega \in \Omega$  дает потери  $\alpha\xi(\omega)$ . С экономической точки зрения стратегия  $\xi_1 + \xi_2$  подразумевает параллельное исполнение стратегий  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , а стратегия  $\alpha\xi$  заключается в выполнении всех финансовых операций стратегии  $\xi$ , но только «в доле» с другими инвесторами (так, чтобы собственная доля во всех операциях составляла  $\alpha$ ).

**Определение 1.** Будем говорить, что портфель  $\xi_2 \in V$  является **результатом диверсификации** портфеля  $\xi_1 \in V$  (обозначается  $\xi_2 \succcurlyeq \xi_1$ ), если  $\forall \varepsilon > 0$  существуют портфели  $\eta_0, \dots, \eta_n, \eta'_0, \dots, \eta'_{n-1} \in V$  и числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0 \leq \alpha_i \leq 1$ , такие что  $\eta_0 = \xi_1$ ,  $\eta_i \sim \eta'_i$ ,  $\eta_i = \alpha_i \eta_{i-1} + (1 - \alpha_i) \eta'_{i-1}$  и  $\eta_n \geq \xi_2 - \varepsilon$  почти всюду (п. в).

**Пример 1.** Пусть  $X_1, X_2, X_3$  — независимые одинаково распределенные случайные величины (порт-

<sup>1</sup>Гроссмейстер ФИДЕ, ms@cs.msu.su

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики; ms@cs.msu.su

фели). Рассмотрим портфель вида  $\xi_1 = p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ , и покажем, что портфель  $\xi_2 = (1/3)X_1 + (1/3)X_2 + (1/3)X_3$  является результатом диверсификации портфеля  $\xi_1$ . Без ограничения общности считаем, что  $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq 1$  и  $p_1 < 1/3$  (случай, когда все  $p_i = 1/3$ , не интересен в силу его тривиальности). Определим  $\eta_0 = \xi_1 = p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3$ ,  $\eta'_0 = p_3X_1 + p_2X_2 + p_1X_3$  ( $\eta_0 \sim \eta'_0$ , так как  $X_1, X_2, X_3$  независимы и одинаково распределены),  $\alpha_1 = (p_3 - 1/3)/(p_3 - p_1)$  ( $0 < \alpha_1 < 1$  в силу предположений на  $p_1, p_2, p_3$ ). Тогда

$$\eta_1 = \alpha_1\eta_0 + (1 - \alpha_1)\eta'_0 = \frac{1}{3}X_1 + p_2X_2 + \left(\frac{2}{3} - p_2\right)X_3.$$

Теперь определим

$$\eta'_1 = \frac{1}{3}X_1 + \left(\frac{2}{3} - p_2\right)X_2 + p_2X_3$$

и  $\alpha_2 = 1/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \alpha_2\eta_1 + (1 - \alpha_2)\eta'_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 = \\ &= \xi_2 > \xi_2 - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Тем самым, согласно введенному определению,  $\xi_2 \succ \xi_1$ .

### 3 Свойства введенного определения

Введем класс отображений  $\mathbb{T} = \{T : \Omega \rightarrow \Omega\}$ , так чтобы  $T \in \mathbb{T}$  тогда и только тогда, когда  $\exists A, B \in \mathcal{F}$ ,  $\mu(A) = \mu(B) = 1$ ,  $\exists T' : B \rightarrow A$  такое, что  $T'$  измеримо, обратимо и  $\forall G \in \mathcal{F} \cap B \exists \mu(T'(G)) = \mu(G)$ , причем  $T(\omega) = T'(\omega)$  для  $\omega \in B$  (на множестве нулевой меры  $\Omega \setminus B$  отображение  $T$  принимает произвольные значения из  $\Omega$ ).

**Лемма 1.**  $\forall \xi \in V, \forall T \in \mathbb{T}$  выполняется:  $\xi \sim \xi(T)$ .

**Доказательство.** Пусть  $T \in \mathbb{T}$ . Тогда  $\forall G \in \mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}$  — сигма-алгебра борелевских множеств на прямой) в силу того, что  $\mu(A) = \mu(B) = 1$ , имеем:

$$\begin{aligned} P(\xi(T) \in G) &= \mu(\{\omega : T(\omega) \in \xi^{-1}(G)\}) = \\ &= \mu(\{\omega : T(\omega) \in \xi^{-1}(G)\} \cap B) = \\ &= \mu(\{\omega : T(\omega) \in \xi^{-1}(G) \cap A\} \cap B) = \\ &= \mu(\{\omega \in B : T'(\omega) \in \xi^{-1}(G) \cap A\}) = \\ &= \mu(B \cap (T')^{-1}(\xi^{-1}(G) \cap A)) = \\ &= \mu((T')^{-1}(\xi^{-1}(G) \cap A)) = \\ &= \mu(\xi^{-1}(G) \cap A) = \mu(\xi^{-1}(G)) = P(\xi \in G). \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\xi_1, \xi_2 \in V$  и  $\xi_1 \sim \xi_2$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists T \in \mathbb{T}$  такое, что  $|\xi_1(T) - \xi_2| < \varepsilon$  почти наверное.

**Доказательство.** Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Обозначим

$$A_i = \xi_1^{-1}([i\varepsilon; (i+1)\varepsilon]), B_i = \xi_2^{-1}([i\varepsilon; (i+1)\varepsilon]).$$

Поскольку  $\xi_1 \sim \xi_2$ , то  $\forall i \mu(A_i) = \mu(B_i)$ . Согласно [1, с. 74],  $\forall i \exists A'_i, B'_i \in \mathcal{F}$ ,  $A'_i \subseteq A_i, B'_i \subseteq B_i$ ,  $\mu(A'_i) = \mu(A_i)$ ,  $\mu(B'_i) = \mu(B_i)$  и  $\exists T_i : B'_i \rightarrow A'_i$  такое, что  $T_i$  измеримо,  $\exists T_i^{-1}$  и  $\forall G \in \mathcal{F} \cap B'_i : \mu(T_i(G)) = \mu(G)$ . Определим  $T(\omega) = T_i(\omega)$  для  $\omega \in B'_i$ . На множестве нулевой меры  $\Omega \setminus (\bigcup_{-\infty}^{\infty} B'_i)$  доопределим  $T$

произвольно. Обозначим  $B = \bigcup_{-\infty}^{\infty} B'_i, A = \bigcup_{-\infty}^{\infty} A'_i$ .

В этом случае  $\mu(A) = \mu(B) = 1$ . Таким образом,  $T \in \mathbb{T}$  и  $\forall i \forall \omega \in B'_i$ :

$$\begin{aligned} |\xi_1(T(\omega)) - \xi_2(\omega)| &= |\xi_1(T_i(\omega)) - \xi_2(\omega)| < \\ &< (i+1)\varepsilon - i\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Определение 2.** Оператором диверсификации назовем оператор  $D_{\alpha, T} : V \rightarrow V$ ,  $\alpha \in [0; 1], T \in \mathbb{T}$ , такой что  $D_{\alpha, T}(\xi) = \alpha\xi + (1 - \alpha)\xi(T)$ .

Важные свойства операторов диверсификации:

1. Если  $\xi_1 = \xi_2$  ( $\xi_1 \leq \xi_2$ ) почти наверное, то  $D_{\alpha, T}(\xi_1) = D_{\alpha, T}(\xi_2)$  ( $D_{\alpha, T}(\xi_1) \leq D_{\alpha, T}(\xi_2)$  соответственно) почти наверное.
2. Если  $\xi, \eta \in V$ ,  $\eta = const$  п. в., то  $D_{\alpha, T}(\xi + \eta) = D_{\alpha, T}(\xi) + \eta$ .

**Лемма 3.**  $\xi_2 \succ \xi_1$  тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0$  существует последовательность операторов диверсификации  $D_1 = D_{\alpha_1, T_1}, \dots, D_n = D_{\alpha_n, T_n}$  такая, что  $D_n(\dots(D_1(\xi_1))\dots) \geq \xi_2 - \varepsilon$  почти наверное.

**Доказательство.**

$\Leftarrow$  Непосредственно вытекает из определений 1, 2 и леммы 1.

$\Rightarrow$  Пусть  $\xi_2 \succ \xi_1$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и строим  $\eta_0, \dots, \eta_n, \eta'_0, \dots, \eta'_{n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  из определения 1, так чтобы  $\eta_n \geq \xi_2 - \varepsilon/2$  почти наверное. Пользуясь леммой 2, построим  $T_i \in \mathbb{T}$  так, что  $|\eta'_{i-1} - \eta_{i-1}(T_i)| \leq \varepsilon/(2n)$  почти наверное. Определим  $D_i = D_{\alpha_i, T_i}, i = 1, \dots, n$ , и покажем, что эта последовательность операторов диверсификации будет искомой. Определим  $\zeta_0 = \xi_1, \zeta_k = D_k(\zeta_{k-1}), k = 1, \dots, n$ . Если доказать, что  $|\zeta_n - \eta_n| \leq \varepsilon/2$  почти наверное, то в силу того, что  $\eta_n \geq \xi_2 - \varepsilon/2$  почти наверное, получим  $\zeta_n \geq \xi_2 - \varepsilon$  почти наверное, и лемма будет доказана. Обоснуем необходимое

неравенство по индукции: будем доказывать, что  $\forall k = 0, \dots, n$   $|\zeta_k - \eta_k| \leq k\varepsilon/(2n)$  почти наверное. При  $k = 0$  утверждение справедливо:  $|\zeta_0 - \eta_0| = |\xi_1 - \xi_1| = 0$ . Пусть утверждение справедливо для некоторого  $k < n$ , докажем его для  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} |\zeta_{k+1} - \eta_{k+1}| &= |\alpha_{k+1}\zeta_k + (1 - \alpha_{k+1})\zeta_k(T_{k+1}) - \\ &\quad - \alpha_{k+1}\eta_k - (1 - \alpha_{k+1})\eta'_k| \leq \\ &\leq \alpha_{k+1}|\zeta_k - \eta_k| + (1 - \alpha_{k+1})|\zeta_k(T_{k+1}) - \eta'_k| \leq \\ &\leq \alpha_{k+1}|\zeta_k - \eta_k| + (1 - \alpha_{k+1})|\zeta_k(T_{k+1}) - \eta_k(T_{k+1})| + \\ &\quad + (1 - \alpha_{k+1})|\eta_k(T_{k+1}) - \eta'_k| \leq \\ &\leq \frac{(k+1)\varepsilon}{2n} \end{aligned}$$

почти наверное.

Тем самым лемма доказана.  $\square$

## 4 Необходимое условие диверсифицируемости

В теории управления рисками хорошо известна когерентная мера риска под названием *Expected Shortfall* (ожидаемый дефицит):

$$ES_\gamma(\xi) = \frac{1}{\gamma} \int_{1-\gamma}^1 \xi^{(t)} dt, \quad \gamma \in (0, 1].$$

Согласно [1], *Expected Shortfall* обладает следующими свойствами:

1.  $\xi \in V, \xi \leq 0$  почти наверное  $\Rightarrow ES_\gamma(\xi) \leq 0, \forall \gamma \in (0, 1]$ ;
2.  $ES_\gamma(\xi_1 + \xi_2) \leq ES_\gamma(\xi_1) + ES_\gamma(\xi_2), \forall \xi_1, \xi_2 \in V$ ;
3.  $ES_\gamma(a\xi) = aES_\gamma(\xi), \forall \xi \in V, a \geq 0$ ;
4.  $ES_\gamma(\xi + a) = ES_\gamma(\xi) + a, \forall \xi \in V, a \in \mathbb{R}$ ;
5.  $\xi_1, \xi_2 \in V, \xi_1 \sim \xi_2 \Rightarrow ES_\gamma(\xi_1) = ES_\gamma(\xi_2)$ .

Простым следствием из свойств 1 и 2 является свойство монотонности:

6.  $\xi_1, \xi_2 \in V, \xi_1 \leq \xi_2$  почти наверное  $\Rightarrow ES_\gamma(\xi_1) \leq ES_\gamma(\xi_2), \forall \gamma \in (0, 1]$ .

**Утверждение 1.**  $\forall \xi \in V \forall \alpha \in [0, 1] \forall T \in \mathbb{T}$  справедливо неравенство  $ES_\gamma(D_{\alpha, T}(\xi)) \leq ES_\gamma(\xi)$  для  $\forall \gamma \in (0, 1]$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1  $\xi \sim \xi(T)$ . По указанным выше свойствам *Expected Shortfall* имеем

$$\begin{aligned} ES_\gamma(D_{\alpha, T}(\xi)) &= ES_\gamma(\alpha\xi + (1 - \alpha)\xi(T)) \stackrel{\text{св.2}}{\leq} \\ &\leq ES_\gamma(\alpha\xi) + ES_\gamma((1 - \alpha)\xi(T)) \stackrel{\text{св.3}}{=} \\ &= \alpha ES_\gamma(\xi) + (1 - \alpha)ES_\gamma(\xi(T)) \stackrel{\text{св.5}}{=} \\ &= \alpha ES_\gamma(\xi) + (1 - \alpha)ES_\gamma(\xi) = ES_\gamma(\xi). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.  $\square$

**Теорема 1.** Если  $\xi_2 \succ \xi_1$ , то  $ES_\gamma(\xi_2) \leq ES_\gamma(\xi_1)$  для всех  $\gamma \in (0, 1]$ .

**Доказательство.** По лемме 3 для любого  $\varepsilon > 0$  существует последовательность операторов диверсификации  $D_1, \dots, D_n$  такая, что  $D_n(\dots(D_1(\xi_1))\dots) \geq \xi_2 - \varepsilon$  почти наверное. Используя свойства *Expected Shortfall* и утверждение 1, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} ES_\gamma(\xi_2) - \varepsilon &\stackrel{\text{св.4}}{=} ES_\gamma(\xi_2 - \varepsilon) \stackrel{\text{св.6}}{\leq} \\ &\leq ES_\gamma(D_n(\dots(D_1(\xi_1))\dots)) \stackrel{\text{утв.1}}{\leq} \\ &\leq ES_\gamma(D_{n-1}(\dots(D_1(\xi_1))\dots)) \stackrel{\text{утв.1}}{\leq} \dots \stackrel{\text{утв.1}}{\leq} ES_\gamma(\xi_1). \end{aligned}$$

Так как это справедливо для всех  $\varepsilon > 0$ , то, переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , получим  $ES_\gamma(\xi_2) \leq ES_\gamma(\xi_1)$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 2.** Бинарное отношение « $\succ$ » является частичной упорядоченностью на множестве  $V$  (антисимметричность при этом понимается в том смысле, что из  $\xi_1 \succ \xi_2, \xi_2 \succ \xi_1$  следует, что  $\xi_1 \sim \xi_2$ ).

**Доказательство.** Рефлексивность очевидна.

**Транзитивность.** Пусть  $\xi_2 \succ \xi_1, \xi_3 \succ \xi_2$ . По лемме 3 существуют последовательности операторов диверсификации  $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_m$  такие, что

$$D_n(\dots(D_1(\xi_1))\dots) \geq \xi_2 - \frac{\varepsilon}{2} \text{ п. в. ;}$$

$$D'_m(\dots(D'_1(\xi_2))\dots) \geq \xi_3 - \frac{\varepsilon}{2} \text{ п. в.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} D'_m(\dots(D'_1(D_n(\dots(D_1(\xi_1))\dots)))\dots) &\geq \\ &\geq D'_m(\dots(D'_1\left(\xi_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\dots)) = \\ &= D'_m(\dots(D'_1(\xi_2))\dots) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \xi_3 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \xi_3 - \varepsilon. \end{aligned}$$

По лемме 3  $\xi_3 \succ \xi_1$ .

**Антисимметричность.** Пусть  $\xi_1 \succ \xi_2, \xi_2 \succ \xi_1$ . Тогда по теореме 1  $\forall \gamma \in (0, 1]$  справедливо  $ES_\gamma(\xi_1) = ES_\gamma(\xi_2)$ , т. е.

$$\frac{1}{\gamma} \int_{1-\gamma}^1 \xi_1^{(t)} dt = \frac{1}{\gamma} \int_{1-\gamma}^1 \xi_2^{(t)} dt.$$

Отсюда вытекает, что  $\xi_1^{(t)} = \xi_2^{(t)}$  почти наверное и, следовательно,  $\xi_1 \sim \xi_2$ . Теорема доказана.  $\square$

## 5 Достаточное условие диверсифицируемости

**Лемма 4.** Пусть  $[a; b], [c; d] \subset \Omega$ ,  $[a; b] \cap [c; d] = \emptyset$ ,  $b - a = d - c$ ;  $\xi \in V$ ,  $\xi(\omega) = y_1$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $\xi(\omega) = y_2$  при  $\omega \in [c; d]$ ; числа  $y'_1, y'_2$  таковы, что  $0 \leq y_1 \leq y'_1 \leq y'_2 \leq y_2$  и  $y_1 + y_2 = y'_1 + y'_2$ . Тогда существует оператор диверсификации  $D = D_{\alpha, T}$  такой, что  $D(\xi) = y'_1$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $D(\xi) = y'_2$  при  $\omega \in [c; d]$ ,  $D(\xi) = \xi$  при остальных  $\omega$ .

**Доказательство.** Построим  $T(\omega)$ :  $T(\omega) = c + (\omega - a)$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $T(\omega) = a + (\omega - c)$  при  $\omega \in [c; d]$ ,  $T(\omega) = \omega$  при остальных  $\omega$ . Ясно, что  $T \in T$ . Возьмем  $\alpha = (y_2 - y'_1)/(y_2 - y_1)$ . Оператор  $D_{\alpha, T}$  и будет искомым. Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $[a; b], [c; d] \subset \Omega$ ,  $[a; b] \cap [c; d] = \emptyset$ ;  $\xi \in V$ ,  $\xi(\omega) = y_1$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $\xi(\omega) = y_2$  при  $\omega \in [c; d]$ . Тогда если  $0 \leq y_1 \leq y'_1 \leq y'_2 \leq y_2$  и  $(y_2 - y'_2)(d - c) > (y'_1 - y_1)(b - a)$ , то существует конечная последовательность операторов диверсификации  $D_n, \dots, D_1$  такая, что  $\xi'(\omega) = D_n(\dots(D_1(\xi(\omega)))) = y'_1$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $\xi'(\omega) \geq y'_2$  при  $\omega \in [c; d]$  и  $\xi'(\omega) = \xi(\omega)$  при остальных  $\omega$ .

**Доказательство.** Так как  $(y_2 - y'_2)(d - c) > (y'_1 - y_1)(b - a)$ , то существует  $d' \in [c; d]$  такое, что  $(y_2 - y'_2)(d' - c) > (y'_1 - y_1)(b - a)$  и  $(d' - c)/(b - a)$  рационально, т.е.  $(d' - c)/(b - a) = m/n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Разделим полуинтервалы  $[a; b]$  и  $[c; d']$  на  $n$  и  $m$  равных полуинтервалов, т.е.  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ ;  $c = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$  и  $\forall i, j: a_i - a_{i-1} = c_j - c_{j-1}$ . Укажем теперь алгоритм построения искомой последовательности операторов диверсификации.

**Шаг 1.** Пусть  $y_2 - y'_2 \geq y'_1 - y_1$  (если это не так, то переходим к следующему шагу). Тогда по предыдущей лемме существует  $D_1$  такой, что  $\xi_1 \equiv D_1(\xi) = y'_1$  при  $\omega \in [a; a_1]$ ,  $\xi_1 = z = y_2 - (y'_1 - y_1) \geq y'_2$  при  $\omega \in [c; c_1]$ ,  $\xi_1 = \xi$  при остальных  $\omega$ . Далее, если  $z - y'_2 \geq y'_1 - y_1$ , то таким же образом строим (с заменой  $y_2$  на  $z$  и  $[a; a_1]$  на  $[a_1; a_2]$ ) оператор  $D_2$ , получим случайную величину  $\xi_2 \equiv D_2(\xi_1)$ , которая равна  $y'_1$  уже на полуинтервале  $[a; a_2]$ . Затем перейдем к полуинтервалу  $[a_2; a_3]$  и т.д.

**Шаг 2.** Когда же выполнится неравенство  $z - y'_2 < y'_1 - y_1$  (пусть это произойдет после применения оператора  $D_k$ ), построим оператор  $D_{k+1}$  такой, что случайная величина  $\xi_{k+1}(\omega) \equiv D_{k+1}(\xi_k(\omega)) = y'_2$  при  $\omega \in [c; c_1]$ ,  $\xi_{k+1}(\omega) = y_1 + (z - y'_2) < y'_1$  при  $\omega \in [a_k; a_{k+1}]$ ,  $\xi_{k+1}(\omega) = \xi_k(\omega)$  при остальных  $\omega$  ( $\xi_{k+1} = y'_1$  на  $[a; a_k]$ ). Теперь переходим от  $[c; c_1]$  к  $[c_1; c_2]$  и продолжаем процесс с шага 1 (с заменой  $y_1$  на  $y_1 + (z - y'_2)$ ,  $[a; a_1]$  на  $[a_k; a_{k+1}]$ ,  $[c; c_1]$  на  $[c_1; c_2]$ ) и т.д.

Так как  $(y_2 - y'_2)(d' - c) > (y'_1 - y_1)(b - a)$ , или  $(y_2 - y'_2)m > (y'_1 - y_1)n$ , то через  $l \leq m + n$  шагов получим случайную величину  $\xi_l$  такую, что  $\xi_l(\omega) = y'_1$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $\xi_l(\omega) \geq y'_2$  при  $\omega \in [c; d]$  и  $\xi_l(\omega) = \xi(\omega)$  при остальных  $\omega$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $[a; b] \in \Omega$ ,  $C = \bigsqcup_{i=1}^n [c_i; d_i] \in \Omega$ ,  $[a; b] \cap C = \emptyset$ ,  $\xi \in V$ ,  $\xi(\omega) = x$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $\xi(\omega) = y_i$  при  $\omega \in [c_i; d_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Пусть числа  $x'$  и  $y'_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , таковы, что  $\forall i$   $0 \leq x \leq x' \leq y'_i \leq y_i$  и  $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i)(y_i - y'_i) > (b - a)(x' - x)$ .

Тогда существует последовательность операторов диверсификации  $D_n, \dots, D_1$  такая, что  $\xi'(\omega) \equiv D_n(\dots(D_1(\xi(\omega)))) = x'$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $\xi'(\omega) \geq y'_i$  при  $\omega \in [c_i; d_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $\xi'(\omega) = \xi(\omega)$  при остальных  $\omega$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\delta = \sum_{i=1}^n (d_i - c_i)(y_i - y'_i) - (b - a)(x' - x) > 0$ . Построим последовательность  $x_0 = x, x_i = x_{i-1} + ((d_i - c_i)(y_i - y'_i) - \delta/n)/(b - a)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Тогда  $x_n = x'$  и  $(d_i - c_i)(y_i - y'_i) > (x_i - x_{i-1})(b - a)$ . По предыдущей лемме существуют последовательности операторов диверсификации  $D_{ik_i}, \dots, D_{i1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и случайные величины  $\xi_i = D_{ik_i}(\dots(D_{i1}(\xi_{i-1})))$  такие, что  $\xi_i(\omega) = x_i$  при  $\omega \in [a; b]$ ,  $\xi_i(\omega) \geq y'_i$  при  $\omega \in [c_i; d_i]$ ,  $\xi_i(\omega) = \xi_{i-1}(\omega)$  при остальных  $\omega$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Последовательность  $D_{nk_n}, \dots, D_{n1}, \dots, D_{1k_1}, \dots, D_{11}$  и будет искомой. Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $\xi_1, \xi_2 \in V$  — почти наверное ограниченные случайные величины. Тогда если  $\forall \gamma \in (0; 1]$  выполняется  $ES_\gamma(\xi_2) \leq ES_\gamma(\xi_1)$ , то  $\xi_2 \succ \xi_1$ .

**Доказательство.**  $\square$  Сначала докажем теорему для простых, монотонно неубывающих и непрерывных справа случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . В этом случае  $\forall \omega \in \Omega = [0; 1)$  имеем  $\xi_i(\omega) \equiv \xi_i^{(\omega)}$ ,  $i = 1, 2$ , и

$$ES_\gamma(\xi_i) = \frac{1}{\gamma} \int_{1-\gamma}^1 \xi_i(\omega) d\omega, \quad \gamma \in (0; 1].$$

Разобьем множество  $\Omega = [0; 1)$  на конечное число непересекающихся интервалов, на каждом из которых  $\xi_1$  и  $\xi_2$  постоянны:  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ ;  $\xi_1(\omega) = a_i, \xi_2(\omega) = b_i$  при  $\omega \in [x_{i-1}; x_i]$ ;  $a_i \leq a_{i+1}, b_i \leq b_{i+1}$ . Пусть  $1 \leq k_m < \dots < k_1 \leq n$  — номера, такие что  $a_{k_i} < b_{k_i}$  (если таких номеров нет, то  $\xi_1 \geq \xi_2$  и теорема верна). Обозначим  $p_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $A = \{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \geq \xi_2(\omega)\} = \Omega \setminus \bigsqcup_{i=1}^m [x_{k_i-1}; x_{k_i}]$ . Множество  $A$  можно представить в виде объединения непересекающихся полуинтервалов.



По условию

$$\begin{aligned} ES_{1-\gamma}(\xi_1) &\geq ES_{1-\gamma}(\xi_2) \forall \gamma \in [0; 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\gamma}^1 \xi_1(\omega) d\omega \geq \int_{\gamma}^1 \xi_2(\omega) d\omega \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\gamma}^1 (\xi_1(\omega) - \xi_2(\omega)) d\omega \geq 0 \quad \forall \gamma \in [0; 1). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее неравенство  $x_{k_i-1}$  вместо  $\gamma$  и используя равенство

$$[x_{k_i-1}; 1] \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^i [x_{k_j-1}; x_{k_j}], \quad i = \overline{1, m},$$

получим, что  $\forall i \in \overline{1, m}$  верно:

$$\begin{aligned} &\int_{[x_{k_i-1}; 1] \cap A} (\xi_1(\omega) - \xi_2(\omega)) d\omega \geq \\ &\geq - \int_{[x_{k_i-1}; 1] \setminus A} (\xi_1(\omega) - \xi_2(\omega)) d\omega = \sum_{j=1}^i p_{k_j} (b_{k_j} - a_{k_j}). \end{aligned}$$

Отсюда по индукции легко получить, что существует последовательность чисел  $0 \leq c_m \leq \dots \leq c_1 \leq c_0 = 1$  такая, что  $c_i \geq x_{k_i}$  и

$$\int_{[c_i; c_{i-1}] \cap A} (\xi_1(\omega) - \xi_2(\omega)) d\omega = p_{k_i} (b_{k_i} - a_{k_i}).$$

Обозначим  $A_i = [c_i; c_{i-1}] \cap A$ . Заметим, что  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и каждое из множеств  $A_i$  можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся полуинтервалов, на каждом из которых  $\xi_1$  и  $\xi_2$  постоянны.

Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Обозначим  $\eta_0 \equiv \xi_1$ . Поскольку

$$\int_{[c_i; c_{i-1}] \cap A} (\eta_0(\omega) - (\xi_2(\omega) - \varepsilon)) d\omega > p_{k_i} ((b_{k_i} - \varepsilon) - a_{k_i}),$$

то согласно лемме 6 существуют последовательности операторов диверсификации  $D_{i1}, \dots, D_{i i_i}$  (обозначим через  $D_i^j$  их суперпозицию),  $i = \overline{1, m}$ , и случайные величины  $\eta_i = D_i^i(\eta_{i-1})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , такие, что  $\eta_i(\omega) = b_{k_i} - \varepsilon = \xi_2(\omega) - \varepsilon$  при  $\omega \in [x_{k_i-1}; x_{k_i})$ ,  $\eta_i(\omega) \geq \xi_2(\omega) - \varepsilon$  при  $\omega \in A_i$ ,  $\eta_i(\omega) = \eta_{i-1}(\omega)$  при остальных  $\omega$ . Легко видеть, что построена последовательность операторов диверсификации такая, что  $\eta_m \geq \xi_2 - \varepsilon$ . По лемме 3  $\xi_2 \succcurlyeq \xi_1$ .

**II** Теперь докажем теорему для ограниченных, монотонно неубывающих и непрерывных справа  $\xi_1$

и  $\xi_2$ . Пусть  $M > 0$  таково, что  $|\xi_1| < M$ ,  $|\xi_2| < M$ . Фиксируем произвольные  $\varepsilon > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$  такие, что  $n \geq 8M/\varepsilon$ . Разобьем отрезок  $[-M; M]$  на  $n$  равных частей точками  $-M = a_0 < a_1 < \dots < a_n = M$ . Введем новые случайные величины  $\xi'_1(\omega) = a_i$ , если  $a_{i-1} \leq \xi_1(\omega) < a_i$ ,  $\xi'_2(\omega) = a_{i-1}$ , если  $a_{i-1} \leq \xi_2(\omega) < a_i$ .  $\xi'_1, \xi'_2$  — простые монотонно неубывающие случайные величины, причем  $\xi'_1 \geq \xi_1$ ,  $\xi'_2 \leq \xi_2$ . Поэтому  $ES_{\gamma}(\xi'_2) \leq ES_{\gamma}(\xi_2) \leq ES_{\gamma}(\xi_1) \leq ES_{\gamma}(\xi'_1) \forall \gamma \in (0; 1]$ . По построению  $\xi'_1$  и  $\xi'_2$  непрерывны справа. Следовательно, по первой части доказательства, существует последовательность операторов диверсификации  $D_n, \dots, D_1$  такая, что  $D_n(\dots(D_1(\xi'_1))\dots) \geq \xi'_2 - \varepsilon/2$ . В силу того что  $n \geq 8M/\varepsilon$ , имеем:  $|\xi'_1 - \xi_1| \leq M/n \leq \varepsilon/4$  и аналогично  $|\xi'_2 - \xi_2| \leq \varepsilon/4$ . Таким образом,  $D_n(\dots(D_1(\xi_1))\dots) \geq \xi_2 - \varepsilon$ . По лемме 3  $\xi_2 \succcurlyeq \xi_1$ .

**III** Докажем теорему в общем виде. Пусть  $\xi_1, \xi_2$  — почти наверное ограниченные случайные величины и  $ES_{\gamma}(\xi_2) \leq ES_{\gamma}(\xi_1) \forall \gamma \in (0; 1]$ . Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Введем  $\xi'_i(\omega) \equiv \xi_i^{(\omega)}$ ,  $i = 1, 2$ .  $\xi'_i$  — ограниченные монотонно неубывающие непрерывные справа случайные величины. В то же время  $\xi'_i \sim \xi_i$ , поэтому  $ES_{\gamma}(\xi'_2) = ES_{\gamma}(\xi_2) \leq ES_{\gamma}(\xi_1) = ES_{\gamma}(\xi'_1)$ . Согласно второму пункту доказательства существует последовательность операторов диверсификации  $D_n, \dots, D_1$  такая, что  $D_n(\dots(D_1(\xi'_1))\dots) \geq \xi'_2 - \varepsilon/2$ . Так как  $\xi'_i \sim \xi_i$ , то по лемме 2 существуют  $T_0, T_{n+1} \in \mathbb{T}$  такие, что  $|\xi'_1 - \xi_1(T_0)| \leq \varepsilon/4$  почти наверное и  $|\xi'_2 - \xi_2(T_{n+1})| \leq \varepsilon/4$  почти наверное. Обозначим  $D_0 = D_{0, T_0}$ ,  $D_{n+1} = D_{0, T_{n+1}}$ . Тогда  $D_{n+1}(D_n(\dots(D_0(\xi_1))\dots)) \geq \xi_2 - \varepsilon$  и по лемме 3  $\xi_2 \succcurlyeq \xi_1$ . Теорема доказана.  $\square$

Последняя теорема дает возможность про любые два портфеля с ограниченными возможными потерями и прибылями сказать, является ли один из них результатом диверсификации другого. Заметим, что на практике большинство финансовых инструментов предполагает неограниченную возможность потерь.

Определим последовательности

$$x_n = (n+1)!; \quad y_n = (n+2)n!; \quad \mu_n = \frac{\nu_n}{\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i},$$

где

$$\nu_n = \frac{\delta^{n^2}}{(n+2)!}, \quad \delta \in (0; 1).$$

Разобьем множество  $\Omega = [0; 1)$  на полуинтервалы точками  $0 = a_1 < a_2 = b_1 < b_2 = a_3 < a_4 = b_3 < \dots$ , так что  $a_{2i} - a_{2i-1} = b_{2i} - b_{2i-1} = \mu_i/2$ ,  $i \geq 1$ .

Пронумеровав произвольным способом все рациональные числа из интервала  $(0; 0,5)$ , получим последовательность  $\hat{\alpha}_1, \dots$ . Определим теперь  $\xi(\omega) = x_i$  при  $\omega \in [a_{2i-1}; a_{2i})$ ,  $\xi(\omega) = y_i$  при  $\omega \in [b_{2i-1}; b_{2i})$ ,  $\xi'(\omega) = x_i + \hat{\alpha}_i(y_i - x_i)$  при  $\omega \in [a_{2i-1}; a_{2i})$ ,  $\xi'(\omega) = y_i - \hat{\alpha}_i(y_i - x_i)$  при  $\omega \in [b_{2i-1}; b_{2i})$ . Можно показать, что  $ES_\gamma(\xi') \leq ES_\gamma(\xi)$ ,  $\forall \gamma \in (0; 1]$ , но в то же время  $\xi'$  не является результатом диверсификации портфеля  $\xi$ . Таким образом, полностью отказаться от требования ограниченности портфелей в теореме 3 нельзя.

## 6 Диверсификация и информационные риски

Информационным риск — риск возникновения убытков из-за неправильной организации или умышленного нарушения информационных потоков и систем организации. Можно применить предложенное понятие диверсификации к информационным рискам. Под информационной системой предприятия будем понимать систему взаимосвязанных информационных объектов, которые реализуют информационный процесс в целях эффективного функционирования предприятия. Будем рассматривать ее как набор неких компонент, подсистем, каждая из которых характеризуется случайной величиной  $\xi(\omega)$  ( $E|\xi| < \infty$ ), определенной на вероятностном пространстве  $(\Omega = [0; 1), \mathcal{F}, \mu)$  и от-

ражающей убытки, которые несет подсистема на траектории  $\omega \in \Omega$ . Под сложением двух подсистем  $\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$  понимается система, состоящая из совокупности подсистем  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , а под умножением подсистемы  $\xi$  на константу  $a \in [0; 1]$  понимается информационная система, использующая  $a \cdot 100\%$  ресурсов подсистемы  $\xi$ . Информационную систему  $\xi_2$  будем называть результатом диверсификации системы  $\xi_1$ , если систему  $\xi_1$  можно «пересобрать» (согласно правилам, указанным в определении 1) так, чтобы  $\forall \varepsilon > 0 \eta_n \geq \xi_2 - \varepsilon$  почти наверное.

Преобразуем пример 1 для случая информационного риска. Пусть имеется три вычислительных машины, характеризующихся независимыми одинаково распределенными убытками  $X_1, X_2, X_3$ , и имеется возможность построить систему вида  $p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  (это можно интерпретировать как факт ограниченности суммарной мощности системы). Рассуждения, приведенные в примере 1, показывают, что система  $(1/3)X_1 + (1/3)X_2 + (1/3)X_3$  является результатом диверсификации любой системы указанного выше вида.

## Литература

1. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected Shortfall // J. Banking Finance, 2002. Vol. 26. No. 7. P. 1487–1503.



# ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАТАСТРОФАМИ\*

А. И. Зейфман<sup>1</sup>, А. В. Коротышева<sup>2</sup>, Т. Л. Панфилова<sup>3</sup>, С. Я. Шоргин<sup>4</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются модели обслуживания, описываемые марковскими цепями с непрерывным временем в случае наличия катастроф. Получены оценки устойчивости различных характеристик таких систем. Рассмотрен пример конкретной системы обслуживания.

**Ключевые слова:** нестационарные системы обслуживания; марковские модели с катастрофами; оценки устойчивости; аппроксимация предельных характеристик

## 1 Введение

Системы массового обслуживания с катастрофами (СМО с катастрофическими сбоями, queues with disasters, queues with catastrophes) в разных ситуациях и при разных предположениях изучались во многих работах (см., например, [1–10]).

Устойчивость нестационарных марковских цепей с непрерывным временем изучалась начиная с [11], затем в работах [12, 13], а для систем обслуживания, описываемых нестационарными процессами рождения и гибели с катастрофами в случае, когда интенсивность катастрофы не зависит от числа требований в системе и является существенной, рассмотрена в нашей предыдущей работе [14].

Здесь будет изучена более общая ситуация системы обслуживания, число требований в которой описывается марковской цепью с непрерывным временем и дискретным пространством состояний в той ситуации, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе, но являются существенными.

Пусть  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$ , — число требований в системе обслуживания.

Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = \Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$ ,  $i, j \geq 0$ ,  $0 \leq s \leq t$ , переходные вероятности процесса  $X = X(t)$ , а через  $p_i(t) = \Pr \{X(t) = i\}$  — его вероятности состояний, через  $\xi_i(t)$  — интенсивность катастрофы при наличии  $i$  требований в системе, через  $a_{i+k,i}(t)$  — интенсивность поступления  $k$  требований в систему обслуживания, в которой уже есть  $i$  требований, и, наконец, через  $a_{i-k,i}(t)$  — интенсивность обслуживания  $k$  требований в системе обслуживания, в которой имеется  $i$  требований.

Тогда при выполнении естественных дополнительных условий (см., например, [15]) прямую систему Колмогорова для вероятностей состояний

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= a_{00}(t)p_0 + \sum_{i \geq 1} (a_{0i}(t) + \xi_i(t)) p_i; \\ \frac{dp_k}{dt} &= (a_{kk}(t) - \xi_k(t)) p_k + \sum_{i \neq k} a_{ki}(t) p_i, \quad k \geq 1, \end{aligned} \right\} (1)$$

можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t) \mathbf{p} \quad (2)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$ , где  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$  — вектор-столбец вероятностей состояний, а операторная функция  $A(t)$  локально интегрируема на  $[0, \infty)$  и ограничена почти при всех  $t \geq 0$  (см. подробное рассмотрение в [16]). Обозначим через  $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$  множество всех стохастических векторов. Тогда

$$\|A(t)\|_1 = 2 \sup_i (|a_{ii}(t)| + \xi_i(t)) < \infty$$

почти при всех  $t \geq 0$ , а значит, задача Коши для уравнения (2) с начальным условием  $\mathbf{p}(0)$  имеет единственное решение

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0),$$

где  $U(t, s)$  — оператор Коши уравнения (2). При этом если  $\mathbf{p}(s) \in \Omega$ , то и  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при любом  $t \geq s$ .

