

# Информатика и её применения

Том 16 Выпуск 1 Год 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

Алгебраическая спецификация графовых вычислительных структур <b>С. П. Ковалёв</b>	2
О поиске оптимальной схемы 3D-печати конструкций из композиционных материалов <b>А. В. Босов, Ю. И. Битюков, Г. Ю. Денискина</b>	10
Контекстный поиск на фотонах с использованием тестов Белла <b>С. Н. Андрианов, Н. С. Андрианова, Ф. М. Аблаев, Ю. Ю. Кочнева</b>	20
Метрические оценки угловых точек множества достижимых межузловых потоков многопользовательской сети <b>Ю. Е. Малашенко</b>	25
Нормализация систем, стохастически не разрешенных относительно производных <b>И. Н. Сеницын</b>	32
О применении топологического подхода к анализу плохо формализуемых задач для построения алгоритмов виртуального скрининга квантово-механических свойств органических молекул I: Основы проблемно ориентированной теории <b>И. Ю. Торшин</b>	39
Персональный когнитивный ассистент: планирование поведения на основе сценариев деятельности <b>И. В. Смирнов, А. И. Панов, А. А. Чуганская, М. И. Суворова, Г. А. Киселёв, И. А. Курузов, О. Г. Григорьев</b>	46
Разрешение конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах <b>С. В. Листопад, И. А. Кириков</b>	54
Сравнение экстремальных индексов времен ожидания в системах обслуживания $M/G/1$ <b>И. В. Пешкова</b>	61
Упрощенный язык зрительных образов <b>Ш. Б. Шихиев, Ф. Ш. Шихиев</b>	68
Оптимизация порогового управления переключением скорости обслуживания в системе массового обслуживания $G/M/1$ <b>Я. М. Агаларов</b>	73
О поиске максимальных частых и минимальных нечастых наборов производства частичных порядков <b>Н. А. Драгунов, Е. В. Дюкова</b>	82
Программный комплекс для многомасштабного моделирования структурных свойств композиционных материалов <b>К. К. Абгарян, Е. С. Гаврилов</b>	88
Об авторах	98
Правила подготовки рукописей	102
Requirements for manuscripts	105

---

Технический редактор *Л. Кокушкина* Художественный редактор *М. Седакова*  
Сдано в набор 05.03.22. Подписано в печать 25.03.22. Формат 60 x 84 / 8  
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл.-печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 100 экз.  
Заказ № 1158

Издательство «ТОРУС ПРЕСС», Москва 121614, ул. Крылатская, 29-1-43  
Отпечатано в НИПКЦ «Восход-А» с готовых файлов  
Москва 123103, наб. Новикова-Прибоя, д. 3, корп. 2

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СПЕЦИФИКАЦИЯ ГРАФОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР

С. П. Ковалёв<sup>1</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются проблемы составления алгебраических спецификаций многокомпонентных вычислительных структур, представляемых графами потоков данных. Кратко показано, как при помощи теории категорий алгебраические средства спецификации программ развивались от многосортных алгебр через коалгебры к объёмлющей конструкции диалгебры, способной описывать интерактивные вычислительные узлы. В качестве ее обобщения предложена новая теоретико-категорная конструкция графалгебры, позволяющая комбинировать диалгебры в произвольные ориентированные мультиграфы (диаграммы), ребра которых отвечают вычислительным операциям в узлах, а вершины описывают передаваемые между узлами данные. Приведены примеры графалгебраических спецификаций нейронных сетей и разнообразных многопроцессорных вычислительных систем. Описан способ построения категорий графалгебр посредством универсальных конструкций. Для вычислительной структуры вида системы систем, состоящей из графовых структур, предложены методы иерархического построения алгебраической спецификации из спецификаций составляющих.

**Ключевые слова:** алгебраическая спецификация; графовая вычислительная структура; система систем; теория категорий; диалгебра; графалгебра; декартов квадрат

**DOI:** 10.14357/19922264220101

## 1 Введение

Вычислительные структуры, представляемые графами потоков данных, (снова) набирают популярность: к ним относятся искусственные нейронные сети, облачные среды оркестровки веб-сервисов, аппаратные решения от логических матриц до многопроцессорных систем и др. Закономерно оживает и интерес к формальным математическим методам спецификации и верификации таких структур. Традиционно здесь применяются методы на основе исчисления процессов, берущие начало от классического исчисления CCS (Calculus of Communicating Systems) и аналогичных [1]. Они позволяют специфицировать многокомпонентные вычислительные структуры выражениями, в которых переменные отвечают процессам и действиям, а операции описывают их организацию и взаимодействие. Можно формально проверять такие выражения, например, на предмет отсутствия тупиков (deadlocks).