Рассмотрим теперь «возмущенный» процесс обслуживания  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обозначая все его

\* Исследование поддержано грантами РФФИ 11-07-00112-а и 11-01-12026-офи-м.

<sup>1</sup> Вологодский государственный педагогический университет; Институт проблем информатики Российской академии наук; Институт социально-экономического развития территорий Российской академии наук, a\_zeifman@mail.ru

<sup>2</sup> Вологодский государственный педагогический университет, a\_korotysheva@mail.ru

<sup>3</sup> Вологодский государственный педагогический университет, ptl-70@mail.ru

<sup>4</sup> Институт проблем информатики Российской академии наук, SShorgin@ipiran.ru

соответствующие характеристики так же, как и у невозмущенного процесса, с дополнительной верхней чертой. Положим  $\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t)$  и для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», т. е. почти при всех  $t \geq 0$  выполняется неравенство

$$|\hat{A}(t)| \leq \varepsilon.$$

## 2 Оценки для вектора состояний

**Теорема 1.** Пусть  $\xi_i(t) \geq \xi(t) \geq b > 0$  при всех  $i \geq 0$  и почти всех  $t \geq 0$ . Тогда при любых начальных условиях  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  справедлива следующая оценка устойчивости:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{b}.$$

**Доказательство.** Перепишем первое уравнение системы (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= (a_{00}(t) - \xi(t))p_0 + \sum_{i \geq 1} (a_{0i}(t) + \\ &+ \xi_i(t) - \xi(t))p_i + \xi(t). \end{aligned}$$

Теперь уравнение (2) можно записать так:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = B(t)\mathbf{p} + \mathbf{f}(t), \quad (3)$$

причем матрица  $B(t)$  отличается только первой строкой очевидным образом от матрицы  $A(t)$ , а  $\mathbf{f}(t) = (\xi(t), 0, \dots)^T$ .

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = V(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t V(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $V(t, s)$  — оператор Коши уравнения (4).

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора  $B(t)$  в пространстве  $l_1$  (см., например, подробное рассмотрение в [15, 17, 18]), получаем

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_1 &= \max \left( a_{00}(t) - \xi(t) + \sum_{i \geq 1} a_{i0}(t), \right. \\ &\sup_{i \geq 1} \left( a_{ii}(t) - \xi_i(t) + a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t) + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{j \neq i, j \geq 1} a_{ji}(t) \right) \right) = -\xi(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\|V(t, s)\| \leq e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau}$$

для всех  $0 \leq s \leq t$ .

А следовательно, при любых начальных условиях  $\mathbf{p}^*(s) \in \Omega$ ,  $\mathbf{p}^{**}(s) \in \Omega$  и любых  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\leq e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \leq \\ &\leq 2e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \leq 2e^{-b(t-s)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь можно слегка модифицировать подход, предложенный в [19].

Положим

$$\begin{aligned} \beta(t, s) &= \sup_{\|\mathbf{v}\|=1, \sum v_i=0} \|U(t)\mathbf{v}\| = \\ &= \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_k |p_{ik}(t, s) - p_{jk}(t, s)|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| &\leq \beta(t, s)\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + \\ &+ \int_s^t \|\hat{A}(u)\|\beta(u, s) du, \end{aligned}$$

причем

$$\beta(t, s) \leq 1, \quad \beta(t, s) \leq \frac{ce^{-b(t-s)}}{2}, \quad 0 \leq s \leq t,$$

где  $c$  — константа, принимающая в (5) значение 2.

В результате (при произвольном  $c \geq 2$ ) получаем неравенство:

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, & 0 < t < b^{-1} \ln \frac{c}{2}; \\ b^{-1} \left( \ln \frac{c}{2} + 1 - ce^{-b(t-s)} \right) \varepsilon + \\ + \frac{c}{2} e^{-b(t-s)} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, & t \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

Значит, в рассматриваемой ситуации (при  $c = 2$ ) из (6) при всех  $t \geq s$  вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| &\leq b^{-1}(1 - 2e^{-b(t-s)})\varepsilon + \\ &+ e^{-b(t-s)} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, \end{aligned}$$

из которой и следует утверждение теоремы.

**Теорема 2.** Пусть все интенсивности 1-периодичны,  $\xi_i(t) \geq \xi(t)$  при всех  $i \geq 0$  и почти всех  $t \in [0, 1]$ , а  $\int_0^1 \xi(t) dt = \theta > 0$ . Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \theta)}{\theta}.$$

Для доказательства отметим, что теперь вместо (5) справедлива оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 2e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \leq 2e^\theta e^{-\theta(t-s)}$$

и, следовательно, из (6) вытекает при  $t \geq 1$  неравенство

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \\ & \leq \theta^{-1}(\theta + 1 - 2e^\theta e^{-\theta(t-s)})\varepsilon + e^\theta e^{-\theta(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, \end{aligned}$$

а с ним и требуемая оценка.

**Замечание 1.** Отметим, что выписанные в теоремах 1 и 2 оценки устойчивости справедливы, разумеется, и в случае конечного пространства состояний.

### 3 Оценки для среднего

Обозначим через  $E_k(t) = E\{X(t) | X(0) = k\}$  математическое ожидание процесса в момент  $t$  при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии  $k$ , а через  $E_{\mathbf{p}}(t)$  обозначим математическое ожидание процесса в момент  $t$  при начальном распределении вероятностей состояний  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ .

Легко видеть, что тогда  $|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \sum_k k|p_k(t) - \bar{p}_k(t)|$ , а значит, если пространство состояний системы конечно (общее число требований в системе обслуживания не превосходит  $S < \infty$ ), то  $|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq S\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|$ .

А тогда из теорем 1 и 2 сразу вытекают соответствующие оценки устойчивости средних:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{S\varepsilon}{b} \quad (7)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{S\varepsilon(1 + \theta)}{\theta} \quad (8)$$

соответственно.

Основные трудности в этом параграфе связаны с ситуацией, когда количество возможных состояний системы очень велико или бесконечно. В этом

случае оценки (7) и (8) становятся неэффективными.

Для получения оценок устойчивости среднего здесь приходится использовать специальные перенормировки.

Перепишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{B}(t)\mathbf{p} + \mathbf{f}(t) + \hat{B}(t)\mathbf{p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \bar{V}(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{V}(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \bar{V}(t, \tau)\hat{B}(\tau)\mathbf{p}(\tau) d\tau; \\ \bar{\mathbf{p}}(t) &= \bar{V}(t)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{V}(t, \tau)\bar{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и в любой норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \\ & \leq \int_0^t \|\bar{V}(t, \tau)\| \left( \|\hat{B}(\tau)\| \|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\bar{\mathbf{f}}(\tau)\| \right) d\tau. \quad (9) \end{aligned}$$

Будем теперь дополнительно предполагать, что существуют числа  $K, N$  такие, что

$$\begin{aligned} \xi(t) &\leq K < \infty, \quad \sup_i |a_{ii}(t)| \leq K \\ & \text{почти при всех } t \geq 0; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{i+k, i}(t) &= 0 \text{ при всех } k \geq N \\ & \text{и почти при всех } t \geq 0. \quad (11) \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1, а также (10) и (11). Пусть существует возрастающая последовательность положительных чисел  $\{d_i\}$  такая, что (а)  $\inf_{k \geq 1} (d_k/k) = w > 0$ ; (б)  $\sup_k (d_{k+1}/d_k) = m < \infty$ ; (в)  $b - (m^N - 1)K > 0$ . Тогда при любых начальных условиях  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  справедлива следующая оценка устойчивости среднего:

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon(b + K)}{w(b - (m^N - 1)K)(b - (m^N - 1)K - m^N\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Положим  $d_0 = 1$ . Рассмотрим диагональную матрицу

$$D = \text{diag} (d_0, d_1, d_2, \dots)$$

и соответствующее пространство последовательностей  $l_{1D} = \{z = (p_0, p_1, p_2, \dots)^T\}$  таких, что  $\|z\|_{1D} = \|Dz\|_1 < \infty$ . Тогда имеем  $w\|z\|_{1E} = w \sum_k k|p_k| \leq \|z\|_{1D}$ .

Оценим теперь логарифмическую норму  $\gamma(B(t))_{1D}$ :

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &= \gamma(DB(t)D^{-1})_1 = \\ &= \max \left( a_{00}(t) - \xi(t) + \sum_{i \geq 1} \frac{d_i}{d_0} a_{i0}(t), \right. \\ &\left. \sup_{i \geq 1} \left( a_{ii}(t) - \xi_i(t) + \frac{d_0}{d_i} (a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j \neq i, j \geq 1} \frac{d_j}{d_i} a_{ji}(t) \right) \right) \leq \\ &\leq -\xi(t) + (m^N - 1) \sup_i |a_{ii}(t)| \leq \\ &\leq -b + (m^N - 1) K. \end{aligned}$$

Далее

$$\|\hat{B}(t)\|_{1D} = \|D\hat{B}(t)D^{-1}\|_1 \leq m^N \varepsilon.$$

А тогда

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{B}(t))_{1D} &\leq \gamma(B(t))_{1D} + \|\hat{B}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq -b + (m^N - 1) K + m^N \varepsilon. \end{aligned}$$

Оценим теперь

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t)\|_{1D} &\leq \|V(t)\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \\ &+ \int_0^t \|V(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)\|_{1D} d\tau \leq \\ &\leq e^{-(b-(m^N-1)K)t} \|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{K}{b-(m^N-1)K}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $\|\hat{\mathbf{f}}(t)\| \leq \varepsilon$  почти при всех  $t \geq 0$ . Тогда с учетом (9) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1D} &\leq \int_0^t e^{-(b-(m^N-1)K-m^N\varepsilon)(t-\tau)} \times \\ &\times \left( m^N \varepsilon \left( e^{-(b-(m^N-1)K)\tau} \|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. + \frac{K}{b-(m^N-1)K} \right) + \varepsilon) d\tau \leq \\ &\leq o(1) + \frac{\varepsilon(1 + Km^N/(b-(m^N-1)K))}{b-(m^N-1)K - m^N\varepsilon}. \end{aligned}$$

А тогда

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1D} &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon(b+K)}{(b-(m^N-1)K)(b-(m^N-1)K - m^N\varepsilon)}, \end{aligned}$$

откуда и получаем требуемую оценку.

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 2, а также (10) и (11). Пусть существует возрастающая последовательность положительных чисел  $\{d_i\}$  такая, что (а)  $\inf_{k \geq 1} (d_k/k) = w > 0$ ; (б)  $\sup_k (d_{k+1}/d_k) = m < \infty$ ; (в)  $\theta - (m^N - 1)K > 0$ . Тогда при любых начальных условиях  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  справедлива следующая оценка устойчивости среднего:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon e^\theta (\theta + K + Km^N (e^\theta - 1))}{w(\theta - (m^N - 1)K)(\theta - (m^N - 1)K - m^N\varepsilon)}. \end{aligned}$$

## 4 Пример

Рассмотрим здесь простейшую систему обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований с катастрофами. Будем предполагать, что требования поступают группами не более трех одновременно с одинаковыми интенсивностями  $a_{i+k,i}(t) = \lambda(t) = 2 + \sin 2\pi t$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , одновременно обслуживается одно или два требования также с одинаковыми интенсивностями  $a_{i-k,i}(t) = \mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $1 \leq k \leq 2$ , а интенсивность катастрофы при наличии  $k$  требований в системе есть  $\xi_k(t) = 5 + \sin 2\pi kt + \cos 2\pi t$ ,  $k \geq 1$ . Тогда  $\xi(t) = 4 + \cos 2\pi t$ ,  $b = 3$ ,  $\theta = 4$ ,  $K = 13$ . Положим  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Тогда получаем следующие оценки устойчивости:

– по теореме 1

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 0,333 \cdot 10^{-3};$$

– по теореме 2

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 1,25 \cdot 10^{-3}.$$

Далее, для получения оценок устойчивости среднего положим  $d_i = 1,1^i$ , имеем тогда  $K = \sup_{t,i} \xi_i(t) = 7$ ,  $\omega = 0,259$ ,  $m = 1,1$ .

Применяя подход теоремы 3 с учетом структуры инфинитизимальной матрицы процесса, получаем следующие оценки:

– по теореме 3

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| \leq 0,053;$$

– по теореме 4

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| \leq 4,32.$$

Положим

$$\omega_n^1 = \sup_{k \geq n-2} \frac{1}{d_k}; \quad \omega_n^2 = \sup_{k \geq n-2} \frac{k}{d_k}.$$

Рассмотрим семейство «усеченных» процессов  $X_n(t)$  с фазовыми пространствами  $E_n = \{0, 1, \dots, n\}$ , теми же интенсивностями при  $k \leq n$  и матрицами интенсивностей  $A_n(t)$ .

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия теоремы 3 и  $\xi_i(t) \leq B$ , тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\| \leq \frac{3(K+B)\omega_n^1 K t}{b - (m^N - 1)K};$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - E_{\mathbf{p}_n}(t)| \leq \frac{9(K+B)\omega_n^2 K t}{b - (m^N - 1)K}$$

при всех  $t \geq 0$ , любом  $n \geq N$  и начальных условиях  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_n(0) = 0$ .

**Доказательство.** Будем отождествлять векторы  $(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)^T$  и  $(x_1, \dots, x_n)^T$ . Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$U_n (A - A_n) \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (p_{n-2} + p_{n-1} + p_n) \lambda(t) + (p_{n+2} + p_{n+3}) \mu(t) - (\xi_{n+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+1} \\ (p_{n-1} + p_n + p_{n+1}) \lambda(t) + (p_{n+3} + p_{n+4}) \mu(t) - (\xi_{n+2} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix};$$

$$\|U_n (A - A_n) \mathbf{p}\| = \sum_{k \geq 0} |(p_{n+k} + p_{n+k-1} + p_{n+k-2}) \lambda(t) + (p_{n+k+2} + p_{n+k+3}) \mu(t) - (\xi_{n+k+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+k+1}| \leq 3\lambda(t) \sum_{k \geq -2} p_{n+k} + 2\mu(t) \sum_{k \geq 1} p_{n+k} + (K+B) \times \sum_{k \geq 1} p_{n+k} \leq 3(K+B) \sum_{k \geq -2} p_{n+k} \leq 3(K+B)\omega_n^1 \sum_{k \geq -2} d_{n+k} p_{n+k} \leq 3(K+B)\omega_n^1 \|\mathbf{p}(t)\|_{1D};$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_n(t)\mathbf{p} + (A(t) - A_n(t))\mathbf{p},$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = A_n(t)\mathbf{p}_n$$

для усеченного процесса.

Имеем  $\mathbf{p}_n(t) = U_n(t)\mathbf{p}(0)$  при  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_n(0)$  и

$$\mathbf{p}(t) = U_n(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_n(t, \tau) (A(\tau) - A_n(\tau)) \mathbf{p}(\tau) d\tau.$$

Тогда (в любой норме) получаем:

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\| = \left\| \int_0^t U_n(t, \tau) (A(\tau) - A_n(\tau)) \mathbf{p}(\tau) d\tau \right\|.$$

Рассмотрим матрицу Коши:

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{00}^n \dots u_{0n}^n & 0 & 0 & \dots \\ u_{10}^n \dots u_{1n}^n & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n0}^n \dots u_{nn}^n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(A - A_n) \mathbf{p} = (0, \dots, (p_{n-2} + p_{n-1} + p_n) \lambda(t) + (p_{n+2} + p_{n+3}) \mu(t) - (\xi_{n+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+1}, \dots)^T$$

и, следовательно,

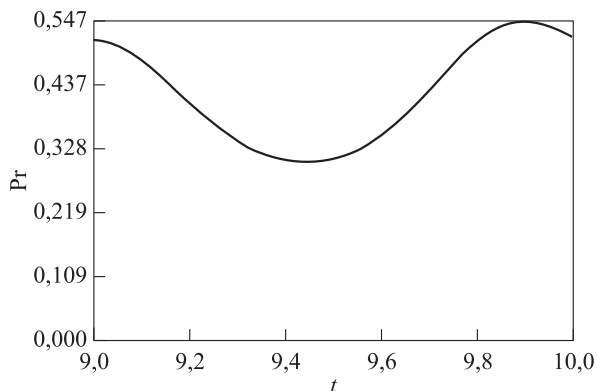


Рис. 1 Вероятность  $Pr \{ \bar{X}(t) = 0 \}$

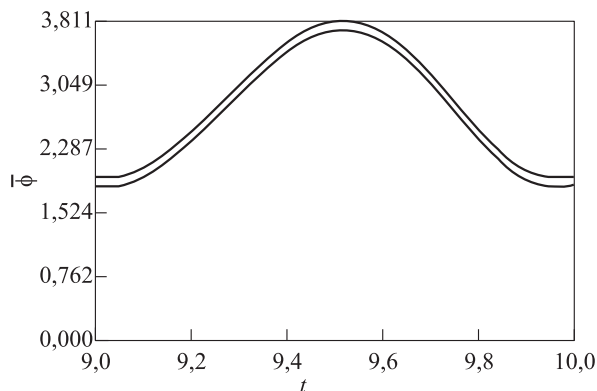


Рис. 2 Предельное среднее  $\bar{\phi}(t)$

$$\begin{aligned} & \|U_n(A - A_n) \mathbf{p}\|_{1E} = \\ & = \sum_{k \geq 0} |(p_{n+k} + p_{n+k-1} + \\ & + p_{n+k-2}) \lambda(t) + (p_{n+k+2} + p_{n+k+3}) \mu(t) - \\ & - (\xi_{n+k+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+k+1}| (n+k+1) \leq \\ & \leq (K+B) \sum_{k \geq n-2} (6k+3) p_k \leq \\ & \leq 9(K+B) \omega_n^2 \sum_{k \geq -2} d_{n+k} p_{n+k} \leq \\ & \leq 9(K+B) \omega_n^2 \|\mathbf{p}(t)\|_{1D}. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекают требуемые оценки.

С учетом оценок скорости сходимости получаем, что для построения с точностью  $\varepsilon$  предельных характеристик исходного процесса достаточно брать  $t \geq 9$ ; а используя теорему 5, находим, что для достижения нужной точности усечения при  $t \leq 10$  достаточно выбрать  $n = 285$ .

На рис. 1 приближенно (с точностью до  $2\varepsilon$ ) построена предельная характеристика  $\bar{p}_0(t)$  — вероятность отсутствия требований в возмущенной системе обслуживания, а на рис. 2 (с той же точностью) — предельное число требований в возмущенной системе обслуживания  $\bar{\phi}(t)$ .

## Литература

1. Dudin A., Nishimura S. A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // J. Appl. Probab., 1999. Vol. 36. P. 868–881.
2. Krishna Kumar B., Arivudainambi D. Transient solution of an M/M/1 queue with catastrophes // Comput. Math. Appl., 2000. Vol. 40. P. 1233–1240.
3. Dudin A., Karolik A. BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Perform. Eval., 2001. Vol. 45. P. 19–32.
4. Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M. On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 329–347.
5. Dudin A., Semenova O. Stable algorithm for stationary distribution calculation for a BMAP/SM/1 queueing system with Markovian input of disasters // J. Appl. Prob., 2004. Vol. 42. No. 2. P. 547–556.
6. Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M. A note on birth–death processes with catastrophes // Statist. Probab. Lett., 2008. Vol. 78. P. 2248–2257.
7. Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V. Some bounds for M(t)/M(t)/S queue with catastrophes // 4th Conference (International) on Performance Evaluation Methodologies and Tools Proceedings (Athens, Greece, October 20–24, 2008). — ACM digital library. DOI:10.4108/ICST.VALUETOOLS2008.4270.
8. Зейфман А. И., Сатин Я. А., Чегодаев А. В. О нестационарных системах обслуживания с катастрофами // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 47–54.
9. Зейфман А. И., Сатин Я. А., Коротышева А. В., Терешина Н. А. О предельных характеристиках системы обслуживания M(t)/M(t)/S с катастрофами // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 16–22.
10. Zeifman A., Satin Ya., Shorgin S., Bening V. On M\_n(t)/M\_n(t)/S queues with catastrophes // 4th Conference (International) on Performance Evaluation Methodologies and Tools Proceedings (Pisa, Italy October 19–23, 2009). — ACM digital library. DOI:10.4108/ICST.VALUETOOLS2009.7442.
11. Zeifman A. I. Stability for continuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math., 1985. Vol. 1155. P. 401–414.



12. *Zeifman A.* Stability of birth and death processes // *J. Math. Sci.*, 1998. Vol. 91. P. 3023–3031.
13. *Андреев Д., Елесин М., Кузнецов А., Крылов Е., Зейфман А.* Эргодичность и устойчивость нестационарных систем обслуживания // *Теория вероятностей и математическая статистика*, 2003. Т. 68. С. 1–11.
14. *Зейфман А. И., Коротышева А. В., Сатин Я. А., Шоргин С. Я.* Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами // *Информатика и её применения*, 2010. Т. 4. Вып. 3. С. 9–15.
15. *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. — М.: Элекс-КМ, 2008.
16. *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // *Queueing Syst.*, 2006. Vol. 52. P. 139–151.
17. *Zeifman A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // *Stoch. Proc. Appl.*, 1995. Vol. 59. P. 157–173.
18. *Van Doorn E. A., Zeifman A. I., Panfilova T. L.* Bounds and asymptotics for the rate of convergence of birth–death processes // *Theor. Prob. Appl.*, 2010. Vol. 54. P. 97–113.
19. *Mitrophanov A. Yu.* Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains // *J. Appl. Prob.*, 2003. Vol. 40. P. 970–979.

# ОБ ОДНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ ИНТЕРНЕТ-ТИПА

М. М. Лери<sup>1</sup>, И. А. Чеплюкова<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются случайные графы Интернет-типа, т. е. графы, степени вершин которых независимы и имеют степенные распределения. С помощью методов имитационного моделирования проведено исследование возможности использования критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона для проверки гипотезы о том, что степени вершин графа одинаково распределены. Построены модели зависимости мощности критерия  $\chi^2$  от объема графа и параметров распределений степеней вершин и даны рекомендации по выбору числа интервалов группирования.

**Ключевые слова:** случайные графы; критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона; имитационное моделирование

## 1 Введение

Быстрое развитие и широкое использование глобальных сетей передачи данных, таких как сети телекоммуникаций, электрические и телефонные сети, а также сети Интернет, за последнее десятилетие привело к появлению множества работ (см., например, [1–4]) как теоретического, так и прикладного характера, направленных на описание структуры и функционирования таких сетей.

Авторами [5] было предложено описание такого рода сетей с помощью случайных графов, степени вершин которых представляют собой независимые случайные величины, общее распределение которых является дискретным аналогом распределения Парето. Такие графы иногда называют Интернет-графами (см., например, [6]).

В работе рассматриваются случайные графы, состоящие из  $N$  основных вершин и одной вспомогательной, занумерованных числами от 0 до  $N$ . Степени основных вершин  $1, 2, \dots, N$  заданы независимыми случайными величинами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ , распределения которых имеют следующий вид:

$$P\{\xi_i \geq k\} = k^{-\tau_i}, \quad i = 1, \dots, N, \\ k = 1, 2, \dots, \quad \tau_i > 0. \quad (1)$$

Для описания структуры графа будем использовать понятие полуребра [3]: ребра, инцидентного некоторой вершине, для которой смежная вершина не определена. Все полуребра графа различны. Для образования ребер графа все полуребра соединяются между собой равновероятно. Ясно, что построенный граф может иметь петли и кратные

ребра. Кроме того, необходимо, чтобы общее число полуребер было четным. Поэтому степень вспомогательной вершины (имеющей номер 0) задается равной 1, если суммарное число полуребер основных вершин нечетно, и 0 — в противном случае.

В [5] был проведен анализ реальных сетей, на основании которого оказалось возможным считать  $\tau_1, \dots, \tau_N$  одинаковыми и принадлежащими интервалу  $(1, 2)$ . В этом случае распределение (1) имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию.

Наряду с теоретическими подходами одним из средств изучения такого рода объектов является имитационное моделирование. В [3, 7] был предложен алгоритм генерации случайных графов, степени вершин которых имеют распределение (1). На основе этого алгоритма была создана [8] имитационная модель случайного графа Интернет-типа и с помощью метода Монте-Карло изучалось поведение некоторых структурных характеристик таких графов при  $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_N = \tau$  для  $\tau \in (1, 2)$ .

Согласно [9], на практике при исследовании реальных сетей редко можно точно утверждать, что имеющиеся данные взяты из распределения Парето. Самое большее, что можно сказать, это то, что выборка согласуется с распределением (1) с параметром  $\tau$ , принадлежащим некоторому интервалу. В частности, в статье [9] рассматривались модели случайных графов, распределение степеней вершин которых имеет вид

$$P\{\xi = k\} = \frac{k^{-\tau}}{\zeta(\tau, k_{\min})}, \quad \tau \in (2, 3), \quad (2)$$

<sup>1</sup>Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, leri@krc.karelia.ru

<sup>2</sup>Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, chia@krc.karelia.ru

где  $k \geq k_{\min}$  — натуральные числа, равные степеням вершин графа,  $k_{\min} \geq 1$  — некоторая заданная нижняя граница значения степени вершины, а  $\zeta(\tau, k_{\min}) = \sum_{j=0}^{\infty} (j + k_{\min})^{-\tau}$  — обобщенная дзета-функция. Авторами [9] был использован подход к исследованию согласования выборки с распределением (2) с помощью критерия согласия Колмогорова–Смирнова, где параметр  $\tau$  оценивался методом максимального правдоподобия.

Данная работа посвящена изучению возможности использования критерия  $\chi^2$  Пирсона для проверки гипотезы о согласии распределения степеней вершин случайного Интернет-графа с распределением (1).

## 2 Выбор числа интервалов

В качестве нулевой гипотезы  $H_0$  будем рассматривать гипотезу о том, что распределение степеней вершин случайного графа Интернет-типа совпадает с распределением (1), где  $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_N = \tau$ . Наряду с нулевой рассматривается сложная альтернативная гипотеза  $H_1$  о том, что выборка либо соответствует закону распределения, отличному от распределения (1), либо не все  $\tau_i$  равны  $\tau$ .

Первая серия вычислительных экспериментов проводилась для случайных графов, распределение степеней вершин которых имело вид (1), где  $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_N = \tau^*$ . Параметр  $\tau^*$  принимал 9 значений из интервала (1, 2) с шагом 0,1, объем графа  $N$  был равен следующим значениям:  $10^3$ ,  $5 \cdot 10^3$ ,  $10^4$ ,  $2,5 \cdot 10^4$ ,  $5 \cdot 10^4$ ,  $7,5 \cdot 10^4$ ,  $10^5$ . Для каждого из значений  $N$  и  $\tau^*$  было сгенерировано по 100 случайных графов. Для каждого графа по критерию  $\chi^2$  Пирсона проверялась нулевая гипотеза  $H_0$  при стандартном уровне значимости, равном 0,05.

Способ разбиения на интервалы состоял в следующем. Первый интервал содержал вершины степени 1, второй — вершины степени 2 и т.д. Если число вершин, попавших в интервал, оказывалось меньше 7, то согласно рекомендациям,

**Таблица 1** Число отвергнутых гипотез при  $\tau = \tau^*$

N	$\tau^*$								
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1 000	7	7	6	5	8	10	11	4	1
5 000	12	13	9	9	3	11	7	5	6
10 000	6	9	11	7	10	8	5	9	7
25 000	9	9	6	6	13	13	5	4	9
50 000	16	10	7	10	9	4	7	3	6
75 000	11	10	11	10	8	9	14	4	7
100 000	15	10	9	8	16	9	5	6	3

**Таблица 2** Число отвергнутых гипотез при  $\tau$ , оцениваемом по выборке

N	$\tau^*$								
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1 000	5	9	7	4	7	9	11	4	4
5 000	13	13	8	9	4	11	6	3	5
10 000	4	8	9	7	10	7	7	9	5
25 000	9	11	6	7	12	15	6	4	7
50 000	16	10	9	11	9	3	7	3	5
75 000	8	11	11	9	10	10	12	5	7
100 000	15	10	10	10	17	7	6	8	4

сформулированным в [10], он объединялся с последующим интервалом.

При проверке гипотезы  $H_0$  было рассмотрено два варианта: первый — значение параметра  $\tau$  задавалось равным  $\tau^*$  и второй —  $\tau$  оценивалось по выборке методом максимального правдоподобия. В табл. 1 и 2 приведены значения числа отвергнутых нулевых гипотез для этих двух рассмотренных вариантов соответственно.

Из приведенных таблиц видно, что число отвергнутых правильных гипотез в среднем равно 8, что не соответствует заданному уровню значимости критерия. Известно (см., например, [10, 11]), что статистические свойства критерия согласия  $\chi^2$  часто зависят от выбора числа интервалов группирования при вычислении статистики  $\chi^2$ , а также от способа разбиения на эти интервалы.

Описанные выше результаты можно объяснить тем, что использованное при вычислении статистики критерия разбиение на интервалы не учитывало особенности структуры рассматриваемых объектов. Оказалось, что специфика исследуемых объектов такова, что от 50% до 70% (в зависимости от параметра  $\tau$ ) всех вершин графа занимают вершины степени 1, вершин степени 2 — от 14% до 16%, вершин степени 3 — от 5% до 8%, вершин степени 4 — от 2% до 4%, вершин степени 5 — от 1% до 3% и т.д., что соответствует распределению (1). На рис. 1 приведены доли вершин, имеющих степени от 1 до 5, для девяти рассматриваемых значений параметра  $\tau$ .

Следовательно, при использовании критерия  $\chi^2$  достаточно использовать небольшое число интервалов группирования.

В табл. 3 и 4 даны результаты экспериментов с разбиением на 3 интервала группирования. В этом случае число отвергнутых правильных гипотез оказалось в среднем равным 5, что согласуется с заданным уровнем значимости критерия. Таким образом, в дальнейшем при вычислении статистики критерия  $\chi^2$  область значений случайной величины, равной степени вершины графа, разбивалась на три интервала.

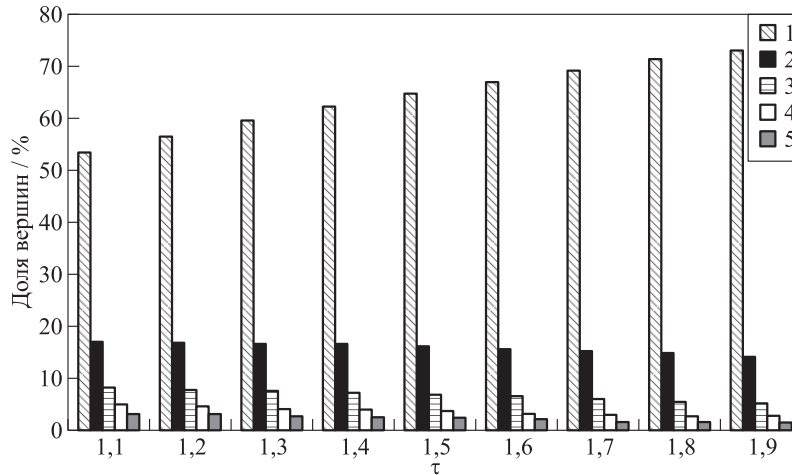


Рис. 1 Доля вершин, имеющих степени от 1 до 5

Таблица 3 Число отвергнутых гипотез при  $\tau = \tau^*$  (разбиение на 3 интервала группирования)

N	$\tau^*$								
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1 000	7	4	5	5	8	9	8	6	6
5 000	7	5	6	7	3	2	6	7	5
10 000	5	5	5	6	5	2	5	7	3
25 000	6	5	2	4	2	6	3	2	3
50 000	6	4	10	7	6	5	4	4	5
75 000	5	8	7	7	5	3	9	2	4
100 000	6	10	6	3	7	1	2	2	8

Таблица 5 Число отвергнутых нулевых гипотез при  $\tau^* = 1,1$

N	$\tau^*$							
	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1 000	48	97	100	100	100	100	100	100
5 000	97	100	100	100	100	100	100	100
10 000	100	100	100	100	100	100	100	100
25 000	100	100	100	100	100	100	100	100
50 000	100	100	100	100	100	100	100	100
75 000	100	100	100	100	100	100	100	100
100 000	100	100	100	100	100	100	100	100

Таблица 4 Число отвергнутых гипотез при  $\tau$ , оцениваемом по выборке (разбиение на 3 интервала группирования)

N	$\tau^*$								
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1 000	11	5	2	2	9	8	8	6	4
5 000	9	3	5	5	4	2	5	4	3
10 000	2	5	3	4	4	3	5	4	5
25 000	7	8	1	6	4	9	4	0	1
50 000	7	2	8	4	6	7	2	5	4
75 000	6	7	7	7	4	5	9	5	6
100 000	6	12	5	0	7	2	5	4	8

Таблица 6 Число отвергнутых нулевых гипотез при  $\tau^* = 1,5$

N	$\tau^*$							
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9
1 000	100	100	80	22	27	75	100	100
5 000	100	100	100	69	89	100	100	100
10 000	100	100	100	94	100	100	100	100
25 000	100	100	100	100	100	100	100	100
50 000	100	100	100	100	100	100	100	100
75 000	100	100	100	100	100	100	100	100
100 000	100	100	100	100	100	100	100	100

### 3 Исследование мощности критерия

Далее было проведено исследование мощности рассматриваемого критерия. В соответствии с описанными выше планами экспериментов были построены случайные графы заданного объема, распределение степеней вершин которых соответствовало распределению (1) с заданным параметром  $\tau^*$ . Для каждого графа проверялись нулевые

гипотезы с параметрами  $\tau$ , отличными от  $\tau^*$ . Доля экспериментов, в которых нулевая гипотеза отвергалась, рассматривалась в качестве оценки значения функции мощности критерия согласия  $\chi^2$  при заданных характеристиках графа  $N$  и  $\tau^*$ .

Таблицы 5–7 содержат примеры результатов проверки с помощью критерия  $\chi^2$  нулевой гипотезы при различных фиксированных  $\tau$ , отличных от  $\tau^*$ , для графов всех заданных объемов с параметрами  $\tau^* = 1,1, 1,5$  и  $1,9$ .

**Таблица 7** Число отвергнутых нулевых гипотез при  $\tau^* = 1,9$

N	$\tau^*$							
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
1 000	100	100	100	100	100	98	56	15
5 000	100	100	100	100	100	100	100	44
10 000	100	100	100	100	100	100	100	78
25 000	100	100	100	100	100	100	100	100
50 000	100	100	100	100	100	100	100	100
75 000	100	100	100	100	100	100	100	100
100 000	100	100	100	100	100	100	100	100

Через  $\mu$  обозначим оценку мощности критерия  $\chi^2$ , а через  $\delta$  — величину, равную  $|\tau - \tau^*|$ . Из табл. 5–7 можно заметить, что при фиксированном  $\delta$  начиная с определенного объема графа для всех рассматриваемых  $\tau^*$  оценка мощности  $\mu$  приближается к 1. Так, при  $\delta = 0,1$  начиная с  $N = 10^4$  оценка мощности близка к 1, а при  $\delta = 0,2$  анало-

гичный результат достигается уже при  $N = 5 \cdot 10^3$ . Для более детального изучения этого вопроса были получены оценки мощности критерия  $\chi^2$  для значений  $\tau$  из интервала  $(\tau^* - 0,1, \tau^* + 0,1)$  с шагом 0,01. Примеры полученных результатов при  $\tau^* = 1,1, 1,5$  и 1,9 приведены в табл. 8–10.

По полученным данным с помощью методов регрессионного анализа была построена следующая модель, оценивающая мощность критерия в зависимости от  $N$  и  $\delta$ :

$$\mu = \begin{cases} 0,12 \ln N + 0,19 \ln \delta + 0,05 & \text{при } 0,01 \leq \delta \leq \min\{0,8; 148,4N^{-0,632}\}; \\ 1 & \text{при } \delta > \min\{0,8; 148,4N^{-0,632}\}. \end{cases}$$

Значимость модели и ее коэффициентов соответствует уровню 0,05, а оценка коэффициента множественной корреляции равна 0,83. На рис. 2 отражены зависимости мощности критерия  $\chi^2$  от  $\delta$  для пяти объемов Интернет-графов.

**Таблица 8** Число отвергнутых нулевых гипотез при  $\tau^* = 1,1$

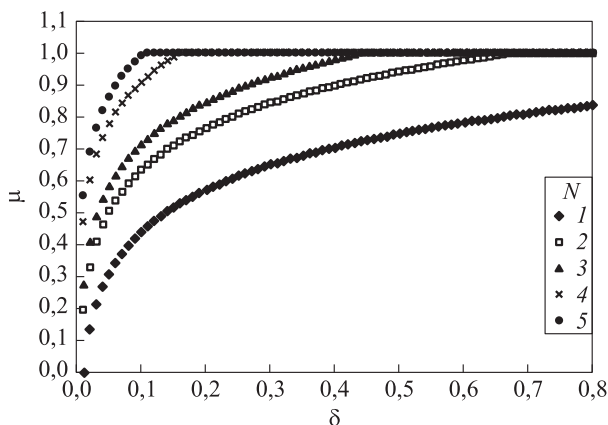
N	$\tau \neq \tau^*$																	
	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19
1 000	49	42	35	27	22	15	10	9	9	8	8	12	17	23	29	35	44	52
5 000	100	97	92	78	62	52	36	21	11	11	21	38	51	62	71	88	94	100
10 000	100	100	100	98	95	78	52	18	9	9	23	47	76	91	98	100	100	100
25 000	100	100	100	100	100	100	88	47	16	20	61	90	99	100	100	100	100	100
50 000	100	100	100	100	100	100	100	87	35	30	83	100	100	100	100	100	100	100
75 000	100	100	100	100	100	100	100	97	41	51	98	100	100	100	100	100	100	100
100 000	100	100	100	100	100	100	100	98	63	51	100	100	100	100	100	100	100	100

**Таблица 9** Число отвергнутых нулевых гипотез при  $\tau^* = 1,5$

N	$\tau \neq \tau^*$																	
	1,41	1,42	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59
1 000	38	35	26	19	15	10	6	6	7	8	8	6	6	8	9	16	22	27
5 000	93	83	75	65	51	34	20	9	3	6	10	19	25	38	55	65	80	92
10 000	100	99	94	81	67	51	27	13	4	14	24	40	56	76	89	96	99	100
25 000	100	100	100	100	100	96	67	33	8	9	36	73	95	100	100	100	100	100
50 000	100	100	100	100	100	98	97	64	18	16	64	94	100	100	100	100	100	100
75 000	100	100	100	100	100	100	99	83	30	26	79	100	100	100	100	100	100	100
100 000	100	100	100	100	100	100	100	90	35	40	96	100	100	100	100	100	100	100

**Таблица 10** Число отвергнутых нулевых гипотез при  $\tau^* = 1,9$

N	$\tau \neq \tau^*$																	
	1,81	1,82	1,83	1,84	1,85	1,86	1,87	1,88	1,89	1,91	1,92	1,93	1,94	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99
1 000	21	18	13	12	10	7	5	5	5	5	5	5	7	6	9	11	12	12
5 000	73	62	49	40	26	21	8	5	5	4	5	8	16	32	43	51	68	82
10 000	95	89	80	62	46	34	16	10	4	10	22	27	45	60	76	89	95	97
25 000	100	100	100	98	89	69	44	16	2	9	26	51	81	94	99	100	100	100
50 000	100	100	100	100	100	98	81	37	11	13	43	82	95	100	100	100	100	100
75 000	100	100	100	100	100	100	95	69	18	18	64	95	100	100	100	100	100	100
100 000	100	100	100	100	100	100	98	78	27	21	75	98	100	100	100	100	100	100



**Рис. 2** График зависимости мощности критерия от  $\delta$  при разных объемах графа  $N$ : 1 – 1 000; 2 – 5 000; 3 – 10 000; 4 – 50 000; 5 – 100 000

Таким образом, ясно, что мощность критерия возрастает как с ростом объема графа, так и с увеличением значения  $\delta$ . Это означает, что при использовании критерия  $\chi^2$  для проверки нулевой гипотезы при объемах графа  $N \geq 10^4$  и при отклонении значения  $\tau$  от  $\tau^*$  более чем на 0,09 мощность критерия будет не менее 0,7.

Во второй серии вычислительных экспериментов рассматривались случайные графы, состоящие из двух типов вершин, распределения которых имеют вид (1) с параметрами  $\tau_1^*$  и  $\tau_2^*$  соответственно. Здесь и далее будем полагать, что  $\tau_1^* < \tau_2^*$ . Через  $p_1$  и  $p_2$  обозначим доли вершин, распределения которых имеют параметры  $\tau_1^*$  и  $\tau_2^*$  соответственно. Также обозначим  $\delta^* = |\tau_1^* - \tau_2^*|$ .

План эксперимента состоял в следующем. Пары  $(p_1, p_2)$  принимали значения (50%, 50%), (20%, 80%), (80%, 20%), (2%, 98%), (98%, 2%). Для

каждого из восьми значений  $\delta^* \in [0,1, 0,8]$ , взятых с шагом 0,1, параметры распределения степеней вершин  $\tau_1^*$  и  $\tau_2^*$  принимали по 3 пары значений из интервала (1, 2) (например, для  $\delta^* = 0,1$  пары  $(\tau_1^*, \tau_2^*)$  принимали значения (1,1, 1,2), (1,4, 1,5), (1,8, 1,9)). Рассматривались графы следующих объемов  $N$ :  $5 \cdot 10^3, 10^4, 5 \cdot 10^4, 10^5$ . С целью получения статистических данных для каждого значения  $N$  и каждой пары  $(\tau_1^*, \tau_2^*)$  было сгенерировано по 100 случайных графов.

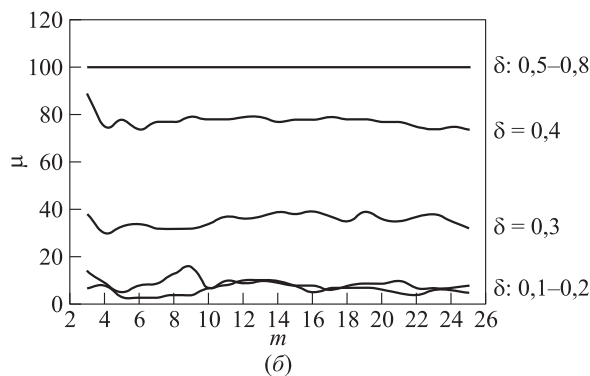
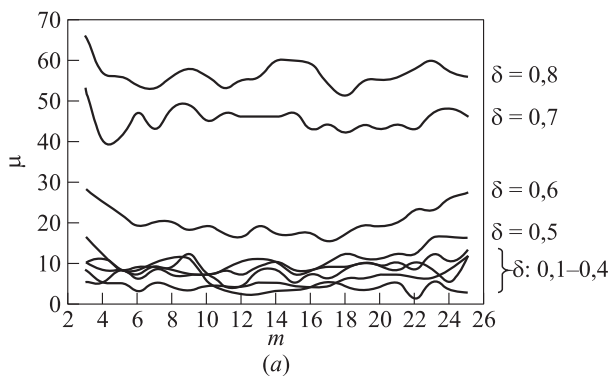
Учитывая свойства критерия  $\chi^2$ , рассмотрим зависимость функции мощности критерия от числа интервалов группирования. Для каждого графа проверялась нулевая гипотеза для разного числа интервалов  $m$  (от 3 до 25) и в каждом случае подсчитывалась доля экспериментов, в которых нулевая гипотеза отвергалась.

На рис. 3 приведены примеры графиков экспериментальных значений оценок мощности  $\mu$  в зависимости от числа интервалов группирования  $m$  и всех рассмотренных значений  $\delta^*$  для пары  $(p_1, p_2) = (50\%, 50\%)$  при  $N = 5 000$  и  $N = 100 000$ .

На рис. 4 приведены аналогичные результаты для пары  $(p_1, p_2) = (80\%, 20\%)$ .

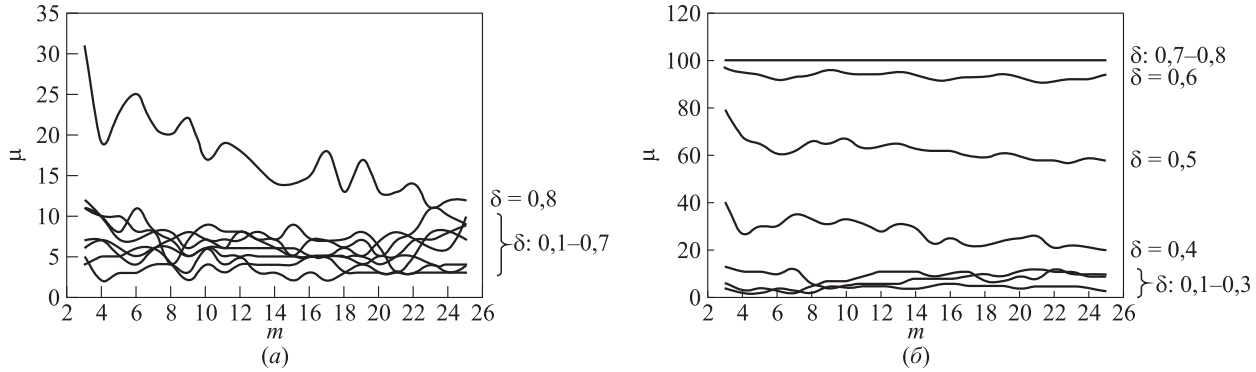
Результаты экспериментов показали, что с ростом числа интервалов значения оценок мощности критерия не превосходят оценки мощности при  $m = 3$ . Поэтому можно сделать вывод, что и в этом случае при проверке гипотезы согласия распределения степеней вершин случайных графов Интернет-типа со степенным законом распределения по критерию  $\chi^2$  достаточно использовать три интервала группирования.

Были построены регрессионные модели зависимости функции мощности  $\mu$  критерия  $\chi^2$  при проверке нулевой гипотезы от объема графа  $N$  и значения  $\delta^*$  для всех рассмотренных пар  $(p_1, p_2)$ :



**Рис. 3** Графики зависимости мощности критерия от числа интервалов при  $(p_1, p_2) = (50\%, 50\%)$ : (а)  $N = 5 000$ ; (б)  $N = 100 000$





**Рис. 4** График зависимости мощности критерия от числа интервалов при  $(p_1, p_2) = (80\%, 20\%)$ : (а)  $N = 5000$ ; (б)  $N = 100000$

–  $(p_1, p_2) = (50\%, 50\%)$ :

$$\ln \mu = \begin{cases} 0,33 \ln N + 1,3 \ln \delta^* - 3,24 \\ \text{при } 0,1 < \delta^* < \min\{0,8; 12,06N^{-0,25}\}; \\ 0 \text{ при } \delta^* \geq \min\{0,8; 12,06N^{-0,25}\}; \end{cases}$$

–  $(p_1, p_2) = (20\%, 80\%)$ :

$$\ln \mu = \begin{cases} 0,37 \ln N + 3,84\delta^* - 6,74 \\ \text{при } 0,1 < \delta^* < \min\{0,8; 1,76 - 0,1 \ln N\}; \\ 0 \text{ при } \delta^* \geq \min\{0,8; 1,76 - 0,1 \ln N\}; \end{cases}$$

–  $(p_1, p_2) = (80\%, 20\%)$ :

$$\ln \mu = \begin{cases} 0,42 \ln N + 2,83\delta^* - 7,13 \\ \text{при } 0,1 < \delta^* < \min\{0,8; 2,52 - 0,15 \ln N\}; \\ 0 \text{ при } \delta^* \geq \min\{0,8; 2,52 - 0,15 \ln N\}; \end{cases}$$

–  $(p_1, p_2) = (2\%, 98\%)$ :

$$\sqrt{\mu} = 0,04 \ln N - 0,44\delta^* + 0,72(\delta^*)^2 - 0,1 \quad \text{при } 0,1 < \delta^* < 0,8;$$

–  $(p_1, p_2) = (98\%, 2\%)$ :

$$\sqrt{\mu} = 0,02 \ln N + 0,1(\delta^*)^2 + 0,1 \quad \text{при } 0,1 < \delta^* < 0,8.$$

Оценки коэффициентов множественной корреляции полученных моделей равны соответственно 0,91, 0,91, 0,9, 0,71 и 0,5, и соответствуют уровню значимости 0,05.

## 4 Заключение

Анализируя полученные данные, несложно заметить, что хотя мощность критерия в целом увеличивается как с ростом объема графа, так и с увеличением  $\delta^*$ , однако значение оценки мощности при небольших  $N$  мало.

Следует отметить, что в случае, когда величины  $p_1$  и  $p_2$  принимали значения 50% и 50%, оценка мощности критерия с ростом объема графа возрастала быстрее, чем в случае  $(p_1, p_2) = (20\%, 80\%)$ .

При  $(p_1, p_2) = (80\%, 20\%)$  увеличение эмпирических значений функции мощности происходит медленнее, чем в случае  $(20\%, 80\%)$ . Очевидно, что данный факт связан с долей содержания в графе вершин второго типа: эксперименты показали, что чем больше граф содержит вершин с большим значением параметра, тем мощность критерия выше. Это также подтверждается и для пар  $(p_1, p_2) = (2\%, 98\%)$  и  $(p_1, p_2) = (98\%, 2\%)$ , хотя в этих случаях оценка мощности рассматриваемого критерия не превышает соответственно 0,16 и 0,23.

Таким образом, чем меньше разница между долями вершин разных типов, тем оценка мощности критерия  $\chi^2$  выше. Кроме того, мощность критерия увеличивается как с ростом разности между истинным (неизвестным) значением параметра распределения (1) и проверяемым значением  $\tau$ , так и с увеличением объема графа.

Заметим, что если нулевая гипотеза не отвергается, то это не исключает того, что граф может содержать вершины разных типов, но доля вершин одного из них незначительна.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы. При проверке гипотезы о согласии распределения степеней вершин случайного Интернет-графа с распределением (1)

по критерию  $\chi^2$  достаточно разбивать область значений рассматриваемой случайной величины на три интервала группирования. Для обеспечения достаточно высокой мощности критерия желательно также, чтобы рассматриваемый граф содержал не менее 10000 вершин. При проверке нулевой гипотезы на графах меньшего объема необходимо учитывать полученную выше зависимость функции мощности от объема графа.

## Литература

1. *Aiello W., Chung F., Lu L.* A random graph model for massive graphs // 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing Proceedings. — New York: ACM, 2000. P. 171–180.
2. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. J.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // *Phys. Rev. E*, 2001. Vol. 64. P. 026118-1–026118-17.
3. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*, 2004. Vol. 55. P. 3–23.
4. *Durrett R.* Random graph dynamics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
5. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the Internet topology // *Computer Communications Rev.*, 1999. Vol. 29. P. 251–262.
6. *Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // *Дискретная математика*, 2007. Т. 19. Вып. 3. С. 22–34.
7. *Tangmunarunkit H., Govindan R., Jamin S., Shenker S., Willinger W.* Network topology generators: Degree-based vs. structural // *SIGCOMM'02 Proceedings*. — Pittsburgh, USA, 2002. P. 147–159.
8. *Лери М. М.* Моделирование случайных графов Интернет-типа // *Обзорные прикладной и промышленной математики*, 2009. Т. 16. Вып. 5. С. 737–744.
9. *Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. E. J.* Power-law distributions in empirical data // *SIAM Rev.*, 2009. Vol. 51. No. 4. P. 661–703.
10. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика. Т. 1: Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
11. *Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа  $\chi^2$  // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2003. Т. 69. С. 61–67.

# СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ, БУНКЕРОМ ДЛЯ ВЫТЕСНЕННЫХ ЗАЯВОК И РАЗЛИЧНЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ\*

Р. В. Разумчик<sup>1</sup>

**Аннотация:** Рассмотрена система массового обслуживания (СМО), в которую поступают пуассоновские потоки положительных и отрицательных заявок. Для положительных заявок имеется накопитель неограниченной емкости. Отрицательная заявка, поступающая в систему, выбивает положительную заявку из очереди в накопителе и перемещает ее в другой накопитель неограниченной емкости (бункер). Если накопитель пуст, отрицательная заявка покидает систему, не оказывая на нее никакого воздействия. После окончания обслуживания очередной заявки на прибор поступает заявка из накопителя или, если накопитель пуст, из бункера. Длительности обслуживания заявок из накопителя и бункера имеют экспоненциальные распределения с различными параметрами. Получены соотношения, позволяющие вычислять стационарные распределения очередей в накопителе и бункере.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; отрицательные заявки; бункер; различные интенсивности обслуживания

## 1 Введение

В настоящее время изучению систем и сетей массового обслуживания с отрицательными заявками по-прежнему уделяется значительное внимание. Об этом свидетельствует большое число работ в данной области, которые публикуются каждый год. Подробный обзор публикаций до 2003 г. приведен в [1]. Среди недавних работ можно отметить [2–9]. В настоящей статье, которая является продолжением работы [10], рассматривается другой, отличный от классического, вид отрицательных заявок. Поступающие отрицательные заявки не разрушают заявки, ожидающие в очереди, а перемещают их в дополнительную очередь, откуда те обслуживаются с относительным приоритетом.

Рассмотрим однолинейную СМО, в которую поступает пуассоновский поток заявок интенсивности  $\lambda$ . Заявки этого потока, как и в [10], будем называть положительными. Для положительных заявок имеется накопитель неограниченной емкости.

Помимо положительных заявок в систему поступает пуассоновский поток отрицательных заявок интенсивности  $\lambda^-$ . Отрицательная заявка, поступающая в систему, вытесняет одну (положительную) заявку из конца очереди в накопителе и перемещает ее в накопитель для вытесненных заявок или бункер, который также имеет неограниченную емкость.

Если в момент поступления отрицательной заявки в накопителе нет положительных заявок, а на приборе обслуживается заявка, то отрицательная заявка, не прерывая обслуживания на приборе, покидает систему, не оказывая на нее никакого воздействия. То же самое происходит и в случае, когда в момент поступления отрицательной заявки накопитель и обслуживающий прибор пусты.

Выбор заявок на обслуживание производится следующим образом. После окончания обслуживания очередной заявки на прибор становится заявка из накопителя. Если же накопитель пуст, на прибор поступает заявка из бункера. Обслуживание заявок не прерывается новыми как положительными, так и отрицательными заявками.

Длительности обслуживания заявок из накопителя имеют экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_1$ , а из бункера — экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_2$ .

## 2 Система уравнений равновесия

Обозначим через  $\nu(t)$  число заявок, находящихся в накопителе в момент времени  $t$ , через  $\eta(t)$  — число заявок в бункере, а через  $\psi(t)$  — тип заявки, которую обслуживает прибор в момент  $t$ . Положим  $X(t) = (\nu(t), \eta(t), \psi(t))$ . Случайный процесс  $\{X(t), t \geq 0\}$ , описывающий стохастическое поведение рассматриваемой СМО во времени,

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-00112).

<sup>1</sup> Институт проблем информатики Российской академии наук, rrazumchik@iee.org

является марковским процессом с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Множество состояний процесса  $\{X(t), t \geq 0\}$  имеет вид  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1$ , где  $\mathcal{X}_0 = \{0\}$ ,  $\mathcal{X}_1 = \{(i, j, k), i \geq 0, j \geq 0, k = \overline{0, 1}\}$ . Состояние (0) соответствует полностью свободной системе; состояние  $(i, j, k)$  означает, что в момент времени  $t$  в накопителе находится  $i$  заявок, в бункере ожидают  $j$  заявок, вытесненных из накопителя, и на приборе обслуживается заявка либо из накопителя (при  $k = 0$ ), либо из бункера (при  $k = 1$ ).

Обозначим через  $p_{i,j,k}$  стационарную вероятность состояния  $(i, j, k)$ , а через  $p_0$  — стационарную вероятность состояния (0). При некотором условии, о котором будет сказано позже, стационарное распределение существует и удовлетворяет следующей системе уравнений равновесия:

$$\lambda p_0 = \mu_1 p_{0,0,0} + \mu_2 p_{0,0,1}; \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu_1) p_{0,0,0} = \lambda p_0 + \mu_1 p_{1,0,0} + \mu_2 p_{1,0,1}; \quad (2)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \lambda^-) p_{i,0,0} = \lambda p_{i-1,0,0} + \mu_1 p_{i+1,0,0} + \mu_2 p_{i+1,0,1}; \quad i \geq 1, \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu_1) p_{0,j,0} = \lambda^- p_{1,j-1,0} + \mu_1 p_{1,j,0} + \mu_2 p_{1,j,1}, \quad j \geq 1; \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \lambda^-) p_{i,j,0} = \lambda p_{i-1,j,0} + \lambda^- p_{i+1,j-1,0} + \mu_1 p_{i+1,j,0} + \mu_2 p_{i+1,j,1}, \quad i \geq 1, j \geq 1; \quad (5)$$

$$(\lambda + \mu_2) p_{0,0,1} = \mu_1 p_{0,1,0} + \mu_2 p_{0,1,1}; \quad (6)$$

$$(\lambda + \mu_2 + \lambda^-) p_{i,0,1} = \lambda p_{i-1,0,1}, \quad i \geq 1; \quad (7)$$

$$(\lambda + \mu_2) p_{0,j,1} = \lambda^- p_{1,j-1,1} + \mu_1 p_{0,j+1,0} + \mu_2 p_{0,j+1,1}, \quad j \geq 1; \quad (8)$$

$$(\lambda + \mu_2 + \lambda^-) p_{i,j,1} = \lambda^- p_{i+1,j-1,1} + \lambda p_{i-1,j,1}, \quad i \geq 1, j \geq 1. \quad (9)$$

К этим уравнениям необходимо добавить условие нормировки

$$p_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^1 p_{i,j,k} = 1. \quad (10)$$

### 3 Совместное распределение числа заявок в накопителе и бункере

Найдем совместное стационарное распределение числа заявок в накопителе и бункере. Для этого введем две производящие функции (ПФ):

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j,0} u^i v^j,$$

$$N(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j,1} u^i v^j, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Сначала найдем выражение для  $N(u, v)$ . Умножая уравнения (6)–(9) на  $u^i$  и  $v^j$  и суммируя по всем значениям  $i = 0, 1, \dots$  и  $j = 0, 1, \dots$ , после элементарных выкладок получаем:

$$N(u, v) = ((\lambda^- v^2 - \lambda^- uv - \mu_2 u) S_1(v) - \mu_1 u S_0(v) + \lambda u p_0) / (\lambda u^2 v - (\lambda + \mu_2 + \lambda^-) uv + \lambda^- v^2), \quad (11)$$

где

$$S_0(v) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j,0} v^j; \quad S_1(v) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j,1} v^j.$$

Знаменатель в выражении (11) представляет собой квадратный трехчлен по  $u$ , корни которого имеют вид:

$$u_{1,2} = u_{1,2}(v) = \frac{\lambda + \mu_2 + \lambda^- \pm \sqrt{(\lambda + \mu_2 + \lambda^-)^2 - 4\lambda\lambda^- v}}{2\lambda},$$

причем  $0 < u_2 < 1 < u_1$  при  $0 < v \leq 1$ . Поскольку ПФ  $N(u, v)$  является непрерывной функцией в области  $\{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ , то в точке  $(u_2, v)$  вместе со знаменателем должен обращаться в нуль и числитель. Отсюда приходим к равенству

$$(\lambda^- v^2 - \lambda^- u_2 v - \mu_2 u_2) S_1(v) - \mu_1 u_2 S_0(v) + \lambda u_2 p_0 = 0. \quad (12)$$

Для нахождения выражения для  $P(u, v)$  умножим уравнения (2)–(5) на  $u^i$  и  $v^j$  и просуммируем по всем значениям  $i = 0, 1, \dots$  и  $j = 0, 1, \dots$ . В итоге получаем:

$$P(u, v) = ((\lambda^- v + \mu_1 - \lambda^- u) S_0(v) - \mu_2 N(u, v) + \mu_2 S_1(v) - \lambda u p_0) / (\lambda u^2 - (\lambda + \mu_1 + \lambda^-) u + \mu_1 + \lambda^- v). \quad (13)$$

Корни квадратного трехчлена по  $u$  в знаменателе (13) имеют вид:

$$u_{3,4} = u_{3,4}(v) = \frac{\lambda + \mu_1 + \lambda^- \pm \sqrt{(\lambda + \mu_1 + \lambda^-)^2 - 4\lambda(\mu_1 + \lambda^- v)}}{2\lambda},$$

причем  $0 < u_4 < 1 < u_3$  при  $0 \leq v < 1$ . Поскольку ПФ  $P(u, v)$  является непрерывной функцией в области  $\{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ , то в точке  $(u_4, v)$  вместе со знаменателем должен обращаться в нуль и числитель, т. е.

$$(\lambda^- v + \mu_1 - \lambda^- u_4)S_0(v) - \mu_2 N(u_4, v) + \mu_2 S_1(v) - \lambda u_4 p_0 = 0.$$

Подставляя в последнее равенство вид  $N(u_4, v)$  из (11), после арифметических преобразований получаем:

$$\begin{aligned} & \mu_2(\lambda v u_4 - (\lambda + \mu_2)v + \mu_2)S_1(v) - \\ & - \lambda p_0(\lambda v(u_4 - u_2)(u_4 - u_1) + \mu_2) - \\ & - (\lambda v(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)(\lambda^- - \lambda u_3) - \\ & - \mu_1 \mu_2)S_0(v) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Напомним, что здесь  $u_i = u_i(v)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Решая систему из двух уравнений (12) и (14), находим выражения для  $S_0(v)$  и  $S_1(v)$  с точностью до вероятности  $p_0$ :

$$\begin{aligned} S_0(v) = & \lambda p_0 (\mu_2 u_2 (\mu_2 + (\lambda u_4 - \lambda - \mu_2)v) - \\ & - (\mu_2 + \lambda v(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)) (\lambda^- v(u_2 - v) + \\ & + \mu_2 u_2)) ((\lambda v(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)(\lambda^- - \lambda u_3) - \\ & - \mu_1 \mu_2) (\lambda^- v(u_2 - v) + \mu_2 u_2) + \\ & + \mu_1 \mu_2 u_2 (\mu_2 + (\lambda u_4 - \lambda - \mu_2)v))^{-1}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} S_1(v) = & \frac{\mu_1 u_2}{\lambda^- v^2 - \lambda^- u_2 v - \mu_2 u_2} S_0(v) - \\ & - \frac{\lambda u_2}{\lambda^- v^2 - \lambda^- u_2 v - \mu_2 u_2} p_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя выражения для  $S_0(v)$  и  $S_1(v)$  в (11) и (13), получаем выражения для ПФ  $N(u, v)$  и  $P(u, v)$  с точностью до вероятности  $p_0$ , которая будет определена далее.

Для нахождения вероятности  $p_0$  сделаем ряд предварительных выкладок. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{n,0} &= \sum_{i+j=n-1} p_{i,j,0}, \quad n \geq 1; \\ \tilde{p}_{n,1} &= \sum_{i+j=n-1} p_{i,j,1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что вероятность  $\tilde{p}_{n,0}$  ( $\tilde{p}_{n,1}$ ) обозначает вероятность того, что общее число заявок в системе равно  $n$  и на приборе обслуживается заявка из накопителя (бункера). Суммируя последовательно для каждого  $n = 1, 2, \dots$  соответствующие уравнения

системы уравнений равновесия при  $i + j = n - 1$ , приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu_1 \tilde{p}_{1,0} + \mu_2 \tilde{p}_{1,1}, \quad n = 0; \\ \lambda(\tilde{p}_{n,0} + \tilde{p}_{n,1}) &= \\ &= \mu_1 \tilde{p}_{n+1,0} + \mu_2 \tilde{p}_{n+1,1}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если теперь просуммировать все уравнения (17), получается

$$\lambda = \mu_1 \tilde{p}_{\cdot,0} + \mu_2 \tilde{p}_{\cdot,1},$$

которое с учетом того, что  $\tilde{p}_{\cdot,0} = p_{\cdot,\cdot,0}$  и  $\tilde{p}_{\cdot,1} = p_{\cdot,\cdot,1}$ , примет вид:

$$\lambda = \mu_1 p_{\cdot,\cdot,0} + \mu_2 p_{\cdot,\cdot,1}, \quad (18)$$

где символ « $\cdot$ » обозначает суммирование по всем значениям дискретного аргумента.

Это равенство свидетельствует о том, что, как и должно быть, в стационарном режиме среднее число заявок, принятых в систему за единицу времени, равно среднему числу заявок, обслуженных системой в единицу времени.

Заметим, что для системы  $M|H_2|1|_\infty$  равенство, связывающее интенсивность принятого в систему потока и интенсивность обслуженного потока полностью повторяет равенство (18) (см., например, [11, с. 176]). Отличие состоит только в том, что для системы  $M|H_2|1|_\infty$  в равенстве, аналогичном (18), вместо вероятностей того, что прибор занят обслуживанием заявки из накопителя и из бункера, стоят вероятности того, что прибор обслуживает заявку на первой и на второй фазе прибора. Отсюда следует, что соответствующие вероятности совпадают.

Более того, для рассматриваемой системы и для системы  $M|H_2|1|_\infty$  совпадают вероятности простоя, поскольку равенство (18) с помощью условия нормировки (10) приводится к виду:

$$\lambda = \mu_1(1 - p_0) + (\mu_2 - \mu_1)p_{\cdot,\cdot,1}. \quad (19)$$

Таким образом, вероятность простоя  $p_0$  для рассматриваемой системы находится по той же формуле, что и вероятность простоя для СМО  $M|H_2|1|_\infty$ , т. е.

$$p_0 = 1 - \beta_1 \frac{\lambda}{\mu_1} - \beta_2 \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad (20)$$

где  $\beta_1$  — вероятность того, что прибор занят обслуживанием заявки из накопителя, а  $\beta_2 = 1 - \beta_1$  — вероятность того, что прибор занят обслуживанием заявки из бункера.

Покажем, как найти эти вероятности. Вероятность  $\beta_2$  совпадает с вероятностью того, что поступившая в систему заявка будет перемещена в бункер. Поступающая с интенсивностью  $\lambda^-$  отрицательная заявка «убивает» заявку в накопителе,

если он не пуст, что происходит с вероятностью  $(1 - p_0 - p_{0,\cdot,0} - p_{0,\cdot,1})$ . Учитывая, что в единицу времени в систему поступает  $\lambda$  заявок, имеем

$$\beta_2 = \frac{\lambda^-(1 - p_0 - p_{0,\cdot,0} - p_{0,\cdot,1})}{\lambda}.$$

Подставляя в (20) выражение для  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , получаем

$$p_0 \left( 1 + \frac{\lambda^-}{\mu_1} - \frac{\lambda^-}{\mu_2} \right) = 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^-(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1\mu_2} (1 - p_{0,\cdot,0} - p_{0,\cdot,1}). \quad (21)$$

Система из четырех уравнений: (11) при  $u = v = 1$ , (16) при  $v = 1$ , (19) и (21) — является невырожденной, и ее решение имеет вид

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} + \lambda^2 \lambda^- (\mu_2 - \mu_1) \left/ \left( \mu_1^2 \mu_2 \left( (\mu_2 - \mu_1) \frac{u_2(1)}{(u_2(1) - 1)} + \lambda^- \right) + \mu_1 (\mu_1^2 \mu_2 + \lambda^- (\mu_2 - \mu_1) (\mu_1 + \lambda)) \right) \right.;$$

$$p_{0,\cdot,0} = \frac{1}{\lambda^- (\mu_2 - \mu_1) (\lambda^- - (\mu_2 - \mu_1 + \lambda^-) u_2(1))} \times (p_0 \lambda^- (\mu_2 - \mu_1) ((\mu_2 + \lambda + \lambda^-) u_2(1) - \lambda^-) + (\lambda^- u_2(1) + \mu_2 u_2(1) - \lambda^-) (p_0 \mu_1 \mu_2 + \lambda \mu_2 - \mu_1 \mu_2 - \lambda^- (\mu_2 - \mu_1))) ;$$

$$p_{0,\cdot,1} = \frac{\mu_1 u_2(1)}{\lambda^- - \lambda^- u_2(1) - \mu_2 u_2(1)} p_{0,\cdot,0} - \frac{\lambda u_2(1)}{\lambda^- - \lambda^- u_2(1) - \mu_2 u_2(1)} p_0,$$

$$p_{\cdot,\cdot,1} = p_{0,\cdot,1} + \frac{\mu_1}{\mu_2} p_{0,\cdot,0} - \frac{\lambda}{\mu_2} p_0.$$

Нетрудно видеть, что если  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , т.е. имеет место одинаковая интенсивность обслуживания заявок как из накопителя, так и из бункера, то вероятность простоя  $p_0 = 1 - \lambda/\mu$ , что совпадает с вероятностью простоя в системе из [10].

Зная вероятность  $p_0$ , можно выписать алгоритм расчета совместного стационарного распределения  $p_{i,j,k}$ :

— сначала находится вероятность  $p_{0,0,0}$  по формуле, которая следует из (15) при  $v = 0$ :

$$p_{0,0,0} = \left( \lambda p_0 \left( u_2'(0) [\lambda u_4(0)(1 - u_4(0) + u_1(0)) - \lambda - \mu_2 - \lambda^-] + \lambda^- \right) \right) / \left( u_2'(0) [\lambda u_4(0)(u_4(0) - \right.$$

$$\left. - u_1(0)) (\lambda^- - \lambda u_3(0)) + \mu_1 (\lambda u_4(0) - \lambda - \mu_2 - \lambda^-) \right] + \mu_1 \lambda^- \Big);$$

— затем, используя (1), находится вероятность  $p_{0,0,1}$ :

$$p_{0,0,1} = \frac{\lambda p_0 - \mu_1 p_{0,0,0}}{\mu_2};$$

— далее из (7) находятся вероятности  $p_{i,0,1}$ ,  $i \geq 1$ :

$$p_{i,0,1} = \delta^i p_{0,0,1}; \quad \delta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_2 + \lambda^-};$$

— используя (1), (2) и (7), находится вероятность  $p_{1,0,0}$ :

$$p_{1,0,0} = \frac{\lambda p_{0,0,0} - \mu_2 (1 + \delta) p_{0,0,1}}{\mu_1};$$

— из (2) вычисляются вероятности  $p_{i,0,0}$ ,  $i \geq 2$ :

$$p_{i,0,0} = \left( \frac{\lambda + \mu_1 + \lambda^-}{\mu_1} \right) p_{i-1,0,0} - \frac{\lambda}{\mu_1} p_{i-2,0,0} - \frac{\mu_2 \delta^i p_{0,0,1}}{\mu_1};$$

— далее из (15) и (16) находятся вероятности  $p_{0,j,0}$ ,  $j \geq 1$ , и  $p_{0,j,1}$ ,  $j \geq 1$ , по формулам:

$$p_{0,j,0} = \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j S_0(v)}{dv^j} \right|_{v=0};$$

$$p_{0,j,1} = \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j S_1(v)}{dv^j} \right|_{v=0};$$

— затем из (9) последовательно для каждого  $j = 1, 2, \dots$  вычисляются вероятности  $p_{i,j,1}$ ,  $i \geq 1$ :

$$p_{i,j,1} = \frac{\lambda^-}{\lambda + \mu_2 + \lambda^-} p_{i+1,j-1,1} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu_2 + \lambda^-)} p_{i-1,j,1};$$

— из (2) находятся вероятности  $p_{1,j,0}$ ,  $j \geq 1$ :

$$p_{1,j,0} = \frac{\lambda + \mu_1}{\mu_1} p_{0,j,0} - \frac{\lambda^-}{\mu_1} p_{1,j-1,0} - \frac{\mu_2}{\mu_1} p_{1,j,1};$$

— последними, из (5), последовательно для каждого  $j = 1, 2, \dots$  находятся вероятности  $p_{i,j,0}$ ,  $i \geq 2$ :

$$p_{i,j,0} = \left( (\lambda + \mu_1 + \lambda^-) p_{i-1,j,0} - \lambda p_{i-2,j,0} - \lambda^- p_{i,j-1,0} - \mu_2 p_{i,j,1} \right) / \mu_1.$$

Таким образом, совместное стационарное распределение найдено. Поскольку заявки поступают в систему с интенсивностью  $\lambda$ , а обслуживаются с интенсивностью  $\mu^* = (\beta_1/\mu_1 + \beta_2/\mu_2)^{-1}$ , неравенство  $\lambda < \mu^*$  является необходимым и достаточным условием для его существования.



## 4 Заключение

В статье представлен анализ СМО с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок, в которой заявки из накопителя и бункера обслуживаются с различными интенсивностями. Найдено совместное стационарное распределение числа заявок в накопителе и бункере как в терминах производящих функций, так и в терминах вычислительных алгоритмов.

С помощью программных средств GPSS была разработана имитационная модель системы. Результаты моделирования показали хорошие совпадения с результатами численных расчетов, проведенных по полученным формулам.

Автор глубоко признателен профессору А. В. Печинкину за постановку задачи, ряд ценных замечаний и помощь при оформлении статьи.

## Литература

1. Бочаров П. П., Вишневецкий В. М. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей // Автоматика и телемеханика, 2003. № 5. С. 70–74.
2. Muthu Ganapathi Subramanian A., Ayyappan G., Gopal Sekar.  $M|M|1$  retrial queueing system with negative arrival under non-pre-emptive priority service // J. Fundamental Sciences, 2009. Vol. 5. No. 2. P. 129–145.
3. D'Apice C., Manzo R., Pechinkin A., Shorgin S. Queueing network with negative customers and the route change // Conference (International) on Ultra Modern Telecommunications Proceedings, 2009. P. 1–5.
4. Pechinkin A., Razumchik R. A queueing system with negative claims and a bunker for superseded claims in discrete time // Automation and Remote Control, 2009. Vol. 70. No. 12. P. 109–120.
5. Ayyappan G., Gopal Sekar, Muthu Ganapathi Subramanian A.  $M|M|1$  retrial queueing system with negative arrival under erlang-k service by matrix geometric method // Appl. Math. Sci., 2010. Vol. 4. No. 48. P. 2355–2367.
6. Pechinkin A. V., Razumchik R. V. Waiting characteristics of queueing system  $Geo|Geo|1$  with negative claims and a bunker for superseded claims in discrete time // Conference (International) on Ultra Modern Telecommunications Proceedings, 2010. P. 1051–1055.
7. Krishna Kumar B., Pavai Madheswari S., Anantha Lakshmi S. R. An  $M/G/1$  Bernoulli feedback retrial queueing system with negative customers // Operational Res., 2011. Vol. 1. P. 1–24.
8. Songfang Jia, Yanheng Chen. A discrete time queueing system with negative customers and single working vacation // 3rd Conference (International) on Computer Research and Development (ICCRD) Proceedings, 2011. Vol. 4. P. 15–19.
9. Tien Van Do. A new solution for a queueing model of a manufacturing cell with negative customers under a rotation rule // J. Performance Evaluation, 2011. Vol. 68. Issue 4. P. 330–337.
10. Мандзо Р., Касконе Н., Разумчик Р. В. Экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок // Автоматика и телемеханика, 2008. № 9. С. 103–113.
11. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. 529 с.

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ ПЛОСКИМ ЗОНДОМ СИЛЬНОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ С УЧЕТОМ КУЛОНОВСКИХ СТОЛКНОВЕНИЙ

И. А. Кудрявцева<sup>1</sup>, А. В. Пантелеев<sup>2</sup>

**Аннотация:** Сформирована математическая модель, описывающая динамику сильноионизованной плазмы с учетом столкновений заряженных частиц вблизи плоского зонда. Модель включает уравнение Фоккера–Планка и уравнение Пуассона. Предложено два подхода к решению задачи: на основе метода статистических испытаний Монте-Карло и на основе композиции метода крупных частиц и метода расщепления.

**Ключевые слова:** телекоммуникационные системы; метод Монте-Карло; метод крупных частиц; метод расщепления; зонд; уравнение Фоккера–Планка; уравнение Пуассона

## 1 Введение

В настоящее время в области телекоммуникаций все более востребованными становятся информационные технологии, основанные на использовании математических моделей и численных методов физики плазмы. Поэтому особенно актуальным является решение разнообразных задач анализа поведения плазмы, включающих в себя формирование новых моделей и методов их исследования. Помимо этого, в разработке телекоммуникационного оборудования эффективно используются собственно физические свойства плазмы. В частности, изготовлена антенна, работа которой основана на газовом разряде низкотемпературной плазмы [1], интенсивно ведутся разработки по созданию и усовершенствованию источников бесперебойного питания на основе плазменных элементов [2, 3].

Одним из наиболее перспективных направлений для построения систем оптической беспроводной связи является использование лазеров [4, 5]. В этой связи большое внимание уделяется использованию плазмы при разработке импульсных высокоточных коммутаторов [6], так как практическое применение подобных разработок требует повышения уровня надежности и быстродействия лазерных систем.

Исследования низкотемпературной плазмы также связаны с разработками в области дальней космической связи, так как моделирование процессов взаимодействия заряженного тела с верхними слоями атмосферы позволяет предлагать способы улучшения существующих систем радиосвязи с космическими летательными аппаратами [7].

Наряду с этим актуальными также являются задачи диагностики плазмы, поскольку перспективы ее использования в области телекоммуникаций после более полного изучения физических свойств могут значительно расширяться.

Для диагностики плазмы применяют зондовые методы исследования [8–11]. Эти методы относятся к классу контактных методов; как следствие, возникает сложность в исследовании пристеночной области вблизи зонда, которая характеризуется достаточно сложным распределением потенциала и функциями распределения, отличными от максвелловских.

Данная работа посвящена исследованию переходного режима обтекания заряженного тела плазмой. Для переходного режима выполняется следующее условие: длина свободного пробега иона до столкновения с нейтральным атомом или другим ионом невелика по сравнению с характерными размерами тела. В этом случае возникает необходимость учета столкновений заряженных частиц с нейтральными атомами и кулоновских столкновений. В работах [10, 11] подробно рассмотрена модель с учетом столкновений заряженных частиц с нейтральными атомами. В настоящей статье представлена теоретическая модель, описывающая влияния ион-ионных и ион-электронных столкновений на измеряемые характеристики плазмы, что ранее детально не исследовалось.

В рамках данной работы предлагается модель, описывающая динамику сильноионизованной плазмы с учетом кулоновских столкновений. Эта модель учитывает такие процессы взаимодей-

<sup>1</sup>Московский авиационный институт, irina.home.mail@mail.ru

<sup>2</sup>Московский авиационный институт, avpanteleev@inbox.ru

ствия, как перенос частиц и столкновения между заряженными частицами типа «ион–ион» и «ион–электрон» под влиянием макроскопического электрического поля. Перечисленные процессы описываются самосогласованной системой уравнений, включающей уравнение Фоккера–Планка и уравнение Пуассона [12].

Вычислительная модель задачи строится на основе двух методов: метода статистических испытаний Монте-Карло и композиции метода крупных частиц и метода расщепления. Приведены результаты численного моделирования, полученные с использованием вышеперечисленных методов.

## 2 Постановка задачи

Рассматривается следующая физическая постановка зондовой задачи [11]. В невозмущенную бесконечно протяженную плазму, состоящую из электронов и однозарядных ионов, внесена большая заряженная до потенциала  $\varphi_p$  плоскость. Плоскость, расположенная поперек потока плазмы, является идеально поглощающей для электронов. Ионы при ударе о плоскость нейтрализуются. Предполагается, что частицы в плазме движутся под действием внешнего электрического поля, магнитное поле отсутствует. Концентрации ионов  $n_{i\infty}$  и электронов  $n_{e\infty}$ , а также температуры данных частиц  $T_{i\infty}$  и  $T_{e\infty}$  в невозмущенной плазме заданы. За начальные функции распределения обоих типов частиц принимаются функции распределения Максвелла.

Требуется с учетом столкновений между заряженными частицами найти напряженность самосогласованного электрического поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , функции распределения однозарядных ионов  $f_i(\vec{r}, \vec{v}, t)$  и электронов  $f_e(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , а также их моменты (плотности токов ионов и электронов  $j_i(\vec{r}, t) = q \int f_i(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v}$ ,  $j_e(\vec{r}, t) = e \int f_e(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v}$ , где  $q = Z_i e$ ,  $Z_i = 1$  — заряд иона,  $e$  — заряд электрона; концентрации ионов и электронов  $n_i(\vec{r}, t) = \int f_i(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ ,  $n_e(\vec{r}, t) = \int f_e(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ ). Поведение частиц во времени  $t$  характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}$  и вектором скорости  $\vec{v}$ .

Математическая модель, соответствующая данной физической постановке задачи, имеет вид [11, 13]:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_\alpha(\vec{r}, t)}{m_\alpha} \times \\ & \times \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_c + S_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t); \\ & \Delta \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_i(\vec{r}, t) - n_e(\vec{r}, t)); \\ & \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla \varphi(\vec{r}, t). \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь первое уравнение — уравнение Фоккера–Планка для частиц сорта  $\alpha$  ( $\alpha = i, e$ ), второе — уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля;  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$  — функция распределения частиц сорта  $\alpha$ ;  $(\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)/\partial t)_c$  — оператор столкновений Фоккера–Планка; функция  $S_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$  описывает источники или стоки частиц;  $\vec{F}_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha \vec{E}(\vec{r}, t)$ , где  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  — напряженность самосогласованного электрического поля,

$$q_\alpha = \begin{cases} -e, & \alpha = e, \\ e, & \alpha = i; \end{cases}$$

$\varphi(\vec{r}, t)$  — потенциал самосогласованного электрического поля;  $n_\alpha(\vec{r}, t)$  ( $\alpha = i, e$ ) — концентрация частиц сорта  $\alpha$ ;  $m_\alpha$  — масса частицы сорта  $\alpha$ ;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная.

Оператор столкновений Фоккера–Планка имеет вид [13, 14]

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c = \frac{1}{2} \nabla_v \nabla_v : (f_\alpha \nabla_v \nabla_v g_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)) - \nabla_v \cdot (f_\alpha \nabla_v h_\alpha),$$

где  $\nabla_v \nabla_v g_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$  — ковариантная тензорная производная второго ранга, знак двоеточия (:) обозначает операцию двойного суммирования:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &= \frac{Z_\alpha^4 e^4}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2} \ln D_\alpha; \\ D_\alpha &= \frac{12\pi \varepsilon_0 k T_{\alpha\infty}}{Z_\alpha^2 e^2} \left( \frac{\varepsilon_0 k T_{e\infty}}{n_{e\infty} e^2} \right)^{1/2}; \\ g_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \sum_{b=i,e} \left( \frac{Z_b}{Z_\alpha} \right) \int f_b(\vec{r}, \vec{v}', t) |\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}'; \\ h_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \sum_{b=i,e} \frac{m_\alpha + m_b}{m_b} \left( \frac{Z_b}{Z_\alpha} \right) \int \frac{f_b(\vec{r}, \vec{v}', t)}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d\vec{v}'; \\ Z_\alpha &= 1, \quad \alpha = i, e. \end{aligned}$$

К системе уравнений (1) необходимо добавить начальные и краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} t = 0 : & \quad f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, 0) = f_\alpha^{\text{максв}}, \quad \alpha = i, e; \\ \vec{r} \in \Omega_p : & \quad f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_p} = 0, \quad \alpha = i, e; \\ & \quad \varphi(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_p} = \varphi_p; \\ \vec{r} \in \Omega_\infty : & \quad f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_\infty} = f_\alpha^{\text{максв}}, \quad \alpha = i, e; \\ & \quad \varphi(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_\infty} = 0, \end{aligned} \right\} (2)$$

где

$$f_{\alpha}^{\text{максв}} = n_{\alpha\infty} \left( \frac{m_{\alpha}}{2k\pi T_{\alpha\infty}} \right)^{3/2} \times \exp \left( -\frac{m_{\alpha}}{2kT_{\alpha\infty}} |\vec{v} - \vec{v}_{\infty}|^2 \right), \quad \alpha = i, e;$$

$\Omega_p$  и  $\Omega_{\infty}$  — множество радиус-векторов частиц, концы которых принадлежат плоскости зонда и границе возмущенной зоны соответственно.

Для решения поставленной задачи введем декартову систему координат таким образом, чтобы заряженная плоскость совпала с плоскостью  $0xz$ . Тогда положение частицы в пространстве будет определяться координатами  $x, y, z$ , а скорость — координатами  $v_x, v_y, v_z$ . В силу того что плоскость является бесконечно большой в сравнении с характерным размером задачи, функции распределения частиц будут зависеть только от переменных  $y, v_y, t$ .

Поставленную задачу предлагается решать независимо двумя методами. Первый метод основывается на методе статистических испытаний Монте-Карло, второй метод является композицией метода расщепления и метода крупных частиц.

### 3 Применение метода Монте-Карло

Запишем самосогласованную систему уравнений (1) и (2) в декартовой системе координат с учетом сделанных предположений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v_y \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y} + \frac{F_y^{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial [v_y]^2} \times \\ &\times \left( f_{\alpha} \frac{\partial^2 g_{\alpha}}{\partial [v_y]^2} \right) - \frac{\partial}{\partial v_y} \left( f_{\alpha} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial v_y} \right), \quad \alpha = i, e; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_i - n_e); \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ t = 0: \quad f_{\alpha}(y, v_y, 0) &= f_{\alpha}^{\text{максв}}, \quad \alpha = i, e; \\ y = 0: \quad f_{\alpha}(0, v_y, t) &= 0, \quad \alpha = i, e; \\ \varphi(0, t) &= \varphi_p; \\ y = y_{\infty}: \quad f_{\alpha}(y_{\infty}, v_y, t) &= f_{\alpha}^{\text{максв}}, \quad \alpha = i, e; \\ \varphi(y_{\infty}, t) &= 0. \end{aligned} \right\} (3)$$

В полученной системе уравнений (3) перейдем к безразмерным величинам, применив соотношение  $X = M_X \hat{X}$ , где  $M_X$  — масштаб размерной величины  $X$ ,  $\hat{X}$  — безразмерная величина  $X$ . В качестве используемых масштабов были взяты следующие: радиус Дебая, скорость теплового движения частиц, концентрация частиц в невозмущенной плазме, потенциал, возникающий при разделении зарядов в дебаевской сфере, и производные от них величины.

Система безразмерных уравнений имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_{\alpha}}{\partial \hat{t}} + A_{\alpha} \frac{\partial \hat{f}_{\alpha}}{\partial \hat{y}} + B_{\alpha} \hat{E}_y \frac{\partial \hat{f}_{\alpha}}{\partial \hat{v}_y} &= \\ &= \frac{\partial^2}{\partial [\hat{v}_y]^2} \left( D_{\alpha} \hat{f}_{\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{v}_y} \left( K_{\alpha} \hat{f}_{\alpha} \right), \quad \alpha = i, e; \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}^2} &= -(\hat{n}_i - \hat{n}_e); \quad \hat{e}_y = -\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}}; \\ \hat{t} = 0: \quad \hat{f}_{\alpha}(\hat{y}, \hat{v}_y, 0) &= \hat{f}_{\alpha}^{\text{максв}}, \quad \alpha = i, e; \\ \hat{y} = 0: \quad \hat{f}_{\alpha}(0, \hat{v}_y, \hat{t}) &= 0, \quad \alpha = i, e; \\ \hat{\varphi}(0, \hat{t}) &= \hat{\varphi}_p; \\ \hat{y} = \hat{y}_{\infty}: \quad \hat{f}_{\alpha}(\hat{y}_{\infty}, \hat{v}_y, \hat{t}) &= \hat{f}_{\alpha}^{\text{максв}}, \quad \alpha = i, e; \\ \hat{\varphi}(\hat{y}_{\infty}, \hat{t}) &= 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &= \sqrt{\delta_{\alpha}} \hat{v}_y; \quad B_{\alpha} = \sqrt{\delta_{\alpha}} \frac{z_{\alpha}}{2\varepsilon_{\alpha}}; \\ \delta_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}; \quad \varepsilon_{\alpha} = \frac{T_{\alpha\infty}}{T_{i\infty}}; \\ \mu_{\alpha} &= \frac{m_{\alpha}}{m_i}; \quad D_{\alpha} = A_g^{\alpha} \frac{\partial^2 \hat{g}_{\alpha}}{\partial [\hat{v}_y]^2}; \\ K_{\alpha} &= A_h^{\alpha} \frac{\partial \hat{h}_{\alpha}}{\partial \hat{v}_y}, \quad \alpha = i, e, \end{aligned}$$

где  $A_g^{\alpha}$  и  $A_h^{\alpha}$  — коэффициенты, определяемые характерными параметрами задачи [15].

Поиск решения самосогласованной системы уравнений (4) осуществляется по следующей схеме. Вначале находятся значения напряженности электрического поля по значениям потенциала, полученным из граничной задачи для уравнения Пуассона. Далее, используя найденные значения напряженности, решается уравнение Фоккера–Планка путем перехода к стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) Ито:

$$d\Theta_{\alpha}(\hat{t}) = a_{\alpha}(\hat{t}, \Theta_{\alpha}(\hat{t})) + \sigma(\hat{t}, \Theta_{\alpha}(\hat{t})) dW(\hat{t}), \quad \alpha = i, e,$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha}(\hat{t}) &= \begin{bmatrix} \hat{y}(\hat{t}) \\ \hat{v}_y(\hat{t}) \end{bmatrix}; \\ a_{\alpha}(\hat{t}, \Theta_{\alpha}(\hat{t})) &= \begin{bmatrix} -A_{\alpha} \\ -K_{\alpha} - B_{\alpha} \hat{E}_y \end{bmatrix}; \\ \sigma_{\alpha}(\hat{t}, \Theta_{\alpha}(\hat{t})) \sigma_{\alpha}^T(\hat{t}, \Theta_{\alpha}(\hat{t})) &= D_{\alpha}, \quad \alpha = i, e; \end{aligned}$$

$W(\hat{t})$  — стандартный винеровский случайный процесс.

Для нахождения значений вектора состояния  $\Theta_\alpha(\hat{t})$  применим явную разностную схему стохастического метода Эйлера [16]:

$$\Theta_\alpha^{n+1} = \Theta_\alpha^n + h_\tau a_\alpha(\hat{t}_n, \Theta_\alpha^n) + \sigma_\alpha(\hat{t}_n, \Theta_\alpha^n) \Delta W_n, \\ n = 0, \dots, N, \alpha = i, e,$$

где  $\Theta_\alpha^n$ ,  $n = 0, \dots, N$ , — приближенное значение вектора состояния  $\Theta_\alpha(\hat{t})$ ,  $\alpha = i, e$ , в момент времени  $\hat{t} = \hat{t}_n$ ,  $\hat{t}_n = nh_\tau$ ,  $n = 0, \dots, N$ ;  $h_\tau$  — достаточно малый шаг интегрирования;  $\Delta W_n$ ,  $n = 0, \dots, N$ , — величина приращения винеровского процесса  $W(\hat{t})$  на отрезке  $[\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1}]$ , по определению независимая от  $\Theta_\alpha^0$ ,  $\Delta W_0, \dots, \Delta W_{n-1}$ :  $\Delta W_n = W(\hat{t}_{n+1}) - W(\hat{t}_n)$ ;  $\Delta W_n \sim N(0, h_\tau)$ , т.е.  $\Delta W_n$  представляют собой гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными шагу интегрирования;  $\Theta_\alpha^0$  — значение вектора состояния  $\Theta_\alpha(\hat{t})$ ,  $\alpha = i, e$ , в момент времени  $\hat{t} = 0$ ,  $\Theta_\alpha^0 \sim \hat{f}_\alpha^{\text{макс}}$ .

Частные производные  $\partial^2 \hat{g}_\alpha / \partial [\hat{v}_y]^2$  и  $\partial \hat{h}_\alpha / \partial \hat{v}_y$ , являющиеся составляющими матрицы  $\sigma_\alpha(\hat{t}_n, \Theta_\alpha^n) \sigma_\alpha^T(\hat{t}_n, \Theta_\alpha^n)$  и вектора  $a_\alpha(\hat{t}_n, \Theta_\alpha^n)$  соответственно, аппроксимируются со вторым порядком точности на трехточечном шаблоне на основе значений  $\hat{g}_\alpha$  и  $\hat{h}_\alpha$  [17].

В выражениях для функций  $\hat{g}_\alpha$  и  $\hat{h}_\alpha$  входят интегралы, которые вычисляются методом Монте-Карло с использованием набора значений скоростной компоненты вектора состояния  $\hat{v}_y$ , полученных из решения СДУ Ито:

$$\int \hat{f}_\alpha |\hat{v}_y - \hat{v}'_y| dv'_y = M \left( \zeta \left( \hat{V}_y \right) \right),$$

где

$$\zeta \left( \hat{V}_y \right) = \left| \hat{v}_y - \hat{V}_y \right|, \quad \hat{V}_y \sim \hat{f}_\alpha.$$

Для вычисления напряженности самосогласованного электрического поля  $\hat{E}_y = -\partial \hat{\varphi} / \partial \hat{y}$ , входящей в вектор  $a_\alpha(\hat{t}_n, \Theta_\alpha^n)$ , необходимо аналогично аппроксимировать со вторым порядком точности производную  $\partial \hat{\varphi} / \partial \hat{y}$  на трехточечном шаблоне с использованием значений потенциала  $\hat{\varphi}$  [17]. Значения потенциала  $\hat{\varphi}$  находятся из решения уравнения Пуассона.

Граничную задачу для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}^2} = -(\hat{n}_i - \hat{n}_e);$$

$$\hat{\varphi}|_{\hat{y}=0} = \hat{\varphi}_p;$$

$$\hat{\varphi}|_{\hat{y}=\infty} = 0$$

предлагается решать путем перехода к конечно-разностной системе с последующим ее решением методом прогонки [17]:

$$\hat{\varphi}_{l-1}^n + 2\hat{\varphi}_l^n + \hat{\varphi}_{l+1}^n = h_y \hat{\delta}_l^n, \quad l = 1, \dots, N_y;$$

$$\hat{\delta}_l^n = -(\hat{n}_{i,l}^n - \hat{n}_{e,l}^n); \quad \hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_p; \quad \hat{\varphi}_{N_y} = 0,$$

где  $N_y$  — число шагов по переменной  $\hat{y}$ ,  $h_y$  — величина шагов разбиения по  $\hat{y}$ .

Концентрации  $\hat{n}_\alpha$ ,  $\alpha = i, e$ , и плотности токов частиц на зонд  $\hat{f}_\alpha$ ,  $\alpha = i, e$ , вычисляются согласно описанному выше методу Монте-Карло.

## 4 Применение метода расщепления и метода крупных частиц

Решение задачи в данном случае предлагается начать с записи правой части уравнения Фоккера–Планка в декартовой системе координат в виде:

$$\mathbf{Q}f_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial [v_y]^2} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial [v_y]^2} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y} \frac{\partial C_\alpha}{\partial v_y} + H_\alpha, \quad \alpha = i, e,$$

где

$$C_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \begin{cases} \frac{1-\gamma}{Z_i^2} \int \frac{f_e(\vec{r}, \vec{v}', t)}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d\vec{v}', & \alpha = i; \\ \frac{Z_i^2(\gamma-1)}{\gamma} \int \frac{f_i(\vec{r}, \vec{v}', t)}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d\vec{v}', & \alpha = e; \end{cases}$$

$$H_\alpha = \begin{cases} 4\pi \left( \frac{\gamma f_e}{Z_i^2} + f_i \right) f_i, & \alpha = i; \\ 4\pi \left( \frac{Z_i^2 f_i}{\gamma} + f_e \right) f_e, & \alpha = e. \end{cases}$$

Тогда при переходе к безразмерным величинам (см. разд. 3) система (1) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{t}} + A_\alpha \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{y}} + B_\alpha \hat{E}_y \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{v}_\alpha} &= \tilde{\mathbf{Q}} \hat{f}_\alpha, \quad \alpha = i, e; \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}^2} &= -(\hat{n}_i - \hat{n}_e), \quad \hat{E}_y = -\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}}, \\ \hat{t} = 0: \quad \hat{f}_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, 0) &= \hat{f}_\alpha^{\text{макс}}, \quad \alpha = i, e, \\ \hat{y} = 0: \quad \hat{f}_\alpha(0, \hat{v}_y, \hat{t}) &= 0, \quad \alpha = i, e; \\ &\hat{\varphi}(0, \hat{t}) = \hat{\varphi}_p; \\ \hat{y} = \hat{y}_\infty: \quad \hat{f}_\alpha(\hat{y}_\infty, \hat{v}_y, \hat{t}) &= \hat{f}_\alpha^{\text{макс}}, \quad \alpha = i, e; \\ &\hat{\varphi}(\hat{y}_\infty, \hat{t}) = 0, \end{aligned} \right\} (5)$$

где

$$\tilde{\mathbf{Q}} \hat{f}_\alpha = D_\alpha \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial [\hat{v}_y]^2} + K_\alpha \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{v}_y} + H_\alpha;$$

$$D_\alpha = A_g^\alpha \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial [\hat{v}_y]^2}; \quad K_\alpha = A_h^\alpha \frac{\partial \hat{h}_\alpha}{\partial \hat{v}_y}, \quad \alpha = i, e.$$



Для решения системы уравнений (5) применяется модификация метода расщепления [17], согласно которой исходная задача разбивается на две вспомогательные. Такое разбиение можно осуществить, переписав уравнение Фоккера–Планка в следующем виде:

$$\frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{t}} = \tilde{\mathbf{Q}}_1 \hat{f}_\alpha + \tilde{\mathbf{Q}}_2 \hat{f}_\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \hat{f}_\alpha &= - \left( A_\alpha \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{y}} + B_\alpha \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{y}} \right); \\ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \hat{f}_\alpha &= \left( D_\alpha \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial [\hat{v}_y]^2} + K_\alpha \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{v}_y} + H_\alpha \right). \end{aligned}$$

Правая часть уравнения Фоккера–Планка представляет собой сумму двух операторов, первый из которых отвечает за перенос частиц, второй — за столкновения заряженных частиц. В результате образуются следующие задачи, которые решаются последовательно:

– первая задача:

$$\frac{\partial w_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t})}{\partial \hat{t}} = \mathbf{Q}_1 w_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}), \quad \alpha = i, e;$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}^2} = -(\hat{n}_i - \hat{n}_e); \quad \hat{E}_y = -\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}};$$

$$w_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^n) = \hat{f}_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^n), \quad n = 0, \dots, N - 1;$$

$$\hat{y} = 0: \quad w_\alpha(0, \hat{v}_y, \hat{t}) = 0, \quad \alpha = i, e;$$

$$\hat{\varphi}(0, \hat{t}) = \hat{\varphi}_p;$$

$$\hat{y} = \hat{y}_\infty: \quad w_\alpha(\hat{y}_\infty, \hat{v}_y, \hat{t}) = \hat{f}_\alpha^{\text{максв}}, \quad \alpha = i, e;$$

$$\hat{\varphi}(\hat{y}_\infty, \hat{t}) = 0;$$

– вторая задача:

$$\frac{\partial s_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t})}{\partial \hat{t}} = \mathbf{Q}_2 s_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}), \quad \alpha = i, e;$$

$$s_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^n) = w_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Первая задача представляет собой систему безразмерных уравнений Власова–Пуассона. Для ее решения применяется метод крупных частиц [18]. Согласно этому методу решение задачи осуществляется путем расщепления на два этапа: на первом этапе не учитываются конвективные члены и решение получается обычным интегрированием на неподвижной эйлеровой сетке, а на втором

этапе рассматривается система, которая описывает перенос частиц в лагранжевой системе координат. Кроме того, на первом этапе необходимо решить уравнение Пуассона для получения значений потенциала самосогласованного электрического поля. Для этого применяется метод, описанный в разд. 3.

Вторая задача решается путем перехода к конечно-разностной системе. При этом частные производные  $\partial^2 \hat{g}_\alpha / \partial [\hat{v}_y]^2$  и  $\partial \hat{h}_\alpha / \partial \hat{v}_y$  аппроксимируются со вторым порядком точности с использованием трехточечного шаблона, а производная  $\partial s_\alpha / \partial \hat{t}$  аппроксимируется на двухточечном шаблоне с первым порядком точности [16]. К полученной системе разностных уравнений предлагается применить один из классических методов решения систем линейных уравнений, например метод Гаусса [19].

Решением первой задачи является функция  $w_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^n)$ ,  $n = 0, \dots, N$ , которая дает начальное условие для второй задачи. Решая вторую задачу, находим функцию  $s_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^n) = \hat{f}_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $\alpha = i, e$ , которая определяет решение  $\hat{f}_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}^n)$ ,  $\alpha = i, e$ , исходной системы (5) для рассматриваемых моментов времени  $n = 1, \dots, N$ .

Моменты функций распределения  $\hat{f}_\alpha$ ,  $\alpha = i, e$ , находятся с помощью методов численного интегрирования, например метода трапеций [19].

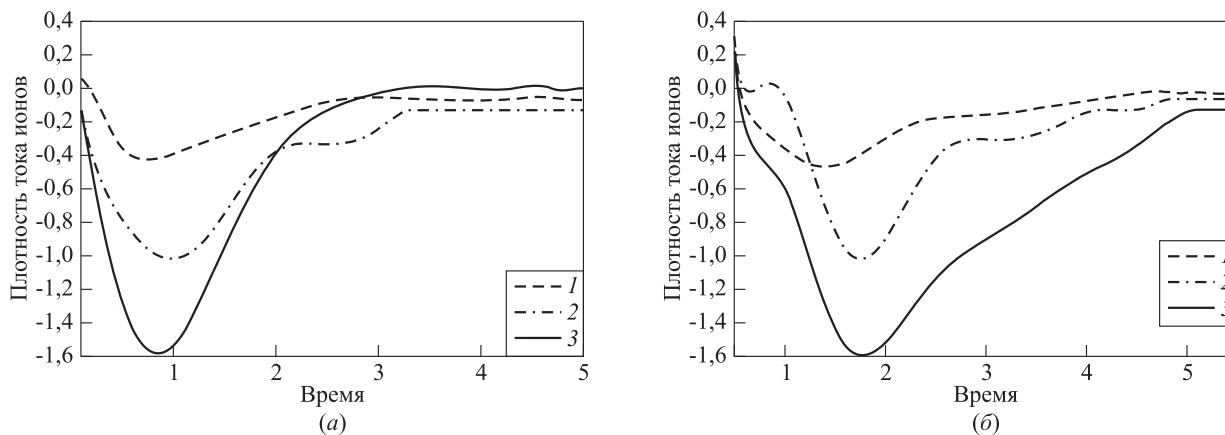
## 5 Результаты численного моделирования

Для двух описанных выше методов реализованы две отдельные программы в среде Matlab 7.0. Эти программы позволяют по заданным значениям концентраций и температур частиц  $n_{i\infty}$ ,  $n_{e\infty}$ ,  $T_{i\infty}$  и  $T_{e\infty}$  в невозмущенной плазме, а также потенциала  $\varphi_p$ , подаваемого на зонд, изучить эволюцию во времени плотностей тока частиц  $j_i$  и  $j_e$ , концентраций частиц  $n_i$  и  $n_e$  в произвольной точке пространства в возмущенной зоне, а также динамику изменения напряженности  $E_y$  самосогласованного электрического поля во времени и пространстве.

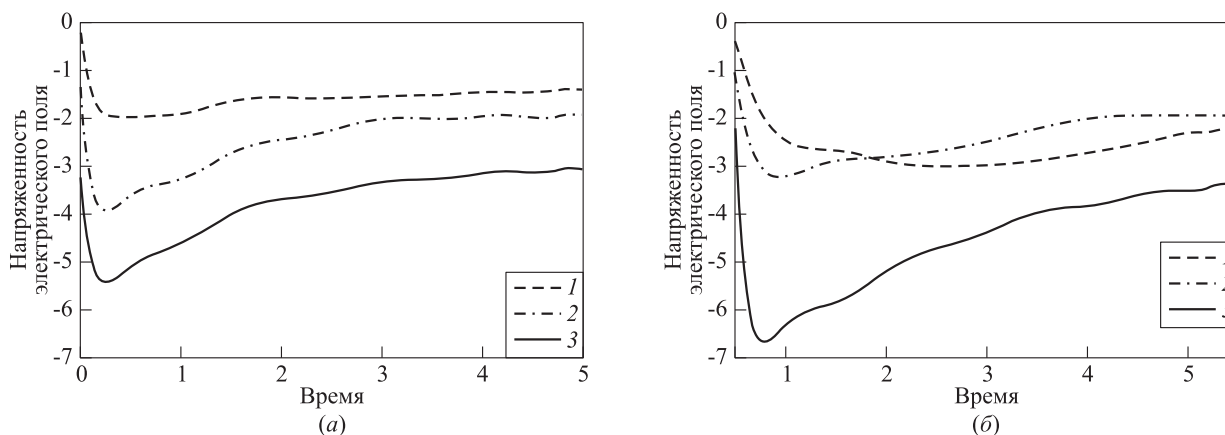
С использованием разработанных программ проведены серии расчетных экспериментов, в которых значение концентраций варьировалось в пределах  $n_{i\infty} = n_{e\infty} = 10^{18} \div 10^{22} \text{ м}^{-3}$ . Значение температур было выбрано неизменным и равным  $T_{i\infty} = T_{e\infty} = 3000 \text{ К}$ , а значения потенциала, подаваемого на зонд, изменялись в пределах  $\varphi_p = 0 \div 2,6 \text{ В}$ .

На рис. 1 и 2 приведены графики изменения напряженности самосогласованного электрического поля (см. рис. 1) и плотности токов ионов (см.





**Рис. 1** Динамика изменения плотности тока ионов во времени в фиксированной точке возмущенной зоны для значений потенциала: 1 –  $\varphi_p = -6$ ; 2 –  $\varphi_p = -16$ ; 3 –  $\varphi_p = -30$  в случае применения методов Монте-Карло (а) и крупных частиц (б)



**Рис. 2** Динамика изменения напряженности электрического поля во времени в фиксированной точке возмущенной зоны для значений потенциала: 1 –  $\varphi_p = -6$ ; 2 –  $\varphi_p = -16$ ; 3 –  $\varphi_p = -30$  в случае применения методов Монте-Карло (а) и крупных частиц (б)

рис. 2) во времени в фиксированной точке пространства возмущенной зоны в случае применения обоих разработанных алгоритмов.

На основании полученных результатов можно отметить похожее поведение зависимостей напряженности электрического поля и плотности тока от времени в двух рассматриваемых случаях. Графики кривых сначала убывают, затем начинают возрастать, выходя в некоторый момент времени  $t'$  (момент установления) на стационарные значения.

Одинаковое поведение напряженности и плотности тока можно объяснить из следующих соображений: плотность тока ионов в данной области пространства равна произведению концентрации ионов на их направленную скорость и на заряд иона. Скорость ионов, в свою очередь, зависит от заряда, массы и напряженности электрического поля.

При внесении в плазму отрицательно заряженного зонда возникает электрическое поле, которое нарушает квазинейтральность плазмы. Для того чтобы компенсировать действие внешнего электрического поля, ионы устремляются к зонду, а электроны — от зонда. Это приводит к дисбалансу концентраций вблизи зонда и, как следствие, к увеличению разности потенциалов; график напряженности электрического поля убывает. Вскоре разделение зарядов компенсирует внешнее электрическое поле; график выходит на стационарное значение.

Также можно отметить, что значения напряженности электрического поля и плотности тока частиц на зонд в момент установления для двух методов совпадают.

Момент установления  $t'$  зависит от применяемого метода решения. В случае метода Монте-

Карло  $t' = 3,5 \div 4$  ед., а для метода крупных частиц совместно с методом расщепления  $t' = 5 \div 5,5$  ед. Используя конечно-разностный метод, можно получить динамику изменения функций распределения частиц  $f_\alpha$ ,  $\alpha = i, e$ , во времени и пространстве. Функции распределения позволяют наглядно представить влияние на картину распределения частиц вблизи зонда самой поверхности зонда и электрического поля.

## 6 Заключение

В работе найдено решение задачи диагностики плоским зондом сильноионизованной плазмы с учетом столкновений заряженных частиц. Разработана математическая модель исследуемого явления, описываемая уравнениями Фоккера—Планка и Пуассона. Решение получено двумя методами: статистическим и конечно-разностным на основе сформированных алгоритмов. Приведены результаты численного моделирования при различных характерных параметрах задачи. Из проведенных вычислительных экспериментов вытекает, что искомые величины: напряженность электрического поля, плотности токов частиц на зонд, концентрации частиц вблизи зонда — как по характеру зависимости, так и по числовым значениям совпадают. При применении метода Монте-Карло момент установления наступает быстрее по сравнению с конечно-разностным методом, однако конечно-разностный метод позволяет получить более наглядные результаты.

## Литература

1. Alexeff I., Anderson T. Experimental and theoretical results with plasma antenna // IEEE Trans. Plasma Sci., 2006. Vol. 34. No. 2. P. 166–172.
2. Сысун В. И. Сильноионизованная низкотемпературная плазма в приборах электронной техники: Методы исследования, свойства, применение. Дисс. . . д-ра физ.-мат. наук в форме науч. докл.: 01.04.08. — Петрозаводск, 1996.
3. Тухас В. А. Методология создания средств измерений и испытаний на устойчивость к кондуктивным помехам // Мат-лы VI Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. — СПб., 2005. С. 231–234.
4. Гудзенко Л. И., Яковленко С. И. Плазменные лазеры. — М.: Атомиздат, 1978. 256 с.
5. Звелто О. Принципы лазеров. — М.: Мир, 1990. 560 с.
6. Сысун В. И., Хромой Ю. Д. Расширение канала мощного импульсного разряда в парах ртути // Электронная техника, 1974. Сер. 4. Вып. 10. С. 80–85.
7. Винклер Дж. Р. Искусственные пучки частиц в космической плазме. — М.: Мир, 1985. 451 с.
8. Bernstein I. B., Rabinowitz I. N. Theory of electrostatic probes in low-density plasma // Phys. Fluids, 1959. Vol. 2. No. 2. P. 112–121.
9. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Путаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме. — М.: Наука, 1964. 282 с.
10. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. — М.: Мир, 1978. 202 с.
11. Алексеев Б. В., Котельников В. А. Зондовый метод диагностики плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1989. 240 с.
12. Пантелеев А. В., Кудрявцева И. А. Формирование математической модели двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений заряженных частиц в случае плоского зонда // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвузовский сб. научн. тр. — М.: МИРЭА, 2006. С. 11–21.
13. Олдер Б. Вычислительные методы в физике плазмы. — М.: Мир, 1974. 111 с.
14. Montgomery D. C., Tidman D. A. Plasma kinetic theory. — New York, 1964.
15. Кудрявцева И. А., Пантелеев А. В. Применение метода Монте-Карло для анализа поведения двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений между заряженными частицами // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвузовский сб. научн. тр. — М.: МИРЭА, 2008. С. 122–128.
16. Семенов В. В., Пантелеев А. В., Руденко Е. А., Бортакковский А. С. Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления. — М.: МАИ, 1993. 312 с.
17. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2006. 480 с.
18. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, Физматгиз, 1982.
19. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. — М.: Высшая школа, 2002. 840 с.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТРИК ПРИ СРАВНИТЕЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ КАЧЕСТВА РАБОТЫ АЛГОРИТМОВ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

П. П. Кольцов<sup>1</sup>

**Аннотация:** Изучается качество работы четырех известных алгоритмов цифровой сегментации изображений. Исследование проводится на совокупности искусственных тестовых изображений, подвергаемых контролируемым искажениям при априори известном эталонном *ground truth* изображении. Результат работы алгоритмов сегментации сравнивается с эталонным изображением с помощью метрик, обладающих различными свойствами. Использование различных метрик для оценки качества работы алгоритмов сегментации и сравнение полученных при этом результатов позволяют более точно выяснить особенности каждого из исследуемых алгоритмов.

**Ключевые слова:** обработка изображений; оценка качества обработки изображений; сегментация изображений; выделение границ; энергетические методы

## 1 Введение

В данной статье под сегментацией подразумевается разбиение изображения на совокупность непересекающихся связных областей, для которых характерно повышенное сходство между элементами одной и той же области по сравнению с прилежащим фоном или соседними областями. В ряде случаев, например при решении задач текстурного анализа, таким областям могут отвечать определенные объекты или их части. Методы, предназначенные для решения такого класса задач, будем называть методами сегментации, а их программные реализации — алгоритмами сегментации. Таким образом, в статье под задачей сегментации подразумевается задача разбиения исходного изображения на вышеуказанные области.

В настоящее время разработка методов сегментации является одним из быстроразвивающихся направлений в области обработки изображений, широко востребованным в практической деятельности. Однако значительное число существующих в настоящее время как методов сегментации, так и их программно-алгоритмических реализаций, порождает проблему выбора алгоритма, наиболее подходящего для решаемой конкретной задачи.

Очевидно, что при выборе того или иного алгоритма необходимо руководствоваться его свойствами, позволяющими судить об ожидаемом качестве решения этим алгоритмом задачи сегментации. Качество решения задачи сегментации в статье будет определяться через оценку точности работы алгоритма сегментации.

В статье сравнительное исследование точности работы различных алгоритмов сегментации проводится на наборе эталонных/тестовых изображений, подвергаемых контролируемым искажениям. В предположении, что наиболее существенные свойства тестируемых алгоритмов проявляются при обработке типичных и трудных для метода ситуаций, необходимым требованием к тестовым изображениям является возможность формирования таких ситуаций с достаточной полнотой. Определение ситуаций, трудных и вместе с тем типичных для изучаемых алгоритмов сегментации, является содержательной задачей. Обычным методом решения задач такого рода служит обращение к опыту исследователя. Искомые ситуации определяются в процессе анализа большого числа примеров сегментации изображений различными методами и их реализациями.

На основе полученных результатов анализа и создается набор искусственных тестовых изображений, которые в явном виде и с некоторой полнотой моделируют трудные ситуации.

Для более полной оценки качества работы алгоритмов сегментации на наборе тестовых изображений они подвергаются контролируемым искажениям. Количественная оценка качества работы алгоритмов осуществляется с помощью различных метрик. Такой подход позволяет выявить особенности работы алгоритмов, определить границы их применимости и динамику качества работы. По результатам сравнительного исследования построены графики, отображающие количественное сопоставление изучаемых алгоритмов сегментации.

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, koltsov@niisi.msk.ru

Сравнительное исследование алгоритмов сегментации выполнено на реализациях четырех известных методов сегментации, основанных на решении минимизационной задачи для функционала, обычно называемого в соответствии со своим содержательным смыслом энергетическим.

Статья имеет следующую структуру.

В разд. 2 кратко описана и проиллюстрирована примерами задача сегментации изображений.

В разд. 3 описывается использованный подход к оценке качества сегментации.

В разд. 4 приводятся наборы искусственных изображений, использованных для тестирования алгоритмов сегментации.

В разд. 5 излагаются методики анализа результатов сегментации, кратко описаны применяемые метрики.

В разд. 6 ссылочно описаны алгоритмы сегментации, подвергнутые сравнительному исследованию.

В разд. 7 приводятся результаты исследования.

Раздел 8 посвящен выводам.

## 2 Задача сегментации изображений

Основными понятиями, используемыми при решении задач сегментации изображений на основе некоторой однородности являются сегмент, регион, сегментная карта, границы. Результатом работы алгоритма сегментации (так называемого сегментатора) над исходным изображением является новое изображение — сегментная карта, содержащая области равномерной закраски. На рис. 1, взятом из статьи [1], приведены примеры изображений сегментной карты и регионов. Исходное изображение показано на рис. 1, *а*. Результатом применения алгоритма сегментации является изображение рис. 1, *б* — сегментная карта. На ней можно видеть однотонно закрашенные области. Такие области на сегментной карте называются сегментами. При

наложении сегментной карты на исходное изображение границы ее сегментов оконтуривают на нем области, которые называются регионами. Границами регионов служат границы сегментов. Для удобства рассмотрения на рис. 1, *в* границы регионов нанесены на исходное изображение.

Таким образом, алгоритм сегментации строит по исходному изображению сегментную карту и выполняет разбиение исходного изображения на регионы. Создание сегментной карты на основе исходного изображения является общим свойством всех сегментаторов, которые будут рассмотрены в статье.

Количество сегментов, получаемых на сегментной карте, определяется особенностями конкретного сегментатора. В наиболее простых алгоритмах число сегментов задается априорно, в более сложных оно определяется автоматически. В некоторых случаях вводится ограничение (обычно сверху) на число сегментов.

Сегментаторы, базирующиеся на энергетическом функционале, строят как монохромные, так и цветные сегментные карты. Цвета и уровни яркости сегментов, назначаемые сегментатором, являются условными и могут быть достаточно далеки от цветов и яркостей соответствующих регионов исходного изображения. В сущности, яркость или цвет, который сегментатор назначает данному сегменту, является просто номером этого сегмента на сегментной карте.

Обычно сегменты строятся в зависимости от уровня яркости областей изображения, их цвета, текстуры или размера. В основном исследователей интересуют те классы задач, в которых сегментация приводит к выделению значимых смысловых объектов.

## 3 Подход к оценке качества сегментации

Подход, развиваемый в данной статье, состоит в следующем.

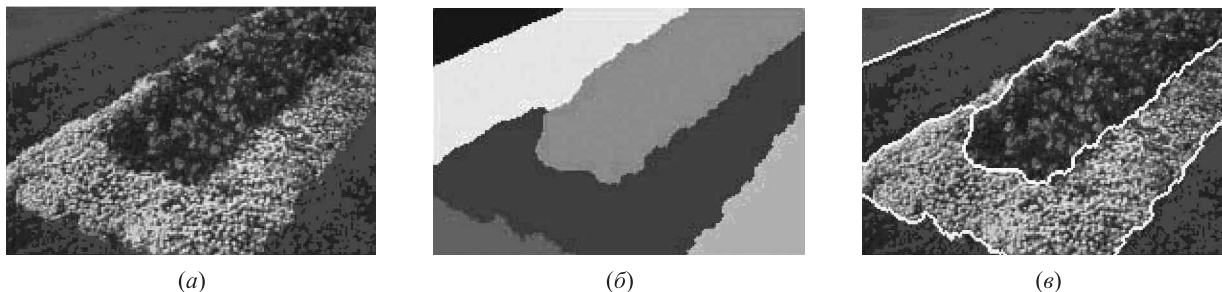


Рис. 1 Исходное изображение (*а*); сегментная карта (*б*); исходное изображение с регионами и границами (*в*)

1. Качество сегментаторов оценивается по результатам их работы на искусственных тестовых изображениях, специально сконструированных таким образом, чтобы моделировать трудные ситуации, в которых сегментаторы допускают много ошибок. При этом имеется заданный априори эталонный результат «хорошей» сегментации.
2. Для сравнения результата сегментации с эталонным используются различные метрики. В описываемой работе используются две метрики. Они обладают различными свойствами, и соответственно результаты, получаемые с помощью этих метрик, оказываются разными. Именно благодаря этому обстоятельству, сравнивая результаты измерения с помощью двух разных метрик, можно более полно установить свойства сегментаторов и более точно оценить качество сегментации.
3. Динамика качества работы сегментаторов определяется путем сравнения результата сегментации на серии тестовых изображений с вносимыми искажениями относительно априори заданного результата сегментации исходного, неискаженного изображения. В качестве искажения изображений в статье рассматривается их зашумление и размытие.

Таким образом, описанный выше подход позволяет не только выполнить сравнительную оценку качества работы различных сегментаторов, но и выявить особенности поведения такой оценки при последовательном искажении входного изображения.

## 4 Наборы искусственных изображений

Вначале рассмотрим приведенный на рис. 2 пример достаточно простого изображения, но представляющего при этом сложности для работы сегментаторов.

На рис. 2, *а* показано изображение, на котором по вертикали яркость неизменна. Вдоль горизонтального направления яркость изменяется от нуля на левом крае до 200 на правом (максимум яркости в данном формате изображения равен 255). Возрастание яркости происходит линейно с точностью до дискретизации.

При правильной сегментации такого изображения должен получаться один сегмент. Однако практика показывает, что алгоритмы сегментации создают в таких областях с медленно меняющейся яркостью несколько сегментов. Типичный пример такой сегментации показан на рис. 2, *б*. На рисунке не показаны сами сегменты, а только их границы, которые традиционно называются «ложными границами». Приведенный пример иллюстрирует трудность полутоновых изображений, в которых имеет место плавное изменение яркости, для правильной работы сегментаторов.

Основой совокупности тестовых изображений в данной статье является база данных системы PICASSO [2], в которой аккумулированы типичные ситуации, присутствующие на реальных изображениях и представляющие трудность для работы различных методов обработки изображений. В данной статье будет рассмотрено два класса тестовых изображений, взятых из базы данных сис-

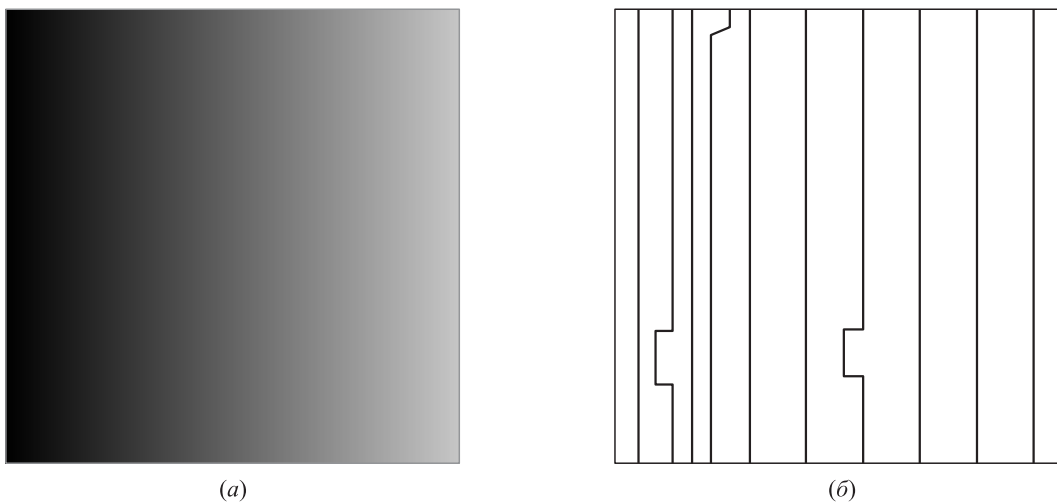


Рис. 2 Пример сегментации изображения с линейно изменяющейся яркостью





Рис. 3 Круг яркости 150 на фоне 30 (а) и Угол 80° яркости 50 на фоне 200 (б)

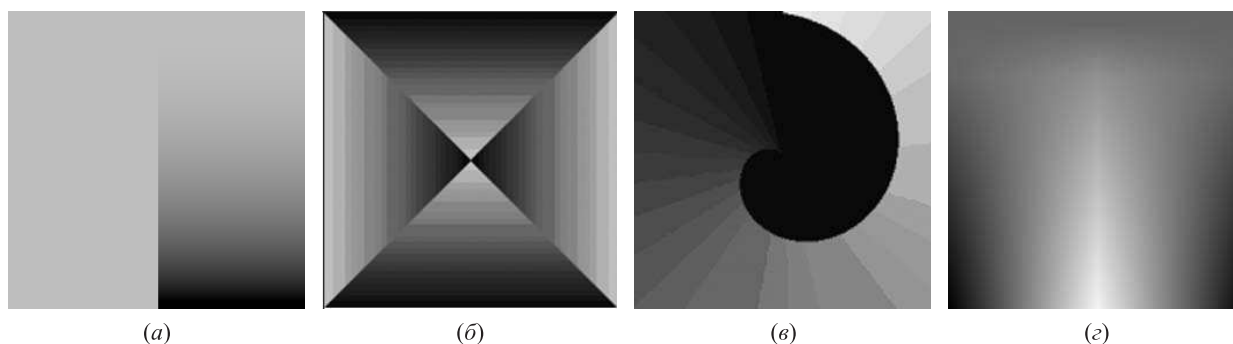


Рис. 4 Изображения Step (а), Junction (б), Snail (в) и Roof (г)

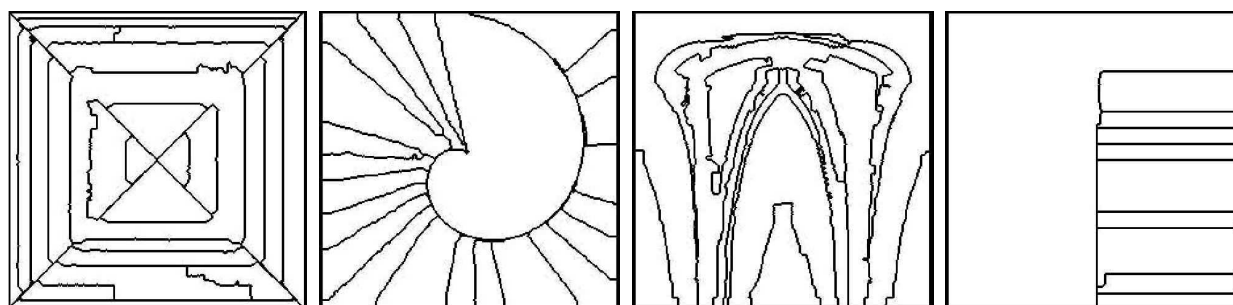


Рис. 5 Сегментация при гауссовом зашумлении, девиация зашумления 4

темы PICASSO, которые можно условно назвать «простыми» и «сложными». В простых изображениях нет плавных изменений яркости, все границы резко очерчены, число регионов — два. Сложные изображения являются полутоновыми.

На рис. 3 приведены примеры простых изображений, использованных в статье — *Круг* и *Угол*.

На рис. 4 приведены примеры сложных изображений, использованных в статье, — *Step*, *Junction*, *Snail* и *Roof*. Для каждого тестового изображения из

обоих классов было построено по два однопараметрических семейства новых изображений.

Первое семейство строилось путем добавления к исходным изображениям гауссова шума. Значение девиации шума  $\sigma$  служило параметром семейства. Второе семейство строилось путем гауссова размытия тех же изображений. Параметром семейства служил радиус окна размытия  $r$ .

В качестве иллюстрации на рис. 5 показан типичный пример работы сегментатора на зашумлен-



ных сложных изображениях. Сегментные карты на рисунке опущены, показаны только границы полученных сегментов.

## 5 Методики анализа результатов сегментации

Поскольку различные сегментаторы по-разному закрашивают сегменты, а даже один и тот же сегментатор может изменять закраску сегментов при внесении искажений в изображения, то для сравнения результатов сегментации необходимо перейти к более универсальным объектам, чем сегмент. Очевидно, что таким наиболее естественным объектом является граница сегмента, которая представляет собой набор точек, никак не зависящих от закраски сегментов. Именно границы сегментов и будут использоваться далее при сравнительном исследовании алгоритмов сегментации. Отметим, что однородность сегментов, получаемых при обработке изображений исследуемым классом сегментаторов, оказывается очень удобной для выполнения процедуры выделения границ, а именно:

- задача выделения границ сегментов и, соответственно, регионов практически тривиальна, если получена сегментная карта;
- будучи границами двумерных однородных областей, такие границы являются непрерывными;
- двумерная однородная область обладает ориентацией. Это означает, что для нее можно определить направление обхода граничного контура. После этого можно достаточно легко отследить все ее граничные точки, организовав их в одномерную кривую. При этом граница трактуется как упорядоченный массив.

В статье сравнение результатов сегментации основывается на измерении расстояний между кривыми. Для этого используется среднее расстояние  $d$  и хаусдорфово расстояние  $\chi$ .

Напомним, что среднее расстояние  $d(X, Y)$  и хаусдорфово расстояние  $\chi(X, Y)$  между множествами  $X$  и  $Y$  определяются следующим образом:

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{N_X} \sum_{x \in X} \rho(x, Y) + \frac{1}{N_Y} \sum_{y \in Y} \rho(y, X) \right];$$

$$\chi(X, Y) = \max \left[ \max_{x \in X} \rho(x, Y), \max_{y \in Y} \rho(y, X) \right].$$

Здесь  $\rho(x, Y)$  — расстояние от точки  $x \in X$  до множества  $Y$ :  $\rho(x, Y) = \min_{y \in Y} \rho(x, y)$ , а  $\rho(x, y)$  — обычное

евклидово расстояние между точками  $x$  и  $y$ ,  $N_X$  и  $N_Y$  — число точек в  $X$  и  $Y$ .

Если величина  $\chi(X, Y)$  дает скорее максимальное расстояние между точками множеств, то  $d(X, Y)$  дает некоторое среднее расстояние и является тем, что принято называть термином «мера различия» (discrepancy measure). Очевидно,  $d(X, Y) \geq 0$ ,  $d(X, X) = 0$  и  $d(X, Y) = d(Y, X)$ .

Рассмотрим подробнее свойства расстояния  $d(X, Y)$  и его сходство и различие с расстоянием  $\chi(X, Y)$ .

Если  $X$  и  $Y$  — одноточечные множества на плоскости, то  $d(X, Y)$  совпадает с обычным евклидовым расстоянием между точками  $X$  и  $Y$ . Если  $X$  и  $Y$  — отрезки, являющиеся противоположными сторонами прямоугольника, то  $d(X, Y)$  совпадает с обычным расстоянием между этими сторонами.

Пусть множество  $X$  состоит из одной точки  $x$ , а  $Y$  — из двух точек:  $x$  и  $y$ , причем евклидово расстояние между  $x$  и  $y$  равно  $r$ . В этом случае  $\chi(X, Y) = r$ .

Найдем среднее расстояние. Поскольку  $\rho(x, Y) = 0$  в силу того, что  $x \in Y$ , а  $\rho(y, X) = r$ , то очевидно, что  $d(X, Y) = r/4$ . Здесь учтено, что  $N_Y = 2$ . Если бы точка  $x$  не принадлежала множеству  $Y$ , то среднее расстояние, как и хаусдорфово, было бы равно  $r$ . Таким образом, наличие во множестве  $Y$  удаленной точки  $y$  не так сильно сказывается на среднем расстоянии, как на хаусдорфовом.

Сходство и различие между  $\chi$  и  $d$  проиллюстрировано на рис. 6. Здесь множество  $X$  — отрезок  $AB$ , а множество  $Y$  — отрезок  $CD$ .

Отметим, что если множества  $X$  и  $Y$  — точки граничных кривых двух разных изображений и координаты точек задаются как координаты пикселей, то и расстояния  $d$  и  $\chi$  также измеряются в пикселях. Поскольку в процессе нахождения этих расстояний используется евклидова метрика с вы-

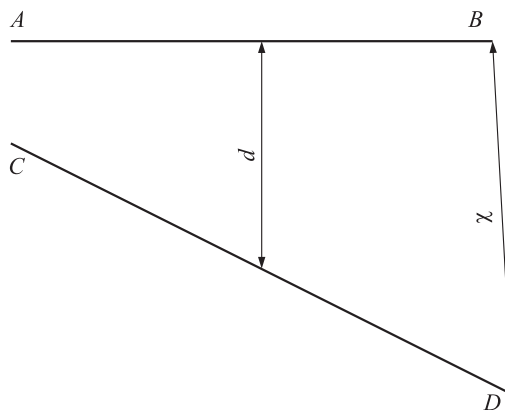


Рис. 6 Сходство и различие между  $\chi$  и  $d$

числением квадратного корня, то величины  $d$  и  $\chi$  могут быть нецелыми числами.

Далее будем считать, что  $X$  — это множество наперед заданных граничных точек на эталонном (ground truth) изображении, а  $Y$  — множество граничных точек, которые получены после работы сегментатора. В идеальном случае множество  $X$  должно совпадать с  $Y$ , но в типичном случае множество  $Y$  хотя и близко к  $X$ , но имеет некоторое количество точек, удаленных от  $X$ .

Из рассмотренных выше примеров можно сделать следующие предположения относительно качества работы сегментатора:

1. Если обе величины  $\chi(X, Y)$  и  $d(X, Y)$  в некотором естественном смысле малы, то полученные сегментатором границы близки к границам на эталонном изображении, причем на сегментной карте, построенной сегментатором, практически нет ни ложных границ, ни прочих посторонних сегментов, отсутствующих на эталонном изображении.
2. Если значение  $\chi(X, Y)$  велико, а  $d(X, Y)$  — мало, то на сегментной карте имеются посторонние сегменты, например шумовые пятна, в том числе удаленные от границ на эталонном изображении, но их размер невелик.
3. Если и  $\chi(X, Y)$ , и  $d(X, Y)$  велико, то либо размер посторонних сегментов большой, либо граничные кривые значительно удалены друг от друга.
4. Ситуация, когда среднее расстояние велико, а хаусдорфово — мало, по всей видимости, невозможна.

В качестве иллюстрации приведем результаты типичной работы сегментатора на простом изображении *Круг*, подвергнутом гауссову зашумлению. На рис. 7 представлены только границы полученных сегментов. Как видно, из-за наличия зашумления появились мелкие посторонние сегменты. Идеальной же границей эталонного изображения в данном случае является окружность.

Отметим, что в хаусдорфовой метрике расстояние между фигурой на рис. 7 и окружностью может быть велико, поскольку посторонние объекты значительно удалены от окружности. Однако среднее расстояние оказывается небольшим вследствие усреднения, поскольку размер посторонних сегментов мал.

Таким образом, по паре расстояний  $\chi$  и  $d$  можно более полно судить о качестве проведенной сегментации, чем только по одному из них.

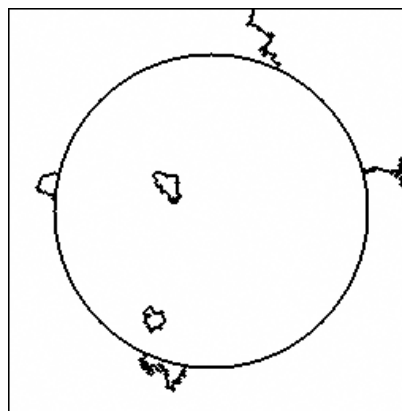
На основании вышесказанного была использована следующая методика сравнительного исследо-

вания сегментаторов. Пусть  $I$  — некоторое исходное изображение, а  $I_\sigma$  — изображение с добавленным гауссовым шумом с девиацией  $\sigma$ ,  $\{I_\sigma\}$  — множество изображений  $I_\sigma$  с различными значениями девиации  $\sigma$ , принадлежащими некоторому конечному набору. Пусть в результате обработки сегментатором множества  $\{I_\sigma\}$  получается множество сегментных карт  $S\{I_\sigma\}$ . Находя на каждой сегментной карте из  $S\{I_\sigma\}$  граничные точки, получаем множество граничных точек сегментов  $B(S\{I_\sigma\})$ . Обозначим через  $B(I)$  множество граничных точек исходного эталонного изображения  $I$ . Вычисляем среднее расстояние  $d = d(B(I), B(S\{I_\sigma\}))$  и хаусдорфово  $\chi = \chi(B(I), B(S\{I_\sigma\}))$  для каждого значения девиации  $\sigma$ . Полученные значения  $d$  и  $\chi$  как функции  $\sigma$  могут быть изображены в виде графиков для последующего анализа.

Если при сравнительном исследовании используется несколько исходных изображений, то функции  $d = d(\sigma)$  и  $\chi = \chi(\sigma)$  вычисляются отдельно для каждого из них и усредняются для каждого из значений девиации  $\sigma$  по всем исходным изображениям. Такое усреднение способствует более объективному отражению особенностей исследуемого сегментатора.

Методика сравнительного исследования сегментаторов при размытии изображений совпадает с вышеизложенной для зашумления, в которой вместо девиации шума  $\sigma$  рассматривается радиус окна гауссова размытия  $r$ .

Рассмотрим отдельно вопрос о выборе множества граничных точек  $B(I)$  исходного эталонного изображения  $I$ . В случае, когда  $I$  относится к классу простых изображений, например *Угол* или *Круг*, для него легко построить идеальные граничные линии эталонного изображения и определить их в качестве  $B(I)$ . Но для изображений из класса



**Рис. 7** Пример сегментации простого изображения *Круг* при зашумлении

сложных, таких как *Step*, *Junction*, *Snail* и *Roof*, даже при обработке неискаженного изображения все алгоритмы сегментации дают границы, сильно отличающиеся от предполагаемых идеальных. Причина состоит в наличии областей с медленно изменяющейся яркостью, обработка которых создает для всех методов сегментации значительные трудности. Поэтому для данного класса тестовых изображений в работе, представленной в статье, исследуется вопрос, насколько результат сегментации искаженного сложного изображения отличается от результата сегментации исходного изображения. Иными словами, на изображениях *Step*, *Junction*, *Snail* и *Roof* изучается устойчивость сегментатора. В этом случае в качестве  $B(I)$  берутся границы, полученные при сегментации исходного изображения  $I$ . Таким образом, методика тестирования на простых и сложных изображениях отличается, и поэтому графики для изображений *Круг* и *Угол* и для изображений *Step*, *Junction*, *Snail* и *Roof* будут приведены отдельно.

Необходимо отметить, что эксперименты с оценкой качества работы сегментаторов показали, что они обладают определенной нестабильностью работы. Небольшие изменения при переходе от одного тестового изображения к последующему могут приводить к заметным изменениям всего результата сегментации. Например, при линейном увеличении максимальной яркости левого изображения на рис. 2 число ложных границ может в некоторых пределах скачкообразно и увеличиваться, и уменьшаться. Аналогичное явление происходит и при сегментации зашумленных и размытых изображений. Такая ситуация приводит к тому, что графики  $d(\sigma)$  и  $\chi(\sigma)$  получаются негладкими и неудобными для анализа. Поэтому в качестве графиков строились более информативные линии тренда, представляющие собой стандартное полиномиальное приближение исходных точек.

## 6 Тестируемые методы сегментации

Изложенная выше методика исследования качества работы сегментаторов была опробована на примере хорошо известных реализаций четырех методов сегментации, базирующихся на разных видах энергетического функционала, описание которых можно найти в [1–8].

### 6.1 Сегментатор JSEG

Сегментатор JSEG [9] ориентирован на автоматическую сегментацию изображений и видео, кото-

рые могут содержать цветные регионы и текстуры. Обработка изображения состоит из двух независимых шагов: цветовой квантизации и пространственной сегментации. Собственно сегментация выполняется с использованием метода растущих областей. В числе опций сегментатора имеются опции обработки полутоновых изображений, в том числе и бестекстурных, что и было использовано. Рабочие параметры сегментатора могут устанавливаться самим сегментатором. В ходе исследования качества работы этого сегментатора такие параметры и были использованы.

### 6.2 Сегментатор EDISON

Сегментатор EDISON [10] выполняет сегментацию изображений, выделение границ, а также фильтрацию шума, сохраняющую резкие перепады яркости изображения. Алгоритм, реализованный в сегментаторе, определяет границы на изображении и использует их в процессе сегментации. Одним из основных параметров сегментатора является минимальный размер региона в пикселах, который может создать данный метод. При исследовании значения этого параметра брались равными 100 и 1000. Соответственно, при исследовании сегментаторы обозначались как EDISON 100 и EDISON 1000. Остальные рабочие параметры фиксировались так же, как и у авторов сегментатора.

### 6.3 Сегментатор EDGEFLOW

Для сегментации и выделения границ изображения сегментатор EDGEFLOW [11] реализует метод потока граничных точек. Суть его состоит в том, что в каждой точке изображения вычисляется направление изменения яркости, цвета или текстуры. Это позволяет формировать векторное поле потока граничных точек. Интегральные кривые этого поля, проходя через области изображения, образуют гомогенные регионы, сталкиваются друг с другом и, стабилизируясь, формируют границы регионов. Сегментатор имеет параметр, существенно влияющий на его работу — так называемое смещение. При исследовании качества работы этого сегментатора значения параметра брались равными 10 и 26. Соответственно при исследовании сегментаторы обозначались как EDGEFLOW 10 и EDGEFLOW 26.

### 6.4 Сегментатор MULTISCALE

При обработке сегментатором MULTISCALE [12] изображение вначале анализируется в более грубом масштабе, а затем — в более мелком.

При рассмотрении изображения в грубом масштабе шум и помехи мало заметны. При рассмотрении изображения в более мелком масштабе лучше заметны детали объектов. Объединение этих двух подходов позволяет фильтровать шум и сохранять важные детали изображения. Сегментатор имеет большое число рабочих параметров. В соответствии с рекомендациями, приведенными в описании сегментатора, при исследовании качества его работы были взяты значения, описанные как безопасные.

## 7 Результаты тестирования

### 7.1 Зашумление изображений

Для тестирования качества работы сегментаторов на простых и сложных изображениях к ним аддитивно был добавлен гауссов шум с девиацией от 0 до 30 с шагом 1. Таким образом было получено множество тестовых изображений.

На рис. 8 приведены графики  $d(\sigma)$  и  $\chi(\sigma)$  по всем исследованным сегментаторам при обработке простых изображений *Круг* и *Угол* (см. рис. 3). Граничные кривые, полученные после сегментации данных изображений, сравнивались с границами эталонных изображений, которые очевидны и не приводятся. Здесь и далее графики представлены как линии тренда результатов измерений. Количество маркеров на графиках уменьшено для большей разборчивости.

Из анализа графиков можно видеть, что на данных изображениях сегментатор JSEG резко выделяется среди остальных. Графики для JSEG практически лежат на горизонтальной оси, так что в данном диапазоне зашумлений этот метод работает очень хорошо по сравнению со всеми остальными. Кроме

этого, оба расстояния  $d$  и  $\chi$  для JSEG малы. Поскольку полученные при работе этого сегментатора границы сравниваются с идеальными границами эталонных изображений, можно сделать вывод, что сегментатор JSEG хорошо сохраняет форму границ.

В целом при увеличении зашумления как среднее расстояние  $d$ , так и хаусдорфово расстояние  $\chi$  растут для всех исследуемых сегментаторов. Спад некоторых графиков при больших значениях девиации шума не должен вводить в заблуждение, поскольку граничные кривые очень сильно искажены, что делает результаты сегментации недостоверными.

Можно заключить, что сегментатор EDISON лучше использовать на простых изображениях при значениях девиации не более 15–20, а сегментатор EDGEFLOW — при значениях девиации не более 3–5. Сегментатор MULTISCALE достаточно устойчив к зашумлению простых изображений: замедление роста графика среднего расстояния и некоторая тенденция к спаду начинается при значениях девиации шума 20–25.

На рис. 9 приведены графики  $d(\sigma)$  и  $\chi(\sigma)$  по всем исследованным сегментаторам при обработке сложных изображений *Step*, *Junction*, *Snail* и *Roof* (см. рис. 4). Как уже было сказано ранее, ground truth изображения, полученные после сегментации исходных изображений, в данном случае являлись эталоном для нахождения среднего и хаусдорфова расстояния.

Из анализа графиков на рис. 9 видно, что наибольшие значения расстояний получились для сегментатора EDGEFLOW 26, причем графики начинают спадать при значениях девиации 7–8. Это, по-видимому, и есть тот уровень зашумления, до которого целесообразно использовать данный сегментатор. Величины расстояний для

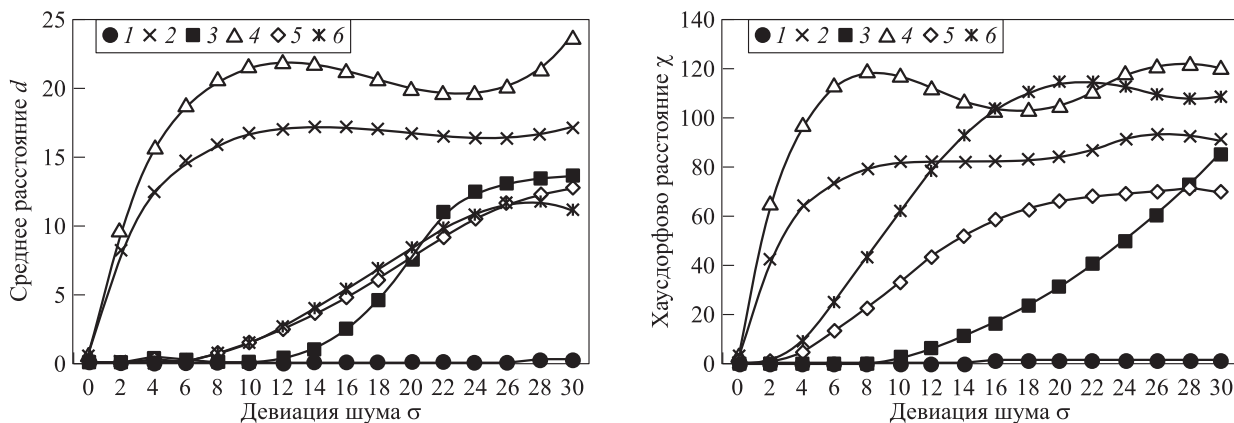


Рис. 8 Зашумление простых изображений: 1 — JSEG; 2 — EDGEFLOW 26; 3 — EDISON 1000; 4 — EDGEFLOW 10; 5 — EDISON 100; 6 — MULTISCALE



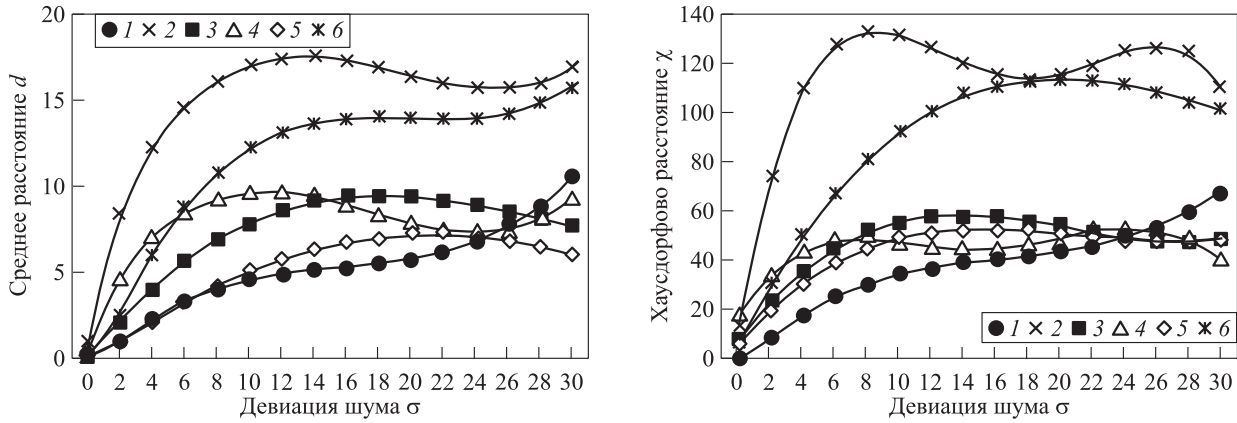


Рис. 9 Зашумление сложных изображений: 1 — JSEG; 2 — EDGEFLOW 26; 3 — EDISON 1000; 4 — EDGEFLOW 10; 5 — EDISON 100; 6 — MULTISCALE

EDGEFLOW 10 меньше, однако графики перестают расти и начинают спадать приблизительно при той же величине шума. Сегментатор MULTISCALE несколько более устойчив к зашумлению: спад графиков начинается при значениях девиации порядка 20. Но большие в целом значения расстояний  $d$  и  $\chi$  говорят о том, что при увеличении зашумления изображения этот сегментатор создает много лишних крупных сегментов. Сегментаторы EDISON и JSEG показали наилучшие результаты. Их графики лежат ниже графиков остальных методов. Графики сегментатора EDISON начинают спадать при значениях девиации 15–20. По-видимому, это предельное зашумление, до которого целесообразно использовать этот сегментатор. У сегментатора JSEG показатели несколько лучше.

Сопоставим теперь графики для простых изображений и сложных. Нетрудно видеть, что в обоих случаях лучшие показатели у сегментатора JSEG,

к которым приближаются показатели сегментатора EDISON. Оценки для предельных уровней шума, с которым методы еще можно использовать, тоже примерно одинаковы.

### 7.2 Размытие изображений

Для тестирования качества работы сегментаторов при размытии изображений был создан набор простых изображений, для которых выполнено гауссово размытие с радиусом окна от 0 до 12 пикселей с шагом 0,4 пиксела и набор сложных изображений, для которых выполнено гауссово размытие с радиусом окна от 0 до 3 пикселей с шагом 0,1 пиксела.

На рис. 10 приведены графики  $d(r)$  и  $\chi(r)$  по всем исследуемым алгоритмам при сегментации простых изображений *Круг* и *Угол*.

Как видно из анализа полученных графиков, наилучшее качество показал сегментатор EDISON:

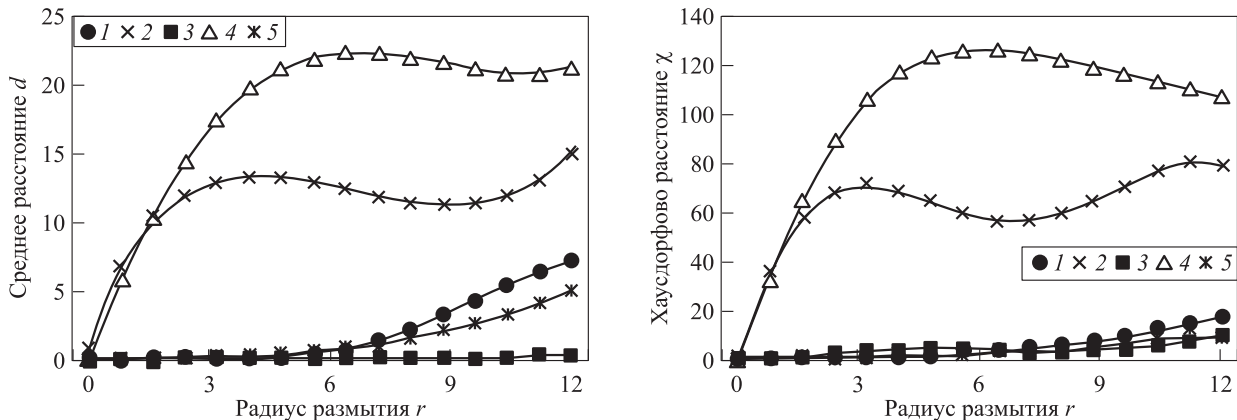
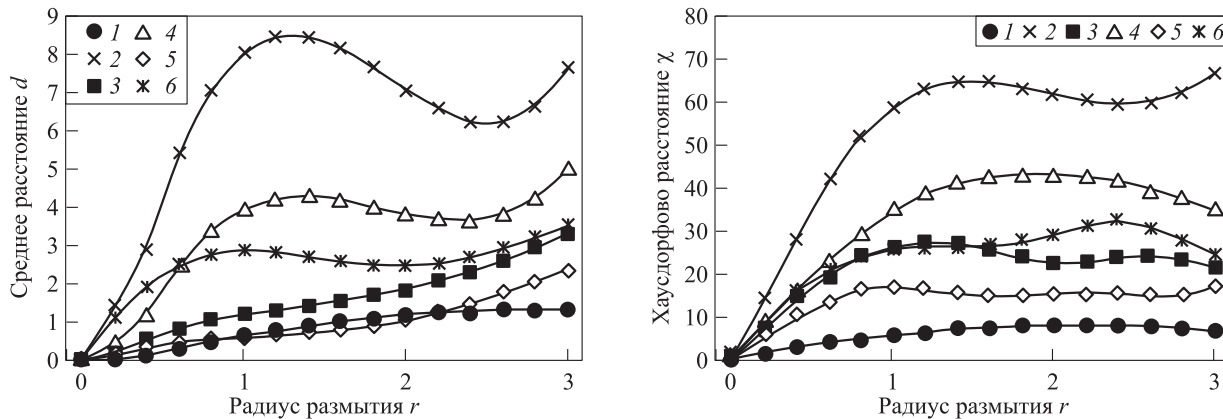


Рис. 10 Размытие простых изображений: 1 — JSEG; 2 — EDGEFLOW 26; 3 — EDISON 1000; 4 — EDGEFLOW 10; 5 — MULTISCALE



**Рис. 11** Размытие сложных изображений: 1 — JSEG; 2 — EDGEFLOW 26; 3 — EDISON 1000; 4 — EDGEFLOW 10; 5 — EDISON 100; 6 — MULTISCALE

у него значения как среднего, так и хаусдорфова расстояния наименьшие по сравнению с другими методами. Это означает точное сохранение формы границ при размытии исходного изображения. Сегментатор EDGEFLOW продемонстрировал приемлемое качество при значениях радиуса окна размытия не более 3–4, после чего на сегментной карте возникало значительное количество лишних сегментов. На это обстоятельство указывают большие значения как среднего, так и хаусдорфова расстояния. Сегментатор JSEG хорошо работает до значений радиуса 8–9. Примерно такие же показатели у сегментатора MULTISCALE. Однако следует еще раз подчеркнуть, что все эти результаты относятся к простым изображениям, на которых не создаются ложные границы.

На рис. 11 приведены графики  $d(r)$  и  $\chi(r)$  при обработке сложных изображений *Step*, *Junction*, *Snail* и *Roof*, содержащих области с медленно изменяющейся яркостью. Как видно, для всех исследуемых алгоритмов сегментация сложных изображений оказалась более трудной задачей. Обратим внимание на диапазоны значений радиуса окна размытия на графиках рис. 10 и 11. Если на рис. 10 радиус изменялся от 0 до 12 пикселей, то для получения приемлемого качества сегментации сложных изображений (см. рис. 11) пришлось ограничиться максимальным значением радиуса в 3 пиксела. Отметим, что при радиусе размытия в 2–3 пиксела значения всех расстояний, приведенных для сегментаторов на рис. 10, в несколько раз меньше расстояний, приведенных на рис. 11.

Анализ графиков на рис. 11 показывает, что при тестировании на размытых сложных изображениях наилучшее качество показал сегментатор JSEG: у него значения как среднего, так и хаусдорфова расстояния наименьшие по сравнению с другими сегментаторами. Это означает более точное сохра-

нение сегментатором формы границ при размытии исходного изображения. Сегментатор EDGEFLOW может успешно работать лишь при значениях радиуса окна размытия не более 1–1,5 пиксела. При больших значениях радиуса размытия начинает значительно изменяться количество и форма сегментов. Сегментаторы EDISON и MULTISCALE близки по своим показателям. Однако большие значения хаусдорфова расстояния при существенно меньших (в 10–20 раз) значениях среднего расстояния указывают на большое число мелких искажений (изломов) граничных линий. Сохранение границ ухудшается при значениях радиуса окна размытия, уже больших 1 пиксела.

## 8 ВЫВОДЫ

1. Применение для измерения результатов сегментации двух метрик с различными свойствами — среднего и хаусдорфова расстояния — позволяет более точно оценить качество работы сегментаторов. Подчеркнем, что при этом не идет речь об определении лучшей из двух метрик. Существенно то, что обе метрики используются одновременно и результаты измерения сопоставляются.
2. Кроме хаусдорфова и среднего расстояния, могут быть и другие способы сравнения граничных кривых. Например, подсчет числа точек на кривых, количества точек ветвления, гистограммы распределения кривизны кривых и т. п. Каждый из таких способов дает некоторую меру различия двух наборов кривых (граничных линий сегментов). Численное значение каждой такой меры является характеристикой пары изображений, а их совокупность задает вектор характеристик. Для такого многомерного вектора ха-



рактических можно выполнить исследование, аналогичное вышеизложенному, или воспользоваться иными оригинальными методами. Использование таких методов (которые можно назвать мультиметрическими) может позволить еще точнее оценить свойства сегментаторов.

3. При тестировании конкретных сегментаторов оказалось, что одной из наиболее важных проблем исследованных методов сегментации является проблема создания ложных границ на изображении с медленно изменяющейся яркостью. В этой связи разработка методов и их программных реализаций, сводящих к минимуму количество ложных границ, представляется актуальной.
4. Исследование качества работы ряда популярных сегментаторов показало, что они ведут себя неустойчиво при зашумлении и размытии изображения. Другими словами, результат сегментации даже слегка зашумленного или размытого изображения может существенно отличаться от результата сегментации исходного изображения. Таким образом, можно заключить, что целесообразно до процедуры сегментации выполнить очистку изображения от шума и повысить его четкость.
5. В статье приведены численные оценки степени искажения изображений, при которой работа сегментаторов остается удовлетворительной. В этой связи становится актуальной задача оценивания (параметрического для рассмотренных в статье случаев) искажений для изображения, подвергаемого сегментации.

## Литература

1. *Deng Y., Manjunath B. S.* Unsupervised segmentation of color-texture regions in images and video // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI'01), 2001. Vol. 23. No. 8. P. 800–810.
2. *Gribkov I. V., Koltsov P. P., Kotovich N. V., Kravchenko A. A., Kutsaev A. S., Nikolaev V. K., Zakharov A. V.* PICASSO — a system for evaluating edge detection algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis, 2003. Vol. 13. No. 4. P. 617–622.
3. *Mumford D.* The Bayesian rationale for energy functionals // Geometry driven diffusion in computer vision / Ed. B. Romeny. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. P. 141–153.
4. *Kervrann C., Hoebeke M., Trubuil A.* A level line selection approach for object boundary estimation // 7th IEEE Conference (International) on Computer Vision, ICCV'99. — Kerkyra: IEEE Computer Society Press, 1999. P. 963–968.
5. *Ma W.-Y., Manjunath B. S.* EdgeFlow: A technique for boundary detection and image segmentation // IEEE Transactions on Image Processing, 2000. Vol. 9. P. 1375–1388.
6. *Meyer F., Vachier C.* Image segmentation based on viscous flooding simulation // ISMM'02 Proceedings. — Sydney: CSIRO, 2002. P. 69–77.
7. *Christoudias C. M., Georgescu B., Meer P.* Synergism in low level vision // 16th Conference (International) on Pattern Recognition. — Quebec City: IEEE Computer Society Press, 2002. Vol. 4. P. 150–155.
8. *Sumengen B., Manjunath B. S.* Multi-scale edge detection and image segmentation // European Signal Processing Conference (EUSIPCO) Proceedings. — Antalya, 2005. <http://vision.ece.ucsb.edu/publications/05eusipcoBarisMultiscale.pdf>.
9. Сегментатор JSEG. <http://vision.ece.ucsb.edu/segmentation/jseg/>.
10. Сегментатор EDISON. <http://www.caip.rutgers.edu/riul/research/code/EDISON/>.
11. Сегментатор EDGEFLOW. <http://vision.ece.ucsb.edu/segmentation/edgeflow>.
12. Сегментатор MULTISCALE. <http://barissumengen.com/seg/>.

# О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БЕРРИ–ЭССЕЕНА ДЛЯ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ\*

В. Ю. Королев<sup>1</sup>, И. Г. Шевцова<sup>2</sup>, С. Я. Шоргин<sup>3</sup>

**Аннотация:** Для равномерного расстояния между функциями распределения  $\Phi(x)$  стандартной нормальной случайной величины и  $F_\lambda(x)$  пуассоновской случайной суммы независимых одинаково распределенных случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  с конечным третьим абсолютным моментом, где  $\lambda > 0$  — параметр пуассоновского индекса, доказано неравенство

$$\sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq 0,4532 \frac{E|X_1 - EX_1|^3}{(DX_1)^{3/2} \sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

типа оценки Берри–Эссеена, использующее центральные моменты, в отличие от ранее известных аналогичных неравенств, использующих начальные моменты.

**Ключевые слова:** пуассоновская случайная сумма; центральная предельная теорема; оценка скорости сходимости; неравенство Берри–Эссеена; абсолютная константа

## 1 Введение

Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины (с. в.) с  $E|X_1|^3 < \infty$ . Пусть  $N_\lambda$  — с. в., имеющая пуассоновское распределение с параметром  $\lambda > 0$ . Предположим, что при каждом  $\lambda > 0$  с. в.  $N_\lambda, X_1, X_2$  независимы. Случайная величина

$$S_\lambda = X_1 + \dots + X_{N_\lambda}$$

называется пуассоновской случайной суммой (для определенности полагаем  $S_\lambda = 0$ , если  $N_\lambda = 0$ ). Пуассоновские случайные суммы  $S_\lambda$  являются весьма популярными математическими моделями многих реальных объектов. В частности, в страховой математике величина  $S_\lambda$  описывает суммарное страховое требование в классическом процессе риска в «динамическом» случае. Многие примеры прикладных задач из самых разнообразных областей, в которых используются пуассоновские случайные суммы, приведены, скажем, в книгах [1, 2].

Как известно, при указанных выше условиях на моменты слагаемых распределения пуассоновских случайных сумм  $S_\lambda$  асимптотически нормальны, что обуславливает большую важность задачи изучения точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм.

Функцию распределения (ф. р.) стандартизованной пуассоновской случайной суммы

$$\tilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - ES_\lambda}{\sqrt{DS_\lambda}} = \frac{S_\lambda - \lambda EX_1}{\sqrt{\lambda EX_1^2}}$$

обозначим  $F_\lambda(x)$ . Также введем обозначения:

$$L_0 = L_0(X_1) = \frac{E|X_1 - EX_1|^3}{(DX_1)^{3/2}};$$

$$L_1 = L_1(X_1) = \frac{E|X_1|^3}{(EX_1^2)^{3/2}}.$$

Величины  $L_0$  и  $L_1$  называются соответственно центральной и нецентральной ляпуновскими дробями. Пусть  $\Phi(x)$  — ф. р. стандартного нормального закона.

Как известно, изначально оценки точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм доказывались в терминах центральных ляпуновских дробей  $L_0$  по аналогии с оценками для сумм неслучайного числа независимых с. в. Результаты такого типа можно найти, например, в [3]. Однако, как было показано

\*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 11-01-00515а, 11-07-00112а и 11-01-12026-офи-м), Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» и грантом Президента РФ МК–581.2010.1.

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, vkorolev@cs.msu.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, ishevtsova@cs.msu.ru

<sup>3</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru

позднее, при изучении нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм более естественно использовать нецентральные ляпуновские дроби  $L_1$ .

В частности, в работе [4] показано, что если для абсолютной константы  $C$  в классическом неравенстве Берри–Эссеена известна оценка  $C \leq M$ , то та же самая оценка справедлива для абсолютной константы  $C_1$  в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, использующем нецентральную ляпуновскую дробь:

$$\Delta_\lambda \equiv \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq C_1 \frac{L_1(X_1)}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

при этом  $C_1 \leq M$ . Тот же результат был независимо получен в работе [5], но с более точной оценкой  $M$ . В 2010 г. в работе [6] было показано, что привязка константы  $C_1$  к классическому неравенству Берри–Эссеена на самом деле менее жесткая, и было впервые продемонстрировано, что верхняя оценка константы  $C_1$  меньше теоретически наименьшего возможного значения  $(\sqrt{10+3})/(6\sqrt{2\pi}) = 0,4097\dots$  абсолютной константы  $C$  в классическом неравенстве Берри–Эссеена. Позднее с помощью модификации метода, использованного в [6], авторы указанной статьи показали, что  $C_1 \leq 0,3041$  [7, 8].

Необходимо отметить, что, несмотря на то что верхние оценки константы  $C_1$  в (1) изучаются уже более 30 лет (см. исторические обзоры в [7, 8]), нижние оценки для  $C_1$  получены лишь недавно в работе [9], где, в частности, было показано, что  $C_1 \geq 0,2344$ .

В 1996 г. в работе [10] было показано, что для любой с.в.  $X$  с  $E|X|^3 < \infty$  имеет место соотношение:

$$\frac{L_1(X)}{L_0(X)} \leq 2\sqrt{2} < 2,8285,$$

откуда с учетом результатов [7, 8] вытекает, что для абсолютной константы  $C_0$  в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, использующем *центральные* ляпуновские дроби,

$$\Delta_\lambda \leq C_0 \frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0, \quad (2)$$

справедлива оценка  $C_0 \leq 0,3041 \cdot 2\sqrt{2} < 0,8602$ .

Более того, в 2001 г. в работе [11] было высказано предположение, что

$$\sup_X \frac{L_1(X)}{L_0(X)} = \frac{\sqrt{17+7\sqrt{7}}}{4} = 1,48997\dots < 1,49,$$

где супремум берется по всем распределениям с.в.  $X$  с  $E|X|^3 < \infty$ , и было описано гипотетическое экстремальное распределение с.в.  $X$ .

В данной работе будет показано, что  $L_1(X)/L_0(X) \leq 1,49$  для любой с.в.  $X$  с  $E|X|^3 < \infty$ , откуда вытекает, что

$$C_0 < 0,3041 \cdot 1,49 < 0,4532,$$

что строго меньше наилучшей известной верхней оценки  $C \leq 0,4784$  абсолютной константы в классическом неравенстве Берри–Эссеена (см. [7, 8]).

## 2 Основные результаты

**Теорема 1.** Для любой с.в.  $X$  с  $E|X|^3 < \infty$  справедливо неравенство

$$L_1(X) \leq 1,49L_0(X).$$

*Доказательство.* Обозначим

$$J(X) = \frac{L_1(X)}{L_0(X)}.$$

Тогда утверждение теоремы эквивалентно тому, что  $\sup_X J(X) \leq 1,49$ , где супремум берется по всем с.в.  $X$  с  $E|X|^3 < \infty$ . Если  $EX = 0$ , то, очевидно,  $L_0(X) = L_1(X)$  и утверждение теоремы верно. Пусть теперь  $EX \neq 0$ . С учетом инвариантности ляпуновских дробей  $L_0(X)$  и  $L_1(X)$  относительно преобразований масштаба имеем

$$\begin{aligned} \sup_X J(X) &= \sup_X \sup_{a \neq 0} \sup_{X: EX=a} J(X) = \sup_{X: EX=1} J(X) = \\ &= \sup_{X: EX=0} \frac{L_1(X+1)}{L_0(X)} = \\ &= \sup_{b>0} \sup_{X: EX=0, EX^2=b^2} \frac{E|X+1|^3}{(1+b^{-2})^{3/2}E|X|^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение теоремы эквивалентно тому, что

$$\sup_{b>0} \sup_{X: EX=0, EX^2=b^2} J_b(X) \leq 0,$$

где

$$J_b(X) = E|X+1|^3 - 1,49(1+b^{-2})^{3/2}E|X|^3.$$

Из результатов работ [12–14] вытекает, что экстремум функционала моментного типа, линейного по функции распределения случайной величины  $X$ , при двух линейных ограничениях  $EX = 0$  и  $EX^2 = b^2$  моментного типа достигается на некотором трехточечном распределении. Пусть

$$\begin{aligned} P(X = x) &= p; \\ P(X = y) &= q; \\ P(X = z) &= 1 - p - q, \end{aligned}$$

где  $p, q \geq 0, p + q \leq 1, x \leq y \leq z$ . Вычисляем

## Литература

$$\begin{aligned}
 EX &= p(x - z) + q(z - y) + z; \\
 EX^2 &= p(x^2 - z^2) + q(y^2 - z^2) + z^2 \equiv \\
 &\equiv g_1(x, y, z, p, q); \\
 E|X|^3 &= p(|x|^3 - |z|^3) + q(|y|^3 - |z|^3) + |z|^3 \equiv \\
 &\equiv g_2(x, y, z, p, q); \\
 DX &= p(1 - p)(z - x)^2 + q(1 - q)(z - y)^2 - \\
 &- 2pq(z - x)(z - y) \equiv g_3(x, y, z, p, q); \\
 E|X - EX|^3 &= -p(q(z - y) - (1 - p)(z - x))^3 + \\
 &+ q|p(z - x) - (1 - q)(z - y)|^3 + \\
 &+ (1 - p - q)(p(z - x) - q(z - y))^3 \equiv \\
 &\equiv g_4(x, y, z, p, q); \\
 J(X) &= \frac{g_2(x, y, z, p, q)}{g_4(x, y, z, p, q)} \left( \frac{g_3(x, y, z, p, q)}{g_1(x, y, z, p, q)} \right)^{3/2} \equiv \\
 &\equiv g(x, y, z, p, q),
 \end{aligned}$$

причем в силу инвариантности  $J(X)$  относительно масштабного преобразования  $X$  без ограничения общности можно считать, что  $-1 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \sup_X J(X) &= \sup \{g(x, y, z, p, q) : p, q \geq 0, \\
 &p + q \leq 1, -1 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}.
 \end{aligned}$$

Численная оптимизация непрерывной функции  $g(x, y, z, p, q)$  пяти аргументов показывает, что ее максимальное значение на описанном компакте не превосходит 1,49, что и доказывает теорему.  $\square$

**Теорема 2.** При условиях, сформулированных выше, для любого  $\lambda > 0$  справедливо неравенство

$$\Delta_\lambda \leq 0,4532 \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Учитывая результат работы [8] и теорему 1, получаем

$$\begin{aligned}
 \Delta_\lambda &\leq 0,3041 \frac{L_1(X_1)}{\sqrt{\lambda}} \leq \\
 &\leq 0,3041 \sup_X \frac{L_1(X)}{L_0(X)} \frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}} \leq \\
 &\leq 0,3041 \cdot 1,49 \frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}} < 0,4532 \frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}}.
 \end{aligned}$$

1. Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random summation: Limit theorems and applications. — Boca Raton: CRC Press, 1996.
2. Bening V., Korolev V. Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance. — Utrecht: VSP, 2002.
3. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. — М.: МГУ, 1990.
4. Michel R. On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution // Insurance: Mathematics and Economics, 1993. Vol. 13. No. 1. P. 35–37.
5. Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya. On the absolute constant in the remainder term estimate in the central limit theorem for Poisson random sums // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics: 4th Petrozavodsk Conference (International) Proceedings. — Utrecht: VSP, 1997. P. 305–308.
6. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм // Докл. РАН, 2010. Т. 431. Вып. 1 С. 16–19.
7. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 25–56.
8. Korolev V., Shevtsova I. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums // Scandinavian Actuarial J. Online first: <http://www.informaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370>. June 04, 2010.
9. Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // Информатика и её применения, 2010. Т. 5. Вып. 1. С. 39–45.
10. Шоргин С. Я. О точности нормальной аппроксимации для распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами // Теория вероятностей и ее применения, 1996. Т. 41. Вып. 4. С. 920–926.
11. Shorgin S. Ya. Approximation of generalized Poisson distributions: Comparison of Lyapunov fractions // 21st Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (January 28–February 3, 2001, Eger, Hungary): Abstracts. — Publishing House of University of Debrecen, 2001. P. 166–167.
12. Hoeffding W. The extrema of the expected value of a function of independent random variables // Ann. Math. Statist., 1948. Vol. 19. P. 239–325.
13. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986.
14. Тюрин И. С. О скорости сходимости в теореме Ляпунова // Теория вероятностей и ее применения, 2010. Т. 55. Вып. 2. С. 250–270.

# ОБ ОДНОЙ ЯДЕРНОЙ ОЦЕНКЕ ПЛОТНОСТИ\*

В. Г. Ушаков<sup>1</sup>, Н. Г. Ушаков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Исследуется ядерная оценка плотности распределения, основанная на так называемом синк-ядре. Основное внимание уделено анализу среднеквадратической ошибки оценки при конечных объемах выборки. Рассмотрены проблемы оценивания моды и производных плотности.

**Ключевые слова:** непараметрическое оценивание плотности; ядерная оценка; ядро бесконечного порядка

## 1 Введение

Непараметрическое оценивание плотности вероятностных распределений с помощью ядерных оценок является одной из важнейших задач интеллектуального анализа данных, в частности при анализе трафика в телекоммуникационных системах.

Рассмотрим выборку  $X_1, \dots, X_n$ , состоящую из  $n$  независимых наблюдений, имеющих одинаковые распределения. Всюду в настоящей работе будем предполагать, что  $X_k$  имеет абсолютно непрерывное распределение. Обозначим функцию распределения, плотность распределения и характеристическую функцию соответственно  $F(x)$ ,  $f(x)$  и  $\varphi(t)$ . Ядерной оценкой плотности распределения  $f(x)$ , построенной по выборке  $X_1, \dots, X_n$ , называется случайная функция

$$\hat{f}_n(x; h) = \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^n K\left(\frac{x - X_k}{h}\right),$$

где  $K(x)$  — некоторая функция, называемая ядром;  $h$  — параметр сглаживания (неотрицательное число).

Обычно в качестве ядра выбирается плотность распределения вероятностей, т. е. неотрицательная интегрируемая функция такая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$ .

В данной работе, однако, будем иметь дело с нестандартным ядром, а именно:

$$K(x) = \frac{\sin x}{\pi x}, \quad (1)$$

где преобразование Фурье (характеристическая функция) равно

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| \leq 1; \\ 0, & \text{если } |t| > 1. \end{cases}$$

Это так называемое синк-ядро. Всюду в данной работе будем обозначать ядерную оценку с ядром (1) как  $f_n(x; h)$ . Оценка  $f_n(x; h)$  изучалась в работах [1, 2]. В [1] она исследовалась для класса плотностей, чьи характеристические функции убывают регулярно при  $|t| \rightarrow \infty$ . Было показано, что при экспоненциальном убывании скорость сходимости к нулю среднеквадратической ошибки отличается от  $1/n$  лишь медленно меняющейся функцией, т. е. ядро (1) имеет бесконечный порядок. Если  $|\varphi(t)|$  убывает «алгебраически»:  $|\varphi(t)| \sim 1/t^p$ ,  $t \rightarrow \infty$ , то, как было показано в [1], при  $p > 5$  оценка  $f_n(x; h)$  имеет лучший порядок состоятельности, чем ядерные оценки с ядрами, являющимися плотностями распределения. В [2] доказано, что оценка  $f_n(x; h)$  имеет оптимальный порядок состоятельности.

Несмотря на очень хорошие асимптотические свойства, оценка с ядром (1) не нашла пока еще широкого применения. Одной из причин является то, что, поскольку ядро принимает отрицательные значения и неинтегрируемо, реализации соответствующей ядерной оценки не являются плотностями распределения. Этот дефект, однако, легко может быть исправлен без потери точности [3]. Другая причина: не вполне понятно, при каких объемах выборки проявляются асимптотические преимущества оценки  $f_n(x; h)$ . Многие считают, что эти объемы должны быть очень велики. В настоящей работе проводится более углубленное исследование оценки с ядром (1). Получены неравенства для интегральной среднеквадратической ошибки, позволяющие оценить величину ошибки при конечных объемах выборки (в том числе в случае оценивания производных плотности). Кроме того, исследуется

\*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 11-01-00515а и 11-07-00112а), а также Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, vgushakov@mail.ru

<sup>2</sup>Институт проблем технологии микроэлектроники и особо чистых материалов Российской академии наук, ushakov@math.ntnu.no



равномерная сходимость оценки и проблема оценивания моды плотности.

Пусть  $\hat{f}(x)$  — какая-либо оценка плотности  $f(x)$ . В качестве меры точности оценки будем использовать интегральную среднеквадратическую ошибку, которую будем обозначать  $J(\hat{f})$  и которая определяется следующим образом:

$$J(\hat{f}) = E \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx.$$

Для ядерной оценки  $f_n(x; h)$  с ядром (1)  $J(f_n)$  может быть записана как (см. [2])

$$J(f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} |\varphi(t)|^2 dt + \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} (1 - |\varphi(t)|^2) dt. \quad (2)$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части является интегрированным квадратом смещения оценки, а второе — интегрированной дисперсией. Всюду в данной работе будем предполагать, что квадрат оцениваемой плотности интегрируем. В противном случае  $J(f_n) = \infty$  и исследование оценки на основе интегральной среднеквадратической ошибки становится бессмысленным.

Ядра, являющиеся плотностями распределения вероятностей, будем для краткости называть стандартными ядрами.

## 2 Неравенства

Пусть  $\tilde{f}(x)$  — какая-либо оценка плотности  $f(x)$ . Обозначим интегрированный квадрат смещения и интегрированную дисперсию соответственно  $B(\tilde{f})$  и  $V(\tilde{f})$ , т. е.

$$B(\tilde{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} [E\tilde{f}(x) - f(x)]^2 dx;$$

$$V(\tilde{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{f}(x) - E\tilde{f}(x)]^2 dx.$$

В этом параграфе будут получены верхние оценки интегральной среднеквадратической ошибки, которые позволяют оценить реальный уровень погрешности при конечных объемах выборки. Определим нулевую производную функции как саму функцию. Ниже будем использовать следующий вариант равенства Парсеваля. Предположим, что плотность распределения  $f(x)$   $m$  раз дифференци-

руема,  $m \geq 0$ , а квадрат  $m$ -й производной интегрируем. Пусть  $\varphi(t)$  — соответствующая характеристическая функция. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f^{(m)}(x))^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt. \quad (3)$$

Пусть  $g(x)$  — некоторая функция, квадрат которой интегрируем. Обозначим  $R(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx$ .

**Теорема 1.** Пусть  $m$ -я производная плотности  $f(x)$  существует, а ее квадрат интегрируем. Тогда

$$J(f_n) < \varepsilon(h) h^{2m} R(f^{(m)}) + \frac{1}{\pi n h}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon(h) \leq 1$  для всех  $h$  и  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Оценим сначала первое слагаемое в правой части (2). Применяя (3), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} |\varphi(t)|^2 dt &= \\ &= h^{2m} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} (1/h)^{2m} |\varphi(t)|^2 dt \leq \\ &\leq h^{2m} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt = \\ &= h^{2m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt - \\ &- h^{2m} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt = \\ &= h^{2m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt \times \\ &\times \left( 1 - \frac{\int_{-1/h}^{1/h} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt} \right) = \\ &= \varepsilon(h) h^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} (f^{(m)}(x))^2 dx = \varepsilon(h) h^{2m} R(f^{(m)}), \end{aligned}$$



где

$$\varepsilon(h) = 1 - \frac{\int_{-1/h}^{1/h} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} |\varphi(t)|^2 dt}$$

удовлетворяет условиям теоремы:  $\varepsilon(h) \leq 1$  и  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Для второго слагаемого в правой части (2) имеем

$$\frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} (1 - |\varphi(t)|^2) dt < \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} dt = \frac{1}{\pi n h}.$$

Таким образом, получаем (4).

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$J(f_n) < h^{2m} R(f^{(m)}) + \frac{1}{\pi n h}. \quad (5)$$

Полагая в (5)

$$h = \left[ \frac{1}{2\pi n m R(f^{(m)})} \right]^{1/(2m+1)}$$

(это значение  $h$  минимизирует правую часть (5)), получаем

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{h>0} J(f_n) &< \\ &< \frac{1+2m}{(2\pi m)^{2m/(2m+1)}} R(f^{(m)})^{1/(2m+1)} n^{-2m/(2m+1)}. \end{aligned}$$

**Следствие 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\inf_{h>0} J(f_n) = o\left(n^{-2m/(2m+1)}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Следствие 4.** Если  $f(x)$  дважды дифференцируема и квадрат второй производной интегрируем, то

$$\inf_{h>0} J(f_n) = o(n^{-4/5}), \quad n \rightarrow \infty,$$

и

$$\inf_{h>0} J(f_n) < \frac{5}{4\pi} (4\pi R(f''))^{1/5} n^{-4/5}.$$

Чтобы получить более точные оценки, необходима дополнительная информация об оцениваемой плотности. Пусть  $g(x)$  — некоторая функция. Обозначим  $Vr(g)$  ее полную вариацию.

**Теорема 2.** Если  $f(x)$   $m$  раз дифференцируема ( $m \geq 0$ ), и ее  $m$ -я производная имеет ограниченную полную вариацию, то

$$J(f_n) \leq h^{2m+1} \frac{Vr(f^{(m)})^2}{(2m+1)\pi} + \frac{1}{\pi n h}. \quad (6)$$

**Доказательство.** Для всех  $t$  [4]

$$|\varphi(t)| \leq \frac{Vr(f^{(m)})}{|t|^{m+1}}.$$

Применяя это неравенство, оценим первое слагаемое в правой части (2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} |\varphi(t)|^2 dt &\leq \frac{Vr(f^{(m)})^2}{\pi} \int_{1/h}^{\infty} \frac{dt}{t^{2m+2}} = \\ &= \frac{Vr(f^{(m)})^2}{(2m+1)\pi} h^{2m+1}. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в правой части (2) имеем (см. доказательство теоремы 1)

$$\frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} (1 - |\varphi(t)|^2) dt < \frac{1}{\pi n h}.$$

Таким образом, получаем (6).

**Следствие.** Если выполнены условия теоремы 2, то

$$\begin{aligned} \inf_{h>0} J(f_n) &\leq \\ &\leq \frac{2(m+1)}{(2m+1)\pi} Vr(f^{(m)})^{1/(m+1)} n^{-(2m+1)/(2m+2)}. \end{aligned}$$

Например, если  $m = 2$ , получаем

$$\inf_{h>0} J(f_n) \leq \frac{6}{5\pi} Vr(f'')^{1/3} n^{-5/6},$$

что по порядку лучше, чем в случае стандартных оценок ( $n^{-4/5}$ ).

Следуя Ватсону и Лидбеттеру [5] и Дэвис [1] будем говорить, что характеристическая функция  $\varphi(t)$  убывает экспоненциально с показателем  $\alpha$  и коэффициентом  $\rho$  ( $\rho > 0, 0 < \alpha \leq 2$ ), если

$$|\varphi(t)| \leq A e^{-\rho|t|^\alpha}, \quad (7)$$

где  $A$  — постоянная. В [1] доказано (теорема 4.1), что если для характеристической функции оцениваемой плотности выполняется (7), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h e^{\rho/h^\alpha} |B(f_n)| = 0.$$

Теорема 3 уточняет это утверждение.

**Теорема 3.** Если

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho|t|^\alpha} |\varphi(t)|^2 dt = C < \infty,$$

то

$$J(f_n) \leq \varepsilon(h) C e^{-\rho/h^\alpha} + \frac{1}{\pi n h}, \quad (8)$$

где  $0 < \varepsilon(h) < 1$  и  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Для первого слагаемого в правой части (2) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} |\varphi(t)|^2 dt < \\ & < e^{-\rho/h^\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} e^{\rho|t|^\alpha} |\varphi(t)|^2 dt = \varepsilon(h) C e^{-\rho/h^\alpha}, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon(h) = 1 - \frac{\int_{-1/h}^{1/h} e^{\rho|t|^\alpha} |\varphi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho|t|^\alpha} |\varphi(t)|^2 dt}.$$

Второе слагаемое оцениваем так же, как в доказательстве теоремы 1.

Трудно найти в явном виде значение  $h$ , минимизирующее правую часть (8), поэтому возьмем такое  $h$ , при котором правая часть (8) имеет простой вид, а именно:

$$h = \left( \frac{1}{\rho} \ln n \right)^{-1/\alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(f_n) & < \left( C + \frac{(\ln n)^{1/\alpha}}{\pi \rho^{1/\alpha}} \right) \frac{1}{n} < \\ & < \left( C + \frac{1}{\pi \rho^{1/\alpha}} \right) \frac{(\ln n)^{1/\alpha}}{n} \end{aligned}$$

при условии, что  $n > 2$ . Если, например,  $f(x)$  — стандартная нормальная плотность распределения, то

$$J(f_n) < \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) \frac{\sqrt{\ln n}}{n}.$$

**Следствие.** Пусть характеристическая функция  $\varphi(t)$  убывает экспоненциально с показателем  $\alpha$  и коэффициентом  $\rho$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{c\rho/h^\alpha} |B(f_n)| = 0$$

для любого  $c < 2$ .

### 3 Оценивание производных

Те преимущества, которые имеет оценка  $f_n(x; h)$  по сравнению со стандартными ядерными оценками, особенно проявляются в случае, когда оценивается не сама плотность, а ее производная. Предположим, что  $f(x)$  является  $r$  раз дифференцируемой и необходимо оценить  $r$ -ю производную  $f^{(r)}(x)$ . Естественной оценкой является  $r$ -я производная ядерной оценки плотности  $f(x)$  (при условии, что ядро  $r$  раз дифференцируемо). Далее, пусть

$$\hat{f}_n(x; h) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right)$$

есть ядерная оценка плотности  $f(x)$  и существует производная  $K^{(r)}(x)$ . Тогда в качестве оценки производной  $f^{(r)}(x)$  берется

$$\hat{f}_n^{(r)}(x; h) = \frac{1}{nh^{r+1}} \sum_{j=1}^n K^{(r)}\left(\frac{x - X_j}{h}\right).$$

Пусть  $J(\hat{f}_n^{(r)})$  — интегральная среднеквадратическая ошибка  $\hat{f}_n^{(r)}(x)$  как оценки производной  $f^{(r)}(x)$ , т. е.

$$J(\hat{f}_n^{(r)}) = \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \hat{f}_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \right]^2 dx.$$

Если  $K(x)$  — стандартное ядро, то интегральная среднеквадратическая ошибка оценки  $\hat{f}_n^{(r)}(x; h)$  может быть записана следующим образом (при условии, что  $f(x)$  имеет  $r + 2$  производные и дисперсия ядра конечна):

$$\begin{aligned} J(\hat{f}_n^{(r)}) & = \frac{1}{4} h^4 \mu_2^2 R(f^{(r+2)}) + \frac{1}{nh^{2r+1}} R(K^{(r)}) + \\ & + o\left(h^4 + \frac{1}{nh^{2r+1}}\right), \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где  $\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x) dx$ . То есть при оптимальном выборе параметра сглаживания порядок ошибки равен  $n^{-4/(2r+5)}$  и он существенно ухудшается с ростом  $r$ . В данном параграфе будет показано, что оценка  $\hat{f}_n^{(r)}(x; h)$ , основанная на ядре (1), при определенных условиях почти свободна от этого недостатка или во всяком случае в гораздо меньшей степени подвержена ему.

**Лемма 1.** Для синк-оценки

$$J(f_n^{(r)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>1/h} t^{2r} |\varphi(t)|^2 dt + \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} t^{2r} (1 - |\varphi(t)|^2) dt. \quad (9)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\varphi_n(t)$  выборочную характеристическую функцию, т. е.

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itX_j}.$$

Применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned} J(f_n^{(r)}) &= \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} (f_n^{(r)}(x; h) - f^{(r)}(x))^2 dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2r} |\varphi_n(t) I_{[-1/h, 1/h]}(t) - \varphi(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left[ (\varphi_n(t) I_{[-1/h, 1/h]}(t) - \varphi(t)) (\overline{\varphi_n(t)} I_{[-1/h, 1/h]}(t) - \overline{\varphi(t)}) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} t^{2r} \mathbb{E} |\varphi_n(t)|^2 dt - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-1/h}^{1/h} t^{2r} \left( \varphi(t) \overline{\mathbb{E} \varphi_n(t)} + \overline{\varphi(t)} \mathbb{E} \varphi_n(t) \right) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2r} |\varphi(t)|^2 dt. \quad (10) \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\mathbb{E} \varphi_n(t) = \varphi(t); \quad (11)$$

$$\overline{\mathbb{E} \varphi_n(t)} = \overline{\varphi(t)}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\varphi_n(t)|^2 &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itX_j} \right|^2 = \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itX_j} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-itX_k} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n^2} \left[ n + \sum_{j \neq k} e^{it(X_j - X_k)} \right] = \\ &= \frac{1}{n} + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) |\varphi(t)|^2. \quad (13) \end{aligned}$$

Подставляя (11)–(13) в правую часть (10), получаем (9).

Применяя лемму 1, получаем аналоги теорем предыдущего параграфа для случая оценивания производных.

**Теорема 4.** Если  $f(x)$   $r + m$  раз дифференцируема и квадрат ее  $(r + m)$ -й производной интегрируем, то

$$J(f_n^{(r)}) < \varepsilon(h) h^{2m} R(f^{(r+m)}) + \frac{1}{\pi(2r+1)nh^{2r+1}},$$

где  $\varepsilon(h) \leq 1$  для всех  $h$  и  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{h>0} J(f_n^{(r)}) &\leq \\ &\leq C_{m,r} R(f^{(r+m)})^{(2r+1)/(2r+2m+1)} n^{-2m/(2r+2m+1)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{m,r} &= (2\pi m)^{-2m/(2r+2m+1)} + \\ &+ \frac{(2\pi m)^{(2r+1)/(2r+2m+1)}}{\pi(2r+1)}. \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Пусть

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2r} e^{\rho|t|^\alpha} |\varphi(t)|^2 dt = C < \infty.$$

Тогда

$$J(f_n^{(r)}) \leq \varepsilon(h) C e^{-\rho/h^\alpha} + \frac{1}{\pi n h^{2r+1}},$$

где  $0 < \varepsilon(h) < 1$  и  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда

$$\inf_{h>0} J(f_n^{(r)}) < \left( C + \frac{(\ln n)^{(2r+1)/\alpha}}{\pi \rho^{(2r+1)/\alpha}} \right) \frac{1}{n}.$$

**Теорема 6.** Пусть характеристическая функция  $\varphi(t)$  плотности  $f(x)$  удовлетворяет условию: существует  $T > 0$  такое, что  $f(t) = 0$  при  $|t| > T$ . Тогда если

$$h \leq \frac{1}{T},$$

то

$$J(f_n^{(r)}) \leq \frac{1}{\pi n h^{2r+1}}.$$

В частности, если  $h = \text{const} = 1/T$ , то

$$J(f_n^{(r)}) \leq \frac{T^{2r+1}}{\pi n}.$$

Доказательства теорем 4–6 сходны с доказательствами предыдущего параграфа, и авторы оставляют их читателю.

## 4 Равномерная состоятельность и оценивание моды

В данном параграфе будет доказано, что оценка  $f_n(x; h)$  равномерно состоятельна: она сходится по вероятности к оцениваемой плотности распределения равномерно на всей действительной прямой. Кроме того, докажем, что мода оценки является состоятельной оценкой моды оцениваемой плотности.

Пусть  $K(x)$  — симметричное и дифференцируемое стандартное ядро (т. е. ядро, являющееся плотностью распределения вероятностей) с конечной дисперсией  $\sigma^2$ . Предположим, что производная ядра имеет конечную полную вариацию, которую обозначим  $v$ . Характеристическую функцию ядра и ядерную оценку, основанную на этом ядре, обозначим соответственно  $\psi(t)$  и  $\hat{f}_n(x; h)$ .

**Лемма 2.** Если характеристическая функция  $\varphi(t)$  интегрируема:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty,$$

то

$$\sup_x |f_n(x; h) - \hat{f}_n(x; h)| \xrightarrow{a.s.} 0$$

при  $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, nh \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \sup_x |f_n(x; h) - \hat{f}_n(x; h)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(ht)| \cdot |\varphi_n(t) - \varphi(t)| dt + \right. \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| \cdot |\psi(ht) - I_{[-1/h, 1/h]}(t)| dt + \\ &\left. + \int_{-1/h}^{1/h} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

Докажем, что каждый из трех интегралов в правой части сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, nh \rightarrow \infty$ . Обозначим эти интегралы соответственно  $I_1, I_2$  и  $I_3$ . Тогда

$$I_1 \leq \int_{|t| \leq n^2} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| dt + 4 \int_{n^2}^{\infty} |\psi(ht)| dt.$$

Первый интеграл в правой части сходится почти наверное к нулю при  $n \rightarrow \infty$  в силу теоремы 1 из [6]. Чтобы оценить второй интеграл, применим неравенство

$$|\psi(t)| \leq \frac{v}{|t|^2},$$

справедливое для всех  $t$  [4]. Применяя это неравенство, получаем

$$\int_{n^2}^{\infty} |\psi(ht)| dt \leq \frac{v}{n^2 h^2} \rightarrow 0$$

при  $nh \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $I_1 \xrightarrow{a.s.} 0$  при  $n \rightarrow \infty, nh \rightarrow \infty$ ;

$$I_2 \leq 2 \int_0^{1/\sqrt{h}} [1 - \psi(ht)] dt + 4 \int_{1/\sqrt{h}}^{\infty} |\varphi(t)| dt.$$

Второй интеграл в правой части стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ , поскольку функция  $|\varphi(t)|$  интегрируема. Чтобы оценить первый интеграл, используем неравенство

$$\psi(t) \geq 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2},$$

справедливое для всех  $t$  (см., например, [7]). Применяя это неравенство, получаем

$$\int_0^{1/\sqrt{h}} [1 - \psi(ht)] dt \leq \frac{\sigma^2}{6} \sqrt{h} \rightarrow 0$$

при  $h \rightarrow 0$ . Таким образом,  $I_2 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Наконец, если  $nh \rightarrow \infty$ , то  $1/h \leq cn$ , где  $c$  — некоторая постоянная, и, следовательно,

$$I_3 \leq \int_{|t| \leq cn} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| dt \xrightarrow{a.s.} 0$$

при  $n \rightarrow \infty$  в силу указанной выше теоремы 1 из [6]. Таким образом, все три интеграла стремятся к нулю, что доказывает лемму.

**Замечание.** Из условия леммы об интегрируемости функции  $\varphi$  следует, что плотность  $f(x)$  равномерно непрерывна, однако оно несколько более ограничительно. Выполняется, например, в том случае, когда  $f(x)$  дифференцируема и ее производная  $f'(x)$  имеет ограниченную вариацию.

**Теорема 6.** Если  $\varphi(t)$  интегрируема, то

$$\sup_x |f_n(x; h) - f(x)| \xrightarrow{P} 0 \quad (14)$$

при  $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, nh^2 \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $K(x)$  — произвольное стандартное ядро, удовлетворяющее условиям леммы 2 и теоремы 3А работы [8]. Тогда в силу указанной теоремы 3А

$$\sup_x \left| \hat{f}_n(x; h) - f(x) \right| \xrightarrow{P} 0 \quad (15)$$

при  $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, nh^2 \rightarrow \infty$  и в силу леммы 2

$$\sup_x |f_n(x; h) - \hat{f}_n(x; h)| \xrightarrow{P} 0 \quad (16)$$

при  $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, nh^2 \rightarrow \infty$ . Из (15) и (16) очевидным образом следует (14).

Обозначим  $\theta$  моду плотности распределения  $f(x)$ . Предположим, что она единственна. Пусть  $\theta_n$  — мода оценки  $f_n(x; h)$ .

**Теорема 7.** Если  $\varphi(t)$  интегрируема, то

$$\theta_n \xrightarrow{P} \theta$$

при  $n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, nh^2 \rightarrow \infty$ .

**Доказательство** теоремы аналогично доказательству второй части теоремы 3А из [8].

## Литература

1. *Davis K. B.* Mean square error properties of density estimates // *Ann. Statist.*, 1975. Vol. 3. No. 4. P. 1025–1030.
2. *Davis K. B.* Mean integrated square error properties of density estimates // *Ann. Statist.*, 1977. Vol. 5. No. 3. P. 530–535.
3. *Glad I. K., Hjort N. L., Ushakov N. G.* Correction of density estimators that are not densities // *Scand. J. Statist.*, 2003. Vol. 30. No. 2. P. 415–427.
4. *Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Некоторые неравенства для характеристических функций плотностей с ограниченной вариацией // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2000. № 3. С. 40–45.
5. *Watson G. S., Leadbetter M. R.* On the estimation of the probability density I // *Ann. Math. Statist.*, 1963. Vol. 34. P. 480–491.
6. *Csörgö S., Totik V.* On how long interval is the empirical characteristic function uniformly consistent? // *Acta Sci. Math.*, 1983. Vol. 45. P. 141–149.
7. *Ushakov N. G.* Selected topics in characteristic functions. — Utrecht: VSP, 1999.
8. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and its mode // *Ann. Math. Statist.*, 1962. Vol. 33. No. 3. P. 1065–1076.



# О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫБОРОЧНОГО АБСОЛЮТНОГО МЕДИАННОГО ОТКЛОНЕНИЯ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ\*

О. В. Шестаков<sup>1</sup>

**Аннотация:** Получены оценки скорости сходимости распределения выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону в общем и симметричном случае.

**Ключевые слова:** порядковые статистики; выборочная медиана; абсолютное медианное отклонение; нормальное распределение; оценка скорости сходимости

## 1 Введение

Абсолютное медианное отклонение от медианы представляет собой меру разброса, которую можно использовать, например, в тех случаях, когда дисперсия не существует. Для выборочного абсолютного медианного отклонения получены результаты, касающиеся сходимости почти всюду (п. в.) и асимптотической совместной нормальности выборочного абсолютного медианного отклонения и выборочной медианы, а также экспоненциальные оценки вероятностей больших отклонений и разложение Бахадура [1–4]. В данной работе будут получены некоторые оценки скорости сходимости выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону.

Введем необходимые обозначения. Пусть случайная величина  $X$  имеет функцию распределения  $F$ . Медиана  $F$  определяется как  $m^* = F^{-1}(1/2) = \inf\{x : F(x) \geq 1/2\}$ . Если функция  $F$  непрерывна в точке  $m^*$ , то  $F(m^*) = 1/2$ . Медиану функции распределения  $H$  случайной величины  $|X - m^*|$  (т. е.  $H(y) = F(m^* + y) - F(m^* - y)$ ) обозначим через  $M^*$ . Величина  $M^*$  называется абсолютным медианным отклонением от медианы функции распределения  $F$ .

Выборочные аналоги медианы и абсолютного медианного отклонения определяются следующим образом. Пусть  $\{X_1, \dots, X_n\}$  — независимая выборка из распределения  $F$ , а  $\{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\}$  — соответствующий ей ряд из порядковых статистик. Тогда выборочная медиана равна

$$\text{med}_n = \frac{1}{2} \left( X_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)} + X_{(\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor)} \right).$$

Обозначим через  $\{Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}\}$  ряд из упорядоченных значений  $Z_i = |X_i - \text{med}_n|$ ,  $1 \leq i \leq n$ . То-

гда выборочное абсолютное медианное отклонение равно

$$\text{MAD}_n = \frac{1}{2} \left( Z_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)} + Z_{(\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor)} \right).$$

Преимуществом  $\text{med}_n$  и  $\text{MAD}_n$  как мер центра и разброса значений случайной величины является их робастность, т. е. устойчивость по отношению к выбросам. При определенных условиях имеет место сходимость  $\text{med}_n$  и  $\text{MAD}_n$  п. в. к  $m^*$  и  $M^*$  соответственно [1, 3]. Кроме того, довольно слабые ограничения на регулярность  $F$  обеспечивают асимптотическую совместную нормальность  $\text{med}_n$  и  $\text{MAD}_n$  [2]. В работах [3, 5] получены экспоненциальные неравенства для вероятностей больших отклонений  $\text{med}_n$  и  $\text{MAD}_n$  от  $m^*$  и  $M^*$ , а недавно получен сильный (п. в.) вариант разложения Бахадура для  $\text{MAD}_n$  [4]. В данной работе приведены оценки скорости сходимости выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону. Причем в случае симметричного распределения  $F$  оценка имеет лучший порядок, чем в общем случае. Для простоты изложения будем рассматривать вместо  $\text{med}_n$  и  $\text{MAD}_n$  выборочные квантили, т. е. величины  $\hat{m}_n$  и  $\hat{M}_n$ , которые определяются как  $\hat{m}_n = \hat{F}_n^{-1}(1/2) = \inf\{x : \hat{F}_n(x) \geq 1/2\}$  и  $\hat{M}_n = \hat{H}_n^{-1}(1/2) = \inf\{y : \hat{H}_n(y) \geq 1/2\}$ , где  $\hat{F}_n$  — выборочная функция распределения, соответствующая распределению  $F$ , а  $\hat{H}_n(y) = \hat{F}_n(\hat{m}_n + y) - \hat{F}_n(\hat{m}_n - y)$ . Это позволяет рассматривать в определениях выборочной медианы и выборочного абсолютного медианного отклонения одну порядковую статистику вместо полусуммы порядковых статистик. Можно показать, что все результаты данной работы останутся справедливыми и для величин  $\text{med}_n$  и  $\text{MAD}_n$ .

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11-01-00515а и 11-01-12-26-офи-м).

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, oshestakov@cs.msu.ru

## 2 Оценка скорости сходимости абсолютного медианного отклонения к нормальному закону

Оценки скорости сходимости выборочных квантилей (включая выборочную медиану) к нормальному закону известны довольно давно (см., например, [5, 6]). Используя разложение Бахадура [7], полученное в работе [4], можно получить оценку скорости сходимости соответствующим образом центрированного и нормированного выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону.

**Теорема 1.** Пусть функция распределения  $F$  в окрестности точек  $m^*$  и  $m^* \pm M^*$  имеет непрерывную положительную плотность  $f$  и ограниченную вторую производную  $F''$ . Тогда существует такая константа  $C^*$ , что начиная с некоторого  $n$

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left( \frac{2h(M^*)f(m^*)}{(f^2(m^*) + g_F(M^*))^{1/2}} n^{1/2}(\hat{M}_n - M^*) \leq t \right) - \Phi(t) \right| \leq C^* n^{-1/4} (\ln n)^{3/4}, \quad (1)$$

где  $g_F(M^*) = [f(m^* - M^*) - f(m^* + M^*)]^2 - 4[1 - F(m^* - M^*) - F(m^* + M^*)]f(m^*)$ , а  $\Phi(t)$  — функция распределения стандартного нормального закона.

**Доказательство.** В работе [4] получено следующее представление (разложение Бахадура) для  $\hat{M}_n$ :

$$\hat{M}_n - M^* \stackrel{n.s.}{=} Y_n + R_n,$$

где

$$Y_n = \frac{1/2 - [\hat{F}_n(m^* + M^*) - \hat{F}_n(m^* - M^*)]}{h(M^*)} - \frac{f(m^* - M^*) - f(m^* + M^*)}{h(M^*)} \frac{1/2 - \hat{F}_n(m^*)}{f(m^*)},$$

а  $R_n$  — остаточный член, о котором будет сказано ниже. Величина  $Y_n$  представляет собой среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин, причем математическое ожидание  $Y_n$  равно нулю, а дисперсия равна  $\sigma^2/n$ , где

$$\sigma^2 = \frac{f^2(m^*) + g_F(M^*)}{4[h(M^*)f(m^*)]^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left( \frac{n^{1/2}}{\sigma} (\hat{M}_n - M^*) \leq t \right) - \Phi(t) \right| \leq \\ & \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left( \frac{n^{1/2}}{\sigma} Y_n \leq t \right) - \Phi(t) \right| + \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2\pi}} + \\ & \quad + \mathbf{P} \left( |n^{1/2} R_n| > \sigma \varepsilon_n \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_n = Bn^{-1/4}(\ln n)^{3/4}$  с некоторой константой  $B$ , ограничения на которую будут наложены ниже. Оценим  $\mathbf{P}(|n^{1/2} R_n| > \sigma \varepsilon_n)$ . Величина  $R_n$  имеет следующую структуру [4]:

$$R_n = \frac{\Delta_n^{(1)} - \Delta_n^{(2)} + \Delta_n^{(3)} + \Delta_n^{(4)} - \Delta_n^{(5)} + \Delta_n^{(6)}}{h(M^*)},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(1)} &= \hat{F}_n(\hat{m}_n + \hat{M}_n) - \hat{F}_n(\hat{m}_n - \hat{M}_n) - \frac{1}{2}; \\ \Delta_n^{(2,3)} &= F(\hat{m}_n \pm \hat{M}_n) - F(m^* \pm M^*) - \\ & \quad - f(m^* \pm M^*)[\hat{m}_n \pm \hat{M}_n - (m^* \pm M^*)]; \\ \Delta_n^{(4,5)} &= F(\hat{m}_n \pm \hat{M}_n) - F(m^* \pm M^*) - \\ & \quad - [\hat{F}_n(\hat{m}_n \pm \hat{M}_n) - \hat{F}_n(m^* \pm M^*)]; \\ \Delta_n^{(6)} &= \left( \hat{m}_n - m^* - \frac{1/2 - \hat{F}_n(m^*)}{f(m^*)} \right) \times \\ & \quad \times [f(m^* - M^*) - f(m^* + M^*)]. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( |n^{1/2} R_n| > \sigma \varepsilon_n \right) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^6 \mathbf{P} \left( |n^{1/2} \Delta_n^{(i)}| > \frac{\sigma h(M^*) \varepsilon_n}{6} \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Пользуясь ограниченностью  $F''$ , можно показать [3–5], что найдутся такие константы  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , что начиная с некоторого  $n$  (в зависимости от величины  $F''$  в окрестности точек  $m^*$  и  $m^* \pm M^*$ )

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( |n^{1/2} \Delta_n^{(i)}| > \frac{\sigma h(M^*) \varepsilon_n}{6} \right) \leq \\ & \leq \frac{C_i (\ln n)^{1/2}}{n^{1/4}}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (4) \end{aligned}$$

если  $B > \max\{B_1, B_2\}$ , где

$$\begin{aligned} B_1 &> 6[\sigma h(M^*)]^{-1} (2D_1 D_2)^{1/2}; \\ B_2 &> 6[\sigma h(M^*)]^{-1} \times \\ & \quad \times |f(m^* - M^*) - f(m^* + M^*)| (2D'_1 D'_2)^{1/2}; \end{aligned}$$

$$D_1 > \min \left\{ \frac{2}{f(m^*)}, \frac{2}{h(M^*)} \right\};$$

$$D_2 > \max \{f(m^* + M^*), f(m^* - M^*)\};$$

$$D'_1 > \frac{1}{2f(m^*)};$$

$$D'_2 > f(m^*).$$

Кроме того, в силу неравенства Берри–Эссеена найдется такая константа  $C_7$ , что для первого слагаемого в (2) справедливо

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( \frac{n^{1/2}}{\sigma} Y_n \leq t \right) - \Phi(t) \right| \leq \frac{C_7}{n^{1/2}}. \quad (5)$$

Объединяя (2)–(5), получаем (1). Теорема доказана.

### 3 Случай симметричного распределения

В случае, когда функция распределения  $F$  симметрична относительно медианы, оценку, приведенную в теореме 1, можно улучшить.

**Теорема 2.** Пусть функция распределения  $F$  симметрична относительно медианы  $m^*$  и в окрестности точек  $m^*$  и  $m^* \pm M^*$  имеет непрерывную положительную плотность  $f$  и ограниченную вторую производную  $F''$ . Тогда существует такая константа  $\tilde{C}^*$ , что начиная с некоторого  $n$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( 2h(M^*)n^{1/2}(\hat{M}_n - M^*) \leq t \right) - \Phi(t) \right| \leq \tilde{C}^* n^{-1/2} \ln n, \quad (6)$$

где  $\Phi(t)$  — функция распределения стандартного нормального закона.

**Доказательство.** Обозначим

$$G_n(t) = \mathbb{P} \left( 2h(M^*)n^{1/2}(\hat{M}_n - M^*) \leq t \right).$$

Положим  $A_n = A(\ln n)^{1/2}$ , где  $A$  — некоторая константа, ограничения на которую будут наложены позднее. Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{|t| > A_n} |G_n(t) - \Phi(t)| &= \max \left\{ \sup_{t > A_n} |G_n(t) - \Phi(t)|, \right. \\ &\quad \left. \sup_{t < -A_n} |G_n(t) - \Phi(t)| \right\} \leq \\ &\leq \max \{1 - G_n(A_n) + 1 - \Phi(A_n), \\ &\quad G_n(-A_n) + \Phi(-A_n)\} \leq \\ &\leq G_n(-A_n) + 1 - G_n(A_n) + 1 - \Phi(A_n) = \\ &= \mathbb{P} \left( \left| \hat{M}_n - M^* \right| \geq \frac{A_n n^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) + 1 - \Phi(A_n). \quad (7) \end{aligned}$$

Известно [5], что

$$1 - \Phi(t) \leq \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}t} \quad \text{при } t > 0,$$

поэтому

$$1 - \Phi(A_n) \leq \frac{e^{-A_n^2/2}}{\sqrt{2\pi}A_n} \leq (2\pi n \ln n)^{-1/2},$$

если  $A \geq 1$ . Чтобы оценить первое слагаемое в (7), воспользуемся экспоненциальным неравенством для медианного абсолютного отклонения, доказанного в работе [3]:

$$\mathbb{P} \left( \left| \hat{M}_n - M^* \right| \geq \varepsilon \right) \leq 6e^{-2n\Delta_{\varepsilon,n}^2}. \quad (8)$$

Здесь  $\Delta_{\varepsilon,n} = \min\{a, b, c, d\}$ , где

$$a = F \left( m^* + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{1}{2}; \quad b = \frac{1}{2} - F \left( m^* - \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

$$c = H \left( M^* + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{1}{2}; \quad d = \frac{1}{2} - H \left( M^* - \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Возьмем  $\varepsilon = \varepsilon_n = A_n n^{-1/2} [2h(M^*)]^{-1}$ . Воспользуемся формулой Тейлора и тем, что  $F(m^*) = 1/2$  и  $H(M^*) = 1/2$ , получаем

$$a = \frac{1}{2} f(m^*) \varepsilon_n + \frac{1}{8} F''(t_1^*) \varepsilon_n^2;$$

$$b = \frac{1}{2} f(m^*) \varepsilon_n - \frac{1}{8} F''(t_2^*) \varepsilon_n^2,$$

где  $t_1^*$  лежит между  $m^*$  и  $m^* + \varepsilon_n$ , а  $t_2^*$  лежит между  $m^*$  и  $m^* - \varepsilon_n$ . Аналогично

$$c = \frac{1}{2} h(M^*) \varepsilon_n + \frac{1}{8} H''(t_3^*) \varepsilon_n^2;$$

$$d = \frac{1}{2} h(M^*) \varepsilon_n - \frac{1}{8} H''(t_4^*) \varepsilon_n^2,$$

где  $t_3^*$  лежит между  $M^*$  и  $M^* + \varepsilon_n$ , а  $t_4^*$  лежит между  $M^*$  и  $M^* - \varepsilon_n$ . Следовательно,

$$\Delta_{\varepsilon_n,n}^2 \geq \frac{1}{4} \varepsilon_n^2 \min \left\{ f^2(m^*) - \frac{M_1 f(m^*) \varepsilon_n}{2}, \right. \\ \left. h^2(M^*) - \frac{M_2 h(M^*) \varepsilon_n}{2} \right\},$$

где

$$\sup_{|z| \leq \varepsilon_n} |F''(m^* + z)| \leq M_1 < \infty;$$

$$\sup_{|z| \leq \varepsilon_n} |H''(M^* + z)| \leq M_2 < \infty.$$

Тогда

$$-2n\Delta_{\varepsilon_n, n}^2 \leq -\frac{1}{2}A^2[2h(M^*)]^{-2} \ln n \min \left\{ f^2(m^*) - \frac{M_1 f(m^*)\varepsilon_n}{2}, h^2(M^*) - \frac{M_2 h(M^*)\varepsilon_n}{2} \right\}.$$

Начиная с некоторого  $n$  (в зависимости от  $A, M_1, M_2, f(m^*)$  и  $h(M^*)$ ),

$$A^2[2h(M^*)]^{-2} \min \left\{ f^2(m^*) - \frac{M_1 f(m^*)\varepsilon_n}{2}, h^2(M^*) - \frac{M_2 h(M^*)\varepsilon_n}{2} \right\} \geq 1$$

при  $A > 2h(M^*) \min \{ [f(m^*)]^{-1}, [h(M^*)]^{-1} \}$ . Следовательно, для этих  $n$

$$\mathbf{P} \left( |\hat{M}_n - M^*| \geq \varepsilon_n \right) \leq 6n^{-1/2}; \quad (9)$$

$$\sup_{|t| > A_n} |G_n(t) - \Phi(t)| \leq 6n^{-1/2} + (2\pi n \ln n)^{-1/2} \quad (10)$$

при

$$A > \max \{ 1, 2h(M^*) \min \{ [f(m^*)]^{-1}, [h(M^*)]^{-1} \} \}.$$

Рассмотрим теперь  $\sup_{|t| \leq A_n} |G_n(t) - \Phi(t)|$ . Имеем

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \mathbf{P} \left( 2h(M^*)n^{1/2}(\hat{M}_n - M^*) \leq t \right) = \\ &= \mathbf{P} \left( \hat{M}_n \leq M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) = \\ &= \mathbf{P} \left( \frac{1}{2} \leq \hat{H}_n \left( M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) \right) = \\ &= \mathbf{P} \left( \frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n I \left( \hat{m}_n - M^* - \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \leq X_i \leq \hat{m}_n + M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq A_n} |G_n(t) - \Phi(t)| &= \\ &= \sup_{|t| \leq A_n} \left| \mathbf{P} \left( \frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n I \left( \hat{m}_n - M^* - \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \leq X_i \leq \hat{m}_n + M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) \right) - \Phi(t) \right| = \\ &= \sup_{|t| \leq A_n} \left| \mathbf{P} \left( \frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n I(m^* + (\hat{m}_n - m^*) - \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- M^* - \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \leq X_i \leq \\ &\left. \leq m^* + (\hat{m}_n - m^*) + M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) - \Phi(t) \Big|. \end{aligned}$$

Обозначим события под индикатором через  $B_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq A_n} |G_n(t) - \Phi(t)| &= \\ &= \sup_{|t| \leq A_n} \left| \mathbf{P} \left( \frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n I(B_i), |\hat{m}_n - m^*| \leq \varepsilon_n \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{P} \left( \frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n I(B_i) \mid |\hat{m}_n - m^*| > \varepsilon_n \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{P}(|\hat{m}_n - m^*| > \varepsilon_n) - \Phi(t) \right| \leq \\ &\leq \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} \left| \mathbf{P} \left( \frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n I(m^* + \varepsilon - M^* - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \leq X_i \leq m^* + \varepsilon + M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) \right) - \\ &\quad \left. - \Phi(t) \right| + \mathbf{P}(|\hat{m}_n - m^*| > \varepsilon_n). \quad (11) \end{aligned}$$

Для второго слагаемого при соответствующих ограничениях на  $n$  и  $A$  справедливы оценки, аналогичные (8) и (9) [5]:

$$\mathbf{P}(|\hat{m}_n - m^*| \geq \varepsilon_n) \leq 2n^{-1/2}. \quad (12)$$

Оценим первое слагаемое в (11). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon, n, t} &= F \left( m^* + \varepsilon + M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) - \\ &\quad - F \left( m^* + \varepsilon - M^* - \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right); \\ S(D_{\varepsilon, n, t}) &= \sum_{i=1}^n I \left( m^* + \varepsilon - M^* - \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \leq X_i \leq m^* + \varepsilon + M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right); \\ S^*(D_{\varepsilon, n, t}) &= \frac{S(D_{\varepsilon, n, t}) - nD_{\varepsilon, n, t}}{[nD_{\varepsilon, n, t}(1 - D_{\varepsilon, n, t})]^{1/2}}; \\ x_{\varepsilon, n, t} &= \frac{n^{1/2}(D_{\varepsilon, n, t} - 1/2)}{[D_{\varepsilon, n, t}(1 - D_{\varepsilon, n, t})]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Сумма  $S(D_{\varepsilon,n,t})$  представляет собой биномиальную случайную величину с параметрами  $(n, D_{\varepsilon,n,t})$ , поэтому в силу неравенства Берри–Эссеена

$$\begin{aligned} & \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} \left| \mathbf{P} \left( \frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n I \left( m^* + \varepsilon - M^* - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \leq X_i \leq m^* + \varepsilon + M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \Phi(t) \right| = \\ & = \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |\mathbf{P}(S^*(D_{\varepsilon,n,t}) \geq -x_{\varepsilon,n,t}) - \Phi(t)| = \\ & = \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |1 - \Phi(t) - \mathbf{P}(S^*(D_{\varepsilon,n,t}) < \\ & < -x_{\varepsilon,n,t})| \leq \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |\Phi(-x_{\varepsilon,n,t}) - \\ & - \mathbf{P}(S^*(D_{\varepsilon,n,t}) < -x_{\varepsilon,n,t})| + \\ & + \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |\Phi(x_{\varepsilon,n,t}) - \Phi(t)| \leq \\ & \leq \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} \left| n^{-1/2} C_0 \rho(D_{\varepsilon,n,t}) \right| + \\ & + \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |\Phi(x_{\varepsilon,n,t}) - \Phi(t)|, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho(D_{\varepsilon,n,t}) &= \frac{\mu^3(D_{\varepsilon,n,t})}{\sigma^3(D_{\varepsilon,n,t})} = \frac{(1 - D_{\varepsilon,n,t})^2 + D_{\varepsilon,n,t}^2}{[D_{\varepsilon,n,t}(1 - D_{\varepsilon,n,t})]^{1/2}}, \\ \mu^3(D_{\varepsilon,n,t}) &= D_{\varepsilon,n,t}(1 - D_{\varepsilon,n,t}) [(1 - D_{\varepsilon,n,t})^2 + \\ & + D_{\varepsilon,n,t}^2], \\ \sigma^2(D_{\varepsilon,n,t}) &= D_{\varepsilon,n,t}(1 - D_{\varepsilon,n,t}), \end{aligned}$$

а  $C_0$  — константа из неравенства Берри–Эссеена. Обозначим:

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(y) &= F(m^* + \varepsilon + y) - F(m^* + \varepsilon - y); \\ h_\varepsilon(y) &= f(m^* + \varepsilon + y) + f(m^* + \varepsilon - y); \\ g_\varepsilon(z) &= [H_\varepsilon(M^* + z) - H_\varepsilon^2(M^* + z)]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} g'_\varepsilon(z) &= -\frac{1}{2} h_\varepsilon(M^* + z) [1 - 2H_\varepsilon(M^* + z)] \times \\ & \times [H_\varepsilon(M^* + z) - H_\varepsilon^2(M^* + z)]^{-3/2}; \\ [D_{\varepsilon,n,t}(1 - D_{\varepsilon,n,t})]^{-1/2} &= g_\varepsilon(0) + g'_\varepsilon(z^*) \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)}, \end{aligned}$$

где  $z^*$  лежит между 0 и  $tn^{-1/2}/[2h(M^*)]$ . Величины

$$\begin{aligned} g_n &= \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |g_\varepsilon(0)| \\ g_n^* &= \sup_{|z| \leq A_n n^{-1/2}/[2h(M^*)], |\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |g'_\varepsilon(z)| \end{aligned}$$

конечны (по крайней мере, начиная с некоторого  $n$ ). Более того,

$$g_n \rightarrow 2 \text{ и } g_n^* \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, величина

$$\rho_n = \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |\rho(D_{\varepsilon,n,t})|$$

также конечна. Более того,

$$\rho(D_{\varepsilon,n,t}) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, первое слагаемое в (13) имеет порядок  $C_n n^{-1/2}$ , где величина  $C_n$  ограничена и  $C_n \rightarrow C_0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Далее по формуле Тейлора получаем

$$\begin{aligned} n^{1/2} \left( D_{\varepsilon,n,t} - \frac{1}{2} \right) &= \\ &= n^{1/2} \left( H_\varepsilon \left( M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) - \frac{1}{2} \right) = \\ &= n^{1/2} \left( H_\varepsilon \left( M^* + \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) - H_\varepsilon(M^*) + \right. \\ & \left. + H_\varepsilon(M^*) - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{t}{2h(M^*)} \left( h_\varepsilon(M^*) + \frac{H''_\varepsilon(y^*)}{4h(M^*)} tn^{-1/2} \right) + \\ &+ n^{1/2} (F(m^* + \varepsilon + M^*) - F(m^* + \varepsilon - M^*) - \\ & - (F(m^* + M^*) - F(m^* - M^*))) , \end{aligned}$$

где  $y^*$  лежит между  $M^*$  и  $M^* + tn^{-1/2}/(2h(M^*))$ . Учитывая симметричность распределения  $F$ , имеем:

$$\begin{aligned} F(m^* + \varepsilon + M^*) - F(m^* + \varepsilon - M^*) - (F(m^* + M^*) - \\ - F(m^* - M^*)) = \frac{F''(z^*) - F''(z^{**})}{2} \varepsilon^2, \end{aligned}$$

где  $z^*$  лежит между  $m^* + M^*$  и  $m^* + M^* + \varepsilon$ , а  $z^{**}$  лежит между  $m^* - M^*$  и  $m^* - M^* + \varepsilon$ .

Далее в силу симметричности  $F$

$$g_\varepsilon(0) = 2 + \beta(\varepsilon)\varepsilon,$$

где  $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

$$h_\varepsilon(M^*) = h(M^*) + \gamma(\varepsilon)\varepsilon,$$

где  $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно,



$$\begin{aligned}
 x_{\varepsilon,n,t} &= \left( \frac{t}{2h(M^*)} \left( h_\varepsilon(M^*) + \frac{H''_\varepsilon(y^*)}{4h(M^*)} tn^{-1/2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{F''(z^*) - F''(z^{**})}{2} n^{1/2} \varepsilon^2 \right) \times \\
 &\quad \times \left( g_\varepsilon(0) + g'_\varepsilon(z^*) \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) = \\
 &= \left( 2 + \beta(\varepsilon)\varepsilon + g'_\varepsilon(z^*) \frac{tn^{-1/2}}{2h(M^*)} \right) \times \\
 &\times \left( \frac{t}{2h(M^*)} \left( h(M^*) + \gamma(\varepsilon)\varepsilon + \frac{H''_\varepsilon(y^*)}{4h(M^*)} tn^{-1/2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{F''(z^*) - F''(z^{**})}{2} n^{1/2} \varepsilon^2 \right) = t + B_{\varepsilon,n,t},
 \end{aligned}$$

где для  $B_{\varepsilon,n,t}$  с некоторой константой  $A_0$  начиная с некоторого  $n$  выполнено

$$B_n = \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |B_{\varepsilon,n,t}| \leq A_0 n^{-1/2} \ln n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \sup_{|t| \leq A_n} \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_n} |\Phi(x_{\varepsilon,n,t}) - \Phi(t)| &\leq \\
 &\leq A_0 (2\pi n)^{-1/2} \ln n. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Объединяя (7)–(14), получаем (6). Теорема доказана.

## Литература

1. *Hall P., Welsh A. H.* Limits theorems for median deviation // *Annals of the Institute of Statistical Math.*, 1985. Vol. 37. No. 1. P. 27–36.
2. *Falk M.* Asymptotic independence of median and MAD // *Stat. Prob. Lett.*, 1997. Vol. 34. P. 341–345.
3. *Serfling R., Mazumder S.* Exponential probability inequality and convergence results for the median absolute deviation and its modifications // *Stat. Prob. Lett.*, 2009. Vol. 79. No. 16. P. 1767–1773.
4. *Mazumder S., Serfling R.* Bahadur representations for the median absolute deviation and its modifications // *Stat. Prob. Lett.*, 2009. Vol. 79. No. 16. P. 1774–1783.
5. *Serfling R. J.* Approximation theorems of mathematical statistics. — New York: John Wiley & Sons, 1980.
6. *Reiss R. D.* On the accuracy of the normal approximation for quantiles // *Ann. Prob.*, 1974. Vol. 2. No. 4. P. 741–744.
7. *Bahadur R. R.* A note on quantiles in large samples // *The Annals of Math. Statistics*, 1966. Vol. 37. No. 3. P. 577–580.

# УСИЛЕННЫЕ ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ЧИСЛА БЕЗОШИБОЧНЫХ БЛОКОВ ПРИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОМ КОДИРОВАНИИ

А. Н. Чупрунов<sup>1</sup>, И. Фазекаш<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются сообщения, состоящие из блоков. Каждый блок кодируется помехоустойчивым кодом, который может исправить не более  $r$  ошибок. При этом предполагается, что количество ошибок в блоке — независимая пуассоновская величина с параметром  $\lambda$ . Кроме того, предполагается, что число ошибок в сообщении принадлежит некоторому подмножеству множества неотрицательных целых чисел. В работе получены усиленные законы больших чисел для случайной величины — числа безошибочных блоков в сообщении.

**Ключевые слова:** схема размещения; условная вероятность; закон больших чисел; код БЧХ

## 1 Введение и основные результаты

Будем рассматривать код, который позволяет исправить не больше  $r$  ошибок типа замещения. Частным случаем такого кода является код Боуза–Чоудхури–Хоквингема (БЧХ) (о кодах БЧХ см., например, в [1]). Работа посвящена изучению асимптотического поведения случайной величины  $S_{nN}$  — числа безошибочных блоков в сообщении, состоящем из  $N$  блоков, причем каждый блок подвергается помехоустойчивому кодированию, а число ошибок в сообщении принадлежит некоторому конечному подмножеству  $M_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , множества неотрицательных целых чисел  $\mathbf{M}$ .

Обозначим через  $\pi_\lambda$  пуассоновскую случайную величину с параметром  $\lambda$ ;  $\Phi$  — функцию распределения стандартной гауссовской случайной величины;  $\stackrel{d}{=}$  — равенство распределений случайных величин. Будем предполагать, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ .

Рассмотрим сообщение, состоящее из  $N$  блоков. Пусть случайная величина  $\xi_{Nj}$  — количество ошибок в  $j$ -м блоке. Будем предполагать, что  $\xi_{Nj}$ ,  $1 \leq j \leq N$ , — независимые пуассоновские случайные величины с параметром  $\lambda$ . Тогда число безошибочных блоков в сообщении — случайная величина

$$S_{nN} = \sum_{i=1}^N I_{nNi},$$

где  $I_{nNi}$  — индикатор события  $A_{nNi}$ , состоящего в том, что  $i$ -й блок сообщения имеет не более  $r$  ошибок. Заметим, что событие

$$A_{nNi} = \{\xi_{Ni} \leq r \mid \xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \in M_n\} = \cup_{l=0}^r A_{nNil},$$

где события

$$A_{nNil} = \{\xi_{Ni} = l \mid \xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \in M_n\}.$$

Обозначим  $n'_n = \sup\{n' : n' \in M_n\}$ ,  $\alpha_{nN} = n'_n/N$ .

Если множество  $M_n = \{n\}$  состоит из одного элемента, то события  $A_{nNi}$  являются событиями теории размещения различных частиц по различным ячейкам и не зависят от  $\lambda$  [2]. Подробное изложение этой теории можно найти в монографии [3]. В [4] получены усиленные законы больших чисел для событий теории размещения различных частиц по различным ячейкам. В частности, в [4] доказана

**Теорема А.** Пусть  $M_n = \{n\}$ . Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$ , где  $0 < \alpha < \infty$ . Тогда

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^r \frac{\alpha^k}{k!}$$

почти наверное.

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, achuprunov@mail.ru

<sup>2</sup>Дабреценский университет, fazekas.istvan@inf.unideb.hu

Если множества  $M_n = \mathbf{M}$ , то индикаторы  $I_{nNi} = I_{\{\xi_{Ni} \leq r\}}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , независимы. Поэтому справедлива

**Теорема Б.** Пусть  $M_n = \mathbf{M}$ . Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^r \frac{\lambda^k}{k!}$$

почти наверное.

Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Предположим, что  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$ , где  $0 < \alpha < \lambda$ . Пусть  $M_n \subset \mathbf{M}$  — такие конечные подмножества, что

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k+l \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k - l}}{\sum_{k \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k}} = B_l; \quad (1)$$

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k+2l \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k - 2l}}{\sum_{k \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k}} = (B_l)^2, \quad (2)$$

где  $B_l < \infty$ ,  $1 \leq l \leq r$ . Положим  $B_0 = 1$ . Тогда

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^r \frac{\alpha^k}{k!} B_k \quad (3)$$

в  $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ .

**Следствие.** Пусть  $M_n$  — такие конечные подмножества  $\mathbf{M}$ , что  $M_n \subset M_{n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , и  $\cup_{n=1}^{\infty} M_n = \mathbf{M}$ . Предположим, что  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$ , где  $0 < \alpha < \lambda$ . Тогда

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^r \frac{\alpha^k}{k!}$$

в  $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ .

**Теорема 2.** Пусть множества  $M_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\alpha > \lambda$ . Тогда

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty, \lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^r \frac{\lambda^k}{k!}$$

почти наверное.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая теорема. В ней показано что, если множества  $M_n = \{0, 1, \dots, n\}$ , то для «маленьких»  $\alpha_{nN}$  справедлив аналог теоремы А, а для «больших»  $\alpha_{nN}$  — аналог теоремы Б.

**Теорема 3.** Пусть  $M_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Предположим, что  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$ , где  $0 < \alpha < \infty$ .

(А) Пусть  $\alpha < \lambda$ . Тогда

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^r \frac{\alpha^k}{k!}$$

по вероятности.

(В) Пусть  $\alpha > \lambda$ . Тогда

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^r \frac{\lambda^k}{k!}$$

почти наверное.

**Замечание 1.** Заметим, что  $|(1/N)S_{nN}| \leq 1$ . Поэтому по теореме Лебега в условиях теоремы 1

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^r \frac{\alpha^k}{k!} B_k$$

в пространстве  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  для любого  $0 < p < \infty$ , а в условиях теоремы 2

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^r \frac{\lambda^k}{k!}$$

в пространстве  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  для любого  $0 < p < \infty$ .

## 2 Доказательства

Для доказательства теоремы 1 потребуется следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $0 < \lambda_1 < 1$ ,  $M$  — конечное подмножество  $\mathbf{M}$ . Обозначим  $n' = \sup\{n' : n' \in M\}$ . Тогда

$$\frac{\mathbf{P}\{\pi_\lambda \in M\}}{\mathbf{P}\{\pi_\lambda = n'\}} = o(1) + \sum_{k \in M} \left(\frac{n'}{\lambda}\right)^{n'-k} \quad (4)$$

равномерно при  $n', \lambda \rightarrow \infty$  так, что  $n'/\lambda \leq \lambda_1$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\pi_\lambda \in M\} &= \mathbf{P}\{\pi_\lambda = n'\} \sum_{k \in M} \frac{\lambda^k n'!}{k! \lambda^{n'}} = \\ &= \mathbf{P}\{\pi_\lambda = n'\} \sum_{k \in M} \frac{n'(n'-1) \cdots (n'-k+1)}{\lambda^{n'-k}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{n'(n'-1) \cdots (n'-k+1)}{\lambda^{n'-k}} - \left(\frac{n'}{\lambda}\right)^{n'-k} &\geq \\ &\geq -\frac{k^2}{2\lambda} \left(\frac{n'}{\lambda}\right)^{n'-k-1}, \quad k < n', \end{aligned}$$

то

$$\sum_{k \in M} \left(\frac{n'}{\lambda}\right)^{n'-k} \geq \frac{\mathbf{P}(\pi_\lambda \in M)}{\mathbf{P}(\pi_\lambda = n')} \geq \sum_{k \in M} \left(\frac{n'}{\lambda}\right)^{n'-k} - \frac{(k_0)^2}{2\lambda} \sum_{k=0}^{k_0} (\lambda_1)^k - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\lambda_1)^k, \quad k_0 < n'.$$

Это неравенство и доказывает лемму 1.

**Следствие 1.** Пусть  $0 < \lambda_1 < 1$ ,  $M_n \subset \mathbf{M}$  – такие конечные подмножества, что  $M_n \subset M_{n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , и  $\cup_{n=1}^{\infty} M_n = \mathbf{M}$ . Тогда

$$\frac{\mathbf{P}\{\pi_\lambda \in M_n\}}{\mathbf{P}\{\pi_\lambda = n'_n\}} = \frac{1}{1 - n'_n/\lambda} + o(1) \quad (5)$$

равномерно при  $n, \lambda \rightarrow \infty$  так, что  $n'/\lambda \leq \lambda_1$ .

**Доказательство.** Так как  $I_{M_n} \rightarrow I_{\mathbf{M}}$  при  $n \rightarrow \infty$  поточечно, то

$$\begin{aligned} \sum_{k \in M_n} \left(\frac{n'_n}{\lambda}\right)^{n'-k} &= \sum_{k \in \mathbf{M}} \left(\frac{n'_n}{\lambda}\right)^k + o(1) = \\ &= \frac{1}{1 - n'_n/\lambda} + o(1). \end{aligned}$$

Применяя эту оценку к левой части (4), получаем (5). Следствие доказано.

При  $M_n = \{0, 1, \dots, n\}$  из следствия 1 вытекает

**Следствие 2.** Пусть  $0 < \lambda_1 < 1$ . Тогда

$$\frac{\mathbf{P}\{\pi_\lambda \leq n\}}{\mathbf{P}\{\pi_\lambda = n\}} = \frac{1}{1 - n/\lambda} + o(1)$$

равномерно при  $n, \lambda \rightarrow \infty$  так, что  $n/\lambda \leq \lambda_1$ .

**Доказательство** теоремы 1. Пусть  $0 \leq l \leq r$ . Так как  $\xi_{N2} + \xi_{N3} + \dots + \xi_{NN}$  – пуассоновская случайная величина с параметром  $(N-1)\lambda$ , а  $\xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN}$  – пуассоновская случайная величина с параметром  $N\lambda$ , в силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{1}{N} S_{nN} &= \mathbf{E} I_{A_{nN}il} = \mathbf{P}\{A_{nN}il\} = \mathbf{P}\{\xi_{N1} = l\} \times \\ &\times \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N2} + \xi_{N3} + \dots + \xi_{NN} \in M_n - l\}}{\mathbf{P}\{\xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \in M_n\}} = \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^l \mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} \in M_n - l\}}{l! \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} \in M_n\}} = \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^l \mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} = n' - l\}}{l! \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} = n'\}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{o(1) + \sum_{k \in M_n - l} (n'_n / ((N-1)\lambda))^{n'_n - k - l}}{o(1) + \sum_{k \in M_n} (n'_n / (N\lambda))^{n'_n - k}} = \\ &= \frac{n'_n!}{l! ((n'_n - l)!) \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n'_n - l} \left(\frac{1}{N}\right)^l} \times \\ &\times \frac{o(1) + \sum_{k \in M_n - l} (n'_n / ((N-1)\lambda))^{n'_n - k - l}}{o(1) + \sum_{k \in M_n} (n'_n / (N\lambda))^{n'_n - k}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} I_{A_{nN}il} I_{A_{nN}jl} &= \\ &= \mathbf{P}(A_{nN}il \cap A_{nN}jl) = (\mathbf{P}\{\xi_{N1} = l\})^2 \times \\ &\times \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N3} + \xi_{N4} + \dots + \xi_{NN} \in M_n - 2l\}}{\mathbf{P}\{\xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \in M_n\}} = \\ &= \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!}\right)^2 \frac{\mathbf{P}\{\pi_{(N-2)\lambda} \in M_n - 2l\}}{\mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} \in M_n\}} = \\ &= \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!}\right)^2 \frac{\mathbf{P}\{\pi_{(N-2)\lambda} = n' - 2l\}}{\mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} = n'_n\}} \times \\ &\times \frac{o(1) + \sum_{k \in M_n - 2l} (n'_n / ((N-1)\lambda))^{n'_n - k - 2l}}{o(1) + \sum_{k \in M_n} (n'_n / (N\lambda))^{n'_n - k}} = \\ &= \frac{n'_n!}{(l!)^2 ((n'_n - 2l)!) \left(\frac{N-2}{N}\right)^{n'_n - 2l} \left(\frac{1}{N}\right)^{2l}} \times \\ &\times \frac{o(1) + \sum_{k \in M_n - 2l} (n'_n / ((N-2)\lambda))^{n'_n - k - 2l}}{o(1) + \sum_{k \in M_n} (n'_n / (N\lambda))^{n'_n - k}}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{A_{nN}il\} \rightarrow e^{-\alpha} \frac{\alpha^l}{l!} B_l; \quad (6)$$

$$\mathbf{P}(A_{nN}il \cap A_{nN}jl) \rightarrow \left(e^{-\alpha} \frac{\alpha^l}{l!} B_l\right)^2, \quad i \neq j, \quad (7)$$

при  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{1}{N} S_{nN} - \mathbf{E} \frac{1}{N} S_{nN}\right)^2 &= \\ &= \frac{\mathbf{P}\{A_{nN}1l\}}{N} + \mathbf{P}\{A_{nN}1l \cap A_{nN}2l\} - \\ &- \frac{\mathbf{P}\{A_{nN}1l \cap A_{nN}2l\}}{N} - (\mathbf{P}\{A_{nN}1l\})^2. \end{aligned}$$

Поэтому из (6) и (7) следует, что

$$\mathbf{E} \left(\frac{1}{N} S_{nN} - \mathbf{E} \frac{1}{N} S_{nN}\right)^2 \rightarrow 0 \quad (8)$$

при  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$ . Так как

$$\mathbf{E} \frac{1}{N} S_{nN} = \mathbf{P}\{A_{nN}il\},$$

условия (8) и (6) влекут (3). Теорема доказана.

Доказательство следствия теоремы 1. Пусть  $0 \leq l \leq r$ . По следствию 1 леммы 1

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \frac{\sum_{k+l \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k - l}}{\sum_{k \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k}} = \frac{1 - \alpha/\lambda}{1 - \alpha/\lambda} = 1;$$

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \frac{\sum_{k+2l \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k - 2l}}{\sum_{k \in M_n} (\alpha/\lambda)^{n'_n - k}} = \frac{1 - \alpha/\lambda}{1 - \alpha/\lambda} = 1.$$

Поэтому условия (1) и (2) выполнены. Следовательно, применима теорема 1. Доказательство закончено.

При доказательстве теоремы 2 будем использовать следующие леммы.

**Лемма 2. (А) Справедлива оценка**

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} \leq \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{-n \sum_{k=3}^{\infty} (1/k)(1-\lambda/n)^k} \times$$

$$\times \left(\Phi(\sqrt{n}) - \Phi\left(\sqrt{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)\right) \quad (9)$$

при  $\lambda/n \leq 1$ .

(Б) Справедлива оценка

$$0 \leq \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} > n\} - \mathbf{P}\{\pi_{(N-l)\lambda} > n\} \leq$$

$$\leq \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{-n \sum_{k=2}^{\infty} (1/k)(1-N\lambda/n)^k} \frac{\lambda l}{\sqrt{2\pi n}} \quad (10)$$

при  $N\lambda/n \leq 1$ .

Доказательство. (А) В силу формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (см., например, [5, с. 161]) для функции  $f(x) = e^x$  с последующей заменой  $t = \lambda - y$  получаем представление

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} = e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^y (\lambda - y)^n dy =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-(\lambda-y)} (\lambda - y)^n dy = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-t} t^n dt. \quad (11)$$

Поэтому, используя замену  $t = ny$ , а затем замену  $x = \sqrt{n}(1 - y)$ , формулу Стирлинга и разложение

логарифма в ряд Тейлора при оценке правой части (11), получаем

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-t} t^n dt =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n n^n}} \int_0^{\lambda/n} e^{-ny} (ny)^n d(ny) =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_0^{\lambda/n} e^{n(1-y)} y^n dy =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_0^{\lambda/n} e^{n(1-y)} e^{n \ln(y)} dy =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \times$$

$$\times \int_0^{\lambda/n} e^{n(1-y)} e^{n \ln(1-(1-y))} dy =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \times$$

$$\times \int_0^{\lambda/n} e^{-n(1-y)^2/2} e^{-n \sum_{k=3}^{\infty} (1-y)^k/k} dy \leq$$

$$\leq - \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n \sum_{k=3}^{\infty} (1/k)(1-\lambda/n)^k} \times$$

$$\times \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}(1-\lambda/n)} e^{-x^2/2} dx =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{-n \sum_{k=3}^{\infty} (1/k)(1-\lambda/n)^k} \times$$

$$\times \left(\Phi(\sqrt{n}) - \Phi\left(\sqrt{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)\right).$$

Поэтому справедливо (9). Пункт (А) доказан.

Доказательство п. (Б) повторяет доказательство п. (А) с той лишь разницей, что вместо оценивания интеграла  $\int_0^\lambda e^{-t} t^n dt$  оценивается интеграл

$$\int_{(N-1)\lambda}^{N\lambda} e^{-t} t^n dt.$$

В частности, при  $\lambda = n$  получаем

**Следствие 1. Справедливо неравенство**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\pi_n > n\} \leq \frac{1}{2}.$$

При доказательстве теоремы 2 будем использовать следующее обобщение следствия 1:

**Следствие 2.** *Справедливо неравенство*

$$\limsup_{\lambda, n \rightarrow \infty, \lambda/n \leq 1} \mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} \leq \frac{1}{2}.$$

**Замечание 2.** В работах В. М. Круглова [6, 7] получены оценки хвостов безгранично делимых и пуассоновских распределений. Оценки, полученные в лемме 2, можно рассматривать как уточнение оценок, полученных Кругловым для пуассоновских распределений. Приведем некоторые аналоги неравенств (9) и (10).

(В) Используя элементарные неравенства

$$-\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} (1-x)^k \leq \frac{1}{3} (1-x)^2 \ln(x);$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (1-x)^k \leq \frac{1}{2} (1-x) \ln(x)$$

при оценке правых частей в (9) и (10) соответственно, получаем

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} \leq \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{(1/3)n(1-\lambda/n)^2 \ln(\lambda/n)} \times$$

$$\times \left(\Phi(\sqrt{n}) - \Phi\left(\sqrt{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)\right)$$

при  $\lambda/n \leq 1$ ;

$$0 \leq \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} > n\} - \mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} > n\} \leq$$

$$\leq \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{(1/2)n(1-N\lambda/n) \ln(N\lambda/n)} \frac{\lambda l}{\sqrt{2\pi n}}$$

при  $N\lambda/n \leq 1$ .

(Г) Функция  $y = e^{-t} t^n$  возрастает на интервале  $(0, n)$  и убывает на интервале  $(n, \infty)$ . Заметим, что  $\lambda = n(\lambda/n) \leq n$  при  $\lambda/n \leq 1$ . Поэтому, используя формулу Стирлинга и элементарное неравенство  $xe^{-x} \leq e^{-(1-x)^2/2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , при  $x = \lambda/n$  получаем

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda e^{-t} t^n \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^n}{n^n} e^{-\lambda} \lambda^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{n} \frac{\lambda}{n} \left(e \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda/n}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{n} \frac{\lambda}{n} e^{-(n/2)(1-\lambda/n)^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \frac{\lambda}{n} \leq 1.$$

**Замечание 3.** Пусть случайные величины  $\pi_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , — независимые копии случайной величины  $\pi_\lambda$ . Так как

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{ni} \stackrel{d}{=} \frac{\pi_{n\lambda}}{n}, \quad (12)$$

то, используя представление четвертого момента в виде четвертой производной от характеристической функции, получаем

$$\mathbf{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{ni} - \lambda \right|^4 =$$

$$= \left( e^{-n\lambda(1+i(t/n) - e^{i(t/n)})} \right)^{(4)} \Big|_{t=0} = \frac{3n^2\lambda^2 + n\lambda}{n^4}.$$

Поэтому, используя неравенство чебышевского типа для четвертых моментов, приходим к

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{ni} - \lambda \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{ni} - \lambda \right|^4 < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{ni} \rightarrow \lambda, \quad n \rightarrow \infty,$$

почти наверное. Равенство (12) позволяет использовать леммы 1 и 2 для оценки скорости сходимости в этом усиленном законе больших чисел. Пусть случайная величина  $X_\lambda \equiv \lambda$ . При  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \neq \lambda$ , имеем

$$\left| \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{ni} \leq k \right\} - \mathbf{P} \left\{ X_\lambda \leq k \right\} \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi nk}} \left( e \frac{\lambda}{k} e^{-\lambda/k} \right)^{nk} \left( 1 - \frac{k}{\lambda} \right)^{-1} \times \\ \quad \times (1 + o(1)) \quad \text{при } 0 < k < \lambda; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{nk} \frac{\lambda}{k} \left( e \frac{\lambda}{k} e^{-\lambda/k} \right)^{nk} \times \\ \quad \times \left( 1 + O\left(\frac{1}{nk}\right) \right) \quad \text{при } k > \lambda. \end{cases} \quad (13)$$

Оценка (13) при  $0 < k < \lambda$  вытекает из следствия 2 леммы 1, в котором вместо  $\lambda$  используется  $n\lambda$ , а вместо  $n$  используется  $kn$ , с последующей оценкой  $(kn)!$  с помощью формулы Стирлинга. Оценка (13) при  $\lambda < k$  вытекает из замечания 2(Б). Заметим, что  $e(\lambda/k)e^{-\lambda/k} < 1$ ,  $k \neq \lambda$ . Поэтому правая часть в (13) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  при любом  $k \neq \lambda$ .



**Лемма 3.** Пусть множества  $M_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\alpha > \lambda$ ,  $p_r = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^r (\lambda^k/k!)$ . Тогда

$$\limsup_{n, N \rightarrow \infty, \lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha} \frac{|S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN}|}{\sqrt{N \ln(N)}} \leq 16\sqrt{2} p_r (1 - p_r)$$

почти наверное.

**Доказательство.** Так как  $\xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN}$  — пуассоновская случайная величина с параметром  $N\lambda$  и  $N\lambda/n \leq 1$  при  $\lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha$ , по следствию 2 леммы 2

$$\liminf_{n, N \rightarrow \infty, \lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha} \mathbf{P}\{\xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \in M_n\} \geq \frac{1}{2}.$$

Поэтому доказательство леммы 3 повторяет доказательство теоремы 2 из [8].

**Доказательство теоремы 2.** Согласно лемме 3, при  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha$ , последовательность  $(S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN})/\sqrt{N \ln(N)}$  ограничена почти наверное. Поэтому  $(S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN})/N \rightarrow 0$  при  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha$  почти наверное. Так как

$$\frac{1}{N} S_{nN} = \frac{S_{nN} - \mathbf{E}S_{nN}}{N} + \frac{1}{N} \mathbf{E}S_{nN};$$

$$\frac{1}{N} \mathbf{E}S_{nN} = \mathbf{P}(A_{nNi}),$$

то для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty, \lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha} \mathbf{P}(A_{nNi}) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^r \frac{\lambda^k}{k!}. \quad (14)$$

Пусть  $0 \leq l \leq r$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{A_{nNi}\} = \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N1} = l\} \mathbf{P}\{\xi_{N2} + \xi_{N3} + \dots + \xi_{NN} \leq n - l\}}{\mathbf{P}\{\xi_{N1} + \xi_{N2} + \dots + \xi_{NN} \leq n\}} = \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \frac{1 - \mathbf{P}\{\pi_{(N-l)\lambda} > n\}}{1 - \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} > n\}} = \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \left( 1 + \frac{\mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} > n\} - \mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} > n\}}{1 - \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} > n\}} + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} > n\} - \mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} > n-1\}}{1 - \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} > n\}} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Используя формулу Стирлинга и элементарное неравенство  $exe^{-x} \leq 1$ ,  $0 \leq x < \infty$ , получаем

$$0 \leq \mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} > n-1\} - \mathbf{P}\{\pi_{(N-1)\lambda} > n\} \leq e^{-\lambda l} \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right)^l \mathbf{P}\{\pi_{N\lambda} = n\} =$$

$$= \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) e^{-\lambda l} \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right)^l \left( e e^{-N\lambda/n} \frac{N\lambda}{n} \right)^n \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \leq \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) e^{-\lambda l} \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right)^l \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) по лемме 2 и ее следствию 2 вытекает, что  $\mathbf{P}\{A_{nNi}\} \rightarrow e^{-\lambda} (\lambda^l/l!)$  при  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $\lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha$ . Условие (14) выполнено. Это завершает доказательство теоремы.

**Доказательство теоремы 3.** (А) Так как из сходимости в среднем квадратичном следует сходимость по вероятности и множества  $M_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , удовлетворяют условиям следствия теоремы 1, то п. (А) теоремы 3 вытекает из следствия теоремы 1.

(Б) Пусть  $0 < \varepsilon < \alpha - \lambda$ . Можно считать, что найдется  $n_0 \in \mathbf{N}$  со следующим свойством:  $|\alpha_{nN} - \alpha| < \varepsilon$  при  $N, n > n_0$ . Тогда при  $N, n > n_0$  справедливо неравенство  $\lambda \leq \alpha_{nN} \leq \alpha + \varepsilon$ . Следовательно, применима теорема 2. Доказательство п. (Б) закончено.

Авторы благодарят профессора В. М. Круглова за ценную информацию и профессора В. Ф. Колчина за ценное замечание.

## Литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976. 596 с.
2. Колчин В. Ф. Один класс предельных теорем для условных распределений // Литовский математический сборник, 1968. Т. 8. № 1. С. 53–63.
3. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. — М.: Физматгиз, 1976. 223 с.
4. Chuprunov A. N., Fazekas I. Inequality and strong law of large numbers for random allocations // Acta Math. Hungar., 2005. Vol. 109. No. 1–2. P. 163–182.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматлит, 2006. 864 с.
6. Круглов В. М. Характеризация одного класса безгранично делимых распределений // Матем. заметки, 1974. Т. 16. № 5. С. 777–782.
7. Круглов В. М. Новая характеристика пуассоновских распределений // Матем. заметки, 1976. Т. 20. № 6. С. 879–882.
8. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Законы повторного логарифма для числа безошибочных блоков при помехоустойчивом кодировании // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. № 3. С. 42–46.

## К 60-ЛЕТИЮ ЧЛЕНА РЕДКОЛЛЕГИИ ЖУРНАЛА «ИНФОРМАТИКА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ», ЗАМЕСТИТЕЛЯ ДИРЕКТОРА ИПИ РАН ПО НАУЧНОЙ РАБОТЕ, ДОКТОРА ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК А. А. ЗАЦАРИННОГО

И. А. Соколов<sup>1</sup>, С. Я. Шоргин<sup>2</sup>



25 апреля 2011 года исполнилось 60 лет Александру Алексеевичу Зацаринному — члену редколлегии журнала «Информатика и её применения», лауреату премии Правительства РФ в области науки и техники, известному ученому в области создания информационно-телекоммуникационных систем и разработки методов оценки их эффективности.

А. А. Зацаринный родился в Киеве в семье военнослужащего. В 1968 г. поступил в Киевское высшее военное инженерное училище связи им. М. И. Калинина. После окончания учебы в 1973 г. был направлен для прохождения службы в 16 Центральный научно-исследовательский испытательный институт связи Министерства обороны. За 26 лет научно-исследовательской работы в этой ведущей научной организации в области систем и комплексов военной связи прошел путь от младшего научного сотрудника — лейтенанта-инженера до заместителя начальника института по научной работе (1992–1999 гг.) — полковника. В 1984 г. защитил кандидатскую, а в 1996 г. — докторскую диссертацию.

В сентябре 1999 г. Указом Президента РФ А. А. Зацаринный был назначен начальником Управления развития систем связи и АСУ Вооруженных Сил (в составе Управления начальника связи ВС РФ), которым руководил в течение шести лет (1999–2005). В 2000 г. ему присвоено воинское звание генерал-майор, в 2002 г. — генерал-лейтенант.

После увольнения из рядов Вооруженных Сил с января 2006 г. по настоящее время занимает должность заместителя директора Института проблем информатики Российской академии наук по научной работе.

Вся трудовая и служебная деятельность А. А. Зацаринного неразрывно связана с научно-исследовательской, научно-организационной и научно-практической работой в области создания систем и комплексов военной связи, а также автоматизированных информационных систем.

За период работы в ИПИ РАН А. А. Зацаринным получен ряд важнейших результатов в области путей и методов создания информационно-телекоммуникационных систем.

А. А. Зацаринный является действительным членом Академии военных наук, Международной академии связи и Российской академии инженерных наук имени А. М. Прохорова (Отделение «Информационные сети, связь и радиотехника»), членом Экспертного совета ВАК России по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи, членом диссертационных советов при ИПИ РАН и при НИИ АА им. академика В. С. Семенихина. Имеет ряд правительственных и ведомственных наград, в том числе орден «За военные заслуги» (2000 г.) и 15 медалей.

От имени редколлегии сердечно поздравляем А. А. Зацаринного с юбилеем и желаем ему счастья, здоровья, семейного благополучия и дальнейших творческих успехов.

<sup>1</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, isokolov@ipiran.ru

<sup>2</sup>Институт проблем информатики Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru

### AN ASYMPTOTICALLY OPTIMAL TEST FOR THE NUMBER OF COMPONENTS OF A MIXTURE OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS

V. E. Bening<sup>1</sup>, A. K. Gorshenin<sup>2</sup>, and V. Yu. Korolev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, bening@yandex.ru

<sup>2</sup>Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, a.k.gorshenin@gmail.com

<sup>3</sup>Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, vkorolev@cs.msu.su

The problem of statistical testing of hypotheses concerning the number of components in a mixture of probability distributions is considered. An asymptotically most powerful test is presented. Under rather weak conditions, the limit distributions, power loss, and the asymptotic deficiency are found. The application of this test to verification of hypotheses concerning the number of components in a mixture of uniform, normal, and gamma distributions is considered in detail.

**Keywords:** mixtures of probability distributions; asymptotically most powerful test; power loss; asymptotic deficiency

### RECONSTRUCTION OF RANDOM FUNCTION DISTRIBUTIONS IN SINGLE PHOTON EMISSION TOMOGRAPHY PROBLEMS USING TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL APPROXIMATION OF EXPONENTIAL MULTIPLIER

V. G. Ushakov<sup>1</sup> and O. V. Shestakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, vgushakov@mail.ru

<sup>2</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, oshestakov@cs.msu.su

This paper deals with the problem of reconstructing probabilistic distribution of random functions from distribution of integral transforms arising in the problems of emission tomography. The method of reconstruction is developed for the class of discrete random functions.

**Keywords:** emission tomography; Radon transform; projections; random functions

### DIVERSIFICATION AND ITS LINKS WITH RISK MEASURES

D. O. Jakovenko<sup>1</sup> and M. A. Tselishchev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>FIDE Grandmaster, ms@cs.msu.su

<sup>2</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, ms@cs.msu.su

A new approach is proposed to the concept of diversification of investment portfolios which is defined as a binary relationship in the set of portfolios with finite first moments. It is shown that this relationship is, in some sense, a partial ordering. Important properties of such a definition are considered as well as necessary and sufficient condition of the comparability of portfolios, based on the coherent risk measure Expected Shortfall. As an example, an interpretation of the diversification of information risks is presented.

**Keywords:** diversification; investment portfolios; comparison of portfolios; coherent risk measure; Expected Shortfall; information risk

## STABILITY BOUNDS FOR SOME QUEUEING SYSTEMS WITH CATASTROPHES

A. I. Zeifman<sup>1</sup>, A. V. Korotysheva<sup>2</sup>, T. L. Panfilova, and S. Ya. Shorgin<sup>4</sup><sup>1</sup>Vologda State Pedagogical University; IPI RAN; VSCC CEMI RAS, a\_zeifman@mail.ru<sup>2</sup>Vologda State Pedagogical University, a\_korotysheva@mail.ru<sup>3</sup>Vologda State Pedagogical University, ptl-70@mail.ru<sup>4</sup>IPI RAN, SShorgin@ipiran.ru

Continuous-time Markovian queueing models with catastrophes are considered. The bounds of stability for some characteristics of such systems are obtained. Also, a queueing example is considered.

**Keywords:** nonstationary queues; Markovian models with catastrophes; stability bounds; approximations for limiting characteristics

## ON A STATISTICAL PROBLEM FOR RANDOM INTERNET-TYPE GRAPHS

M. M. Leri<sup>1</sup> and I. A. Cheplyukova<sup>2</sup><sup>1</sup>Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences, leri@krc.karelia.ru<sup>2</sup>Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences, chia@krc.karelia.ru

There are considered random graphs of Internet-type, i. e., graphs with vertex degrees drawn independently from power-law distributions. By means of Monte-Carlo simulations, a possibility of using the chi-square goodness of fit test was investigated for verification of hypothesis that graph vertex degrees are identically distributed. There were obtained the models of the dependency of the strength of chi-square test on the graph volume and vertex degrees distributions parameters and recommendations on choosing the number of intervals were given.

**Keywords:** random graphs; chi-square goodness of fit test; simulation modeling

## QUEUEING SYSTEM WITH NEGATIVE CUSTOMERS, BUNKER FOR OUSTED CUSTOMERS, AND DIFFERENT SERVICE RATES

R. V. Razumchik

IPI RAN, rrazumchik@ieee.org

Consideration was given to the queueing system with Poisson flows of incoming positive and negative customers. For the positive customers, there is an infinite-capacity buffer. The arriving negative customer knocks out a positive customer queued in the buffer and moves it to an infinite-capacity buffer of ousted customers (bunker). If the buffer is empty, then the negative customer discharges the system without affecting it. After servicing the current customer, the server receives a customer from the buffer or, if the buffer is empty, the bunker. The service times of customers arriving from buffer and bunker are distributed exponentially but with different parameters. Relations for calculation of the stationary distributions of the queues in the buffer and bunker are obtained.

**Keywords:** queueing system; negative customers; bunker; different service rates

APPLICATION OF THE STATISTICAL METHOD AND FINITE-DIFFERENCE METHOD  
FOR STRONGLY IONIZED COLLISIONAL PLASMA DIAGNOSTICS PROBLEM SOLUTION  
BY THE FLAT PROBE

I. A. Kudryavtseva<sup>1</sup> and A. V. Panteleyev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics and Cybernetics, Moscow Aviation Institute, irina.home.mail@mail.ru

<sup>2</sup>Department of Mathematics and Cybernetics, Moscow Aviation Institute, avpantelev@inbox.ru

A mathematical model, describing strongly ionized collisional plasma dynamics near the flat probe, is formulated. The mathematical model includes the Fokker–Planck and Poisson equations. Two methods of getting solution are presented. One of these methods is the Monte-Carlo method, another is the combination of the splitting method and the Particle-In-Cell method.

**Keywords:** Monte-Carlo method; Particle-In-Cell method; splitting method; probe; Fokker-Planck equation; Poisson equation

COMPARATIVE STUDY OF IMAGE SEGMENTATION ALGORITHMS PROCESSING QUALITY  
ON METRIC BASE

P. P. Koltsov

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, koltsov@niisi.msk.ru

The processing quality of four well-known digital image segmentation algorithms is under study. The set of artificial images under supervised distortions is used with *a priori* given reference ground truth images. Algorithms processing results are compared with reference images by metrics with different features. The use of different metrics for image segmentation algorithms processing quality estimation and comparative study of the results helps to clear more exactly the features of the investigated algorithms.

**Keywords:** image processing; image processing quality estimation; image segmentation; edge detection; energy methods

ON THE BERRY–ESSEEN TYPE INEQUALITIES FOR POISSON RANDOM SUMS

V. Yu. Korolev<sup>1</sup>, I. G. Shevtsova<sup>2</sup>, and S. Ya. Shorgin<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, vkorolev@cs.msu.su

<sup>2</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, ishevtsova@cs.msu.su

<sup>3</sup>IPI RAN, sshorgin@ipiran.ru

For the uniform distance between the distribution function  $\Phi(x)$  of the standard normal random variable and the distribution function  $F_\lambda(x)$  of the Poisson random sum of independent identically distributed random variables  $X_1, X_2, \dots$  with finite third absolute moment,  $\lambda > 0$  being the parameter of the Poisson index, it is proved the inequality

$$\sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leq 0.4532 \frac{E|X_1 - EX_1|^3}{(DX_1)^{3/2}\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

which is similar to the Berry–Esseen estimate and uses the central moments, unlike the known analogous inequalities based on the noncentral moments.

**Keywords:** Poisson random sum; central limit theorem; convergence rate estimate; Berry–Esseen inequality; absolute constant



## ON ONE KERNEL DENSITY ESTIMATOR

V. G. Ushakov<sup>1</sup> and N. G. Ushakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, vgushakov@mail.ru

<sup>2</sup>Institute of Microelectronics Technology and High Purity Materials, Russian Academy of Sciences, ushakov@math.ntnu.no

The kernel density estimator based on the sinc kernel is investigated. The main attention is paid to the analysis of the integrated mean squared for finite sample sizes (nanosymptotic). The problems of estimation of the mode and of estimation of density derivatives are also considered.

**Keywords:** nonparametric density estimator; kernel estimator; kernel of infinite order

## ON THE RATE OF CONVERGENCE OF SAMPLE MEDIAN ABSOLUTE DEVIATION DISTRIBUTION TO THE NORMAL LAW

O. V. Shestakov

Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, oshestakov@cs.msu.su

Some estimates for the rate of convergence of sample median absolute deviation distribution to the normal law are obtained in the general and symmetric cases.

**Keywords:** order statistics; sample median; median absolute deviation; normal distribution; rate of convergence

## STRONG LAWS OF LARGE NUMBERS FOR A NUMBER OF ERROR-FREE BLOCKS UNDER ERROR-CORRECTED CODING

A. N. Chuprunov<sup>2</sup> and I. Fazekas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics and Probability, Chebotarev Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan State University, achuprunov@mail.ru

<sup>2</sup>Faculty of Informatics, University of Debrecen, Hungary, fazekas.istvan@inf.unideb.hu

The messages which contain blocks are considered. Each block was coded by error-corrected coding which can correct not more than  $r$  errors. It is assumed that the number of errors in a block is Poissonian random variable with parameter  $\lambda$ . Also, it is assumed that the number of errors in a message belongs to a subset of nonnegative integer numbers. Under these assumptions, the laws of large numbers for a number of error-free blocks in the message were obtained.

**Keywords:** allocation scheme; conditional probability; law of large numbers; error-corrected code

## Об авторах

**Бенинг Владимир Евгеньевич** (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН

**Горшенин Андрей Константинович** (р. 1986) — научный сотрудник ИПИ РАН, аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Зейфман Александр Израилевич** (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета, старший научный сотрудник ИПИ РАН, ведущий научный сотрудник ВНКЦ ЦЭМИ РАН

**Кольцов Петр Петрович** (р. 1946) — кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель директора Научно-исследовательского института системных исследований РАН

**Королев Виктор Юрьевич** (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник ИПИ РАН

**Коротышева Анна Владимировна** (р. 1988) — аспирантка факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета

**Кудрявцева Ирина Анатольевна** (р. 1982) — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета)

**Лери Марина Муксумовна** (р. 1969) — кандидат технических наук, младший научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

**Пантелеев Андрей Владимирович** (р. 1955) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета)

**Панфилова Татьяна Леонидовна** (р. 1970) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Вологодского государственного педагогического университета

**Разумчик Ростислав Валерьевич** (р. 1984) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИПИ РАН

**Ушаков Владимир Георгиевич** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН

**Ушаков Николай Георгиевич** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов РАН

**Фазекаш Иштван** (р. 1954) — доктор наук, доцент, факультет информатики, Дебреценский университет, Венгрия

**Целищев Михаил Андреевич** (р. 1989) — студент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Чеплюкова Ирина Александровна** (р. 1973) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

**Чупрунов Алексей Николаевич** (р. 1953) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИММ им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета

**Шевцова Ирина Геннадьевна** (р. 1983) — кандидат физико-математических наук; ассистент кафедры математической статистики факультета вычисли-

тельной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН

**Шестаков Олег Владимирович** (р. 1976) — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН

**Шоргин Сергей Яковлевич** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора ИПИ РАН

**Яковенко Дмитрий Олегович** (р. 1983) — выпускник кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (2004); гроссмейстер ФИДЕ

## *About Authors*

**Bening Vladimir E.** (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M.V. Lomonosov Moscow State University; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Cheplyukova Irina A.** (b. 1973) — Candidate of Sciences (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Center, Russian Academy of Sciences

**Chuprunov Alexey N.** (b. 1953) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading scientist, Research Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan State University

**Fazekas Istvan** (b. 1954) — PhD, associate professor, Faculty of Informatics, University of Debrecen, Hungary

**Gorshenin Andrey K.** — (b. 1986) — scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences; postgraduate student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Jakovenko Dmitry O.** (b. 1983) — graduate of Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University (2004); FIDE Grandmaster

**Koltsov Piotr P.** (b. 1946) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Deputy

Director, Scientific Research Institute for System Studies, Russian Academy of Sciences

**Korolev Victor Yu.** (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M.V. Lomonosov Moscow State University; leading scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Korotysheva Anna V.** (b. 1988) — PhD student, Faculty of Applied Mathematics and Computer Technologies, Vologda State Pedagogical University

**Kudryavtseva Irina A.** (b. 1982) — Candidate of Sciences (PhD) in physics and mathematics, senior lecturer, Department of Mathematics and Cybernetics, Moscow Aviation Institute

**Leri Marina M.** (b. 1969) — Candidate of Sciences (PhD) in technology, junior scientist, Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Center, Russian Academy of Sciences

**Panfilova Tatyana L.** (b. 1970) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics; assistant professor, Vologda State Pedagogical University

**Panteleev Andrei V.** (b. 1955) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor; Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Moscow Aviation Institute

**Razumchik Rostislav V.** (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Shestakov Oleg V.** (b. 1976) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, assistant profes-

tor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Shevtsova Irina G.** (b. 1983) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics; assistant professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Shorgin Sergey Ya.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Deputy Director, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Tselishchev Mikhail A.** (b. 1989) — student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computa-

tional Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

**Ushakov Nikolai G.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading scientist, Institute of Microelectronics Technology and High Purity Materials, Russian Academy of Sciences

**Ushakov Vladimir G.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

**Zeifman Alexander I.** (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Computer Technologies, Vologda State Pedagogical University; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences; leading scientist, VSCC CEMI RAS

# Правила подготовки рукописей статей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений. Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи, в виде исключения, могут печататься на английском языке. Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях. Публикация не должна нарушать закон об авторских правах. Направляя свою рукопись в редакцию, авторы автоматически передают учредителям и редколлегии неисключительные права на издание данной статьи на русском языке и на ее распространение в России и за рубежом. При этом за авторами сохраняются все права как собственников данной рукописи. В связи с этим авторами должно быть представлено в редакцию письмо в следующей форме: Соглашение о передаче права на публикацию:

*«Мы, нижеподписавшиеся, авторы рукописи « \_\_\_\_\_ », передаем учредителям и редколлегии журнала «Информатика и её применения» неисключительное право опубликовать данную рукопись статьи на русском языке как в печатной, так и в электронной версиях журнала. Мы подтверждаем, что данная публикация не нарушает авторского права других лиц или организаций. Подписи авторов: (ф. и. о., дата, адрес)».*

Указанное соглашение может быть представлено как в бумажном виде, так и в виде отсканированной копии (с подписями авторов).

Указанное соглашение может быть представлено как в бумажном виде, так и в виде отсканированной копии (с подписями авторов).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности опубликования представленной статьи в открытой печати.

2. Статья подписывается всеми авторами. На отдельном листе представляются данные автора (или всех авторов): фамилия, полные имя и отчество, телефон, факс, e-mail, почтовый адрес. Если работа выполнена несколькими авторами, указывается фамилия одного из них, ответственного за переписку с редакцией.

3. Редакция журнала осуществляет самостоятельную экспертизу присланных статей. Возвращение рукописи на доработку не означает, что статья уже принята к печати. Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редакционной коллегии о принятии статьи к печати или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия не обязуется направлять рецензию авторам отклоненной статьи.

5. Корректур статей высылается авторам для просмотра. Редакция просит авторов присылать свои замечания в кратчайшие сроки.

6. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки. Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3. Основной текст: стиль — «Обычный»; шрифт Times New Roman, размер 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине. Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 25 страниц указанного формата. Ознакомиться с шаблонами, содержащими примеры оформления, можно по адресу в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.

7. К рукописи, предоставляемой в 2-х экземплярах, обязательно прилагается электронная версия статьи (как правило, в форматах MS WORD (.doc) или L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (.tex), а также — дополнительно — в формате .pdf) на дискете, лазерном диске или по электронной почте. Сокращения слов, кроме стандартных, не применяются. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы.

8. Статья должна содержать следующую информацию на русском и английском языках: название, Ф.И.О. авторов, места работы авторов и их электронные адреса, подробные сведения об авторах, оформленные в соответствии с форматом, определяемым файлами [http://www.ipiran.ru/journal/issues/2011\\_05\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2011_05_01/authors.asp) и [http://www.ipiran.ru/journal/issues/2011\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2011_01_eng/authors.asp), аннотация (не более 100 слов), ключевые слова. Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в порядке их первого упоминания. В списке литературы не должно быть позиций, на которые нет ссылки в тексте статьи. Все фамилии авторов, заглавия статей, названия книг, конференций и т. п. даются на языке оригинала, если этот язык использует кириллический или латинский алфавит.

9. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

10. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- использовать attach (присоединение);
- в случае больших объемов информации возможно использование общеизвестных архиваторов (ZIP, RAR);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

11. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию с авторов не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

**Адрес редакции:** Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ИПИ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05 E-mail: [rust@ipiran.ru](mailto:rust@ipiran.ru)