Однако спецификации в исчислении процессов могут казаться недостаточно наглядными, поскольку не содержат средств для графического изображения структур. Это неудобство преодолевается путем привлечения теории категорий — раздела высшей алгебры, который «начинается с наблюдения, что многие свойства математических систем можно представить просто и единообразно посред-

ством диаграмм» [2]. Вводятся симметричные моноидальные категории, в которых основные виды операций над процессами, а именно: последовательное и параллельное исполнение — представляются композицией и тензорным произведением соответственно. Тем самым процессы представляются морфизмами, а передаваемые между ними данные — объектами таких категорий. Графовые вычислительные структуры можно изображать струнными диаграммами в таких категориях [3]. При этом остается нерешенной существенная проблема исчисления и категорий процессов, состоящая в слабости средств специфицирования типов данных и содержания вычислительных операций над данными. Описывается только поведение графовой вычислительной структуры с точки зрения внешнего наблюдателя, способного увидеть комбинирование процессов и передачу данных, но не «заглянуть внутрь» тех и других.

Предпринимаются попытки дополнить исчисления процессов конструкциями обработки данных, заимствованными из императивных языков программирования [4], однако получающиеся формализмы выглядят чересчур громоздкими.

Концептуально более стройный подход предлагается в рамках современных формализмов проверки на моделях (model checking) [5]. Они позволяют детально описать на формальном языке

<sup>1</sup>Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, kovalyov@sibnet.ru

и состояния узлов как наборы значений переменных, и изменения значений под действием как вычислительных процедур в узлах, так и актов передачи данных между узлами. Такую спецификацию можно автоматизированным способом проверить на соответствие требованиям к отсутствию тупиков и отказов, к порядку и длительности выполнения операций и т. д. Однако такая спецификация часто получается чересчур конкретной — близкой к программно-аппаратной реализации вычислительной структуры. Составление такой спецификации может оказаться значительно более трудоемким, чем программирование, и не привести к высокоуровневому концептуальному представлению графовой вычислительной структуры, допускающему широкий спектр способов реализации.

В настоящей работе предлагается подойти к решению вышеуказанной проблемы с противоположной стороны: расширить традиционную алгебраическую спецификацию средствами описания графовых структур. Напомним, что (многосортовые) алгебры служат спецификациями абстрактных типов данных (АТД), каждый из которых включает множество значений, набор операций над ними (в том числе с участием значений других АТД) и аксиомы, характеризующие операции (см., например, [6]). В такой спецификации можно проверять те или иные свойства АТД путем индукции по структуре термов алгебры, а при помощи аппарата теории категорий была введена двойственная конструкция коалгебры, позволяющая абстрактно специфицировать и верифицировать внешнее поведение интерактивных систем (реакцию на входные данные) [7]. Естественным следующим шагом выглядит объединение алгебры и коалгебры в объемлющую конструкцию, способную описывать интерактивные вычислительные узлы одновременно «извне» и «изнутри». Такая объемлющая конструкция известна под названием диалгебры (dialgebra) [8]. В настоящей работе делается еще один шаг: диалгебры комбинируются в графы произвольных многокомпонентных вычислительных структур, порождая новый класс категорных конструкций, названных *графалгебрами*. Исследуются способы построения и некоторые свойства категорий графалгебр.

## 2 Алгебраические спецификации с точки зрения теории категорий

Пусть  $C$  — произвольная категория,  $T, S : C \rightarrow C$  — пара эндофункторов. Диалгеброй называется произвольная пара  $(A, a)$ , состоящая из  $C$ -объ-

екта  $A$  (носителя) и  $C$ -морфизма  $a : TA \rightarrow SA$  (структуры) [8]. Гомоморфизм диалгебры  $(A, a)$  в  $(A', a')$  — это любой  $C$ -морфизм  $f : A \rightarrow A'$ , удовлетворяющий условию сохранения структуры  $Sf \circ a = a' \circ Tf$ . Ясно, что при фиксированных  $T, S$  из всех диалгебр и всех их гомоморфизмов получается категория и из нее в  $C$  действует «забывающий» функтор носителя  $(A, a) \mapsto A$ .

При  $S = 1_C$  получается классическая конструкция категории  $T$ -алгебр  $T\text{-Alg}$  [9, определение 5.37]. В узком смысле алгебры сигнатуры первого порядка  $\Sigma$  строятся над категорией всех множеств и отображений  $\mathbf{Set}$  с функтором  $T_\Sigma : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set} : A \mapsto \prod_{\varphi \in \Sigma} A^{n(\varphi)}$ , где  $n(\varphi)$  — местность (число аргументных мест) функционального символа  $\varphi \in \Sigma$ . В этом случае отображение  $a : T_\Sigma A \rightarrow A$  собирается из компонентов  $a_\varphi : A^{n(\varphi)} \rightarrow A$ ,  $\varphi \in \Sigma$ , задающих операции-интерпретации символов, а гомоморфизмы сохраняют операции в обычном смысле. Многосортовые алгебры, используемые как классические алгебраические спецификации АТД, строятся аналогичным способом над категорией  $\mathbf{Set}^N$ , где  $N$  — множество имен сортов.

В свою очередь, при  $T = 1_C$  получается конструкция  $S$ -коалгебры. Обычно категория коалгебр над  $C$  вводится как двойственная к категории алгебр над  $C^{\text{op}}$ , т. е. путем обращения направления стрелки у структуры [7]. Коалгебры над  $\mathbf{Set}$  применяются в качестве спецификаций поведения интерактивных программ с точки зрения внешнего наблюдателя, например в форме помеченных систем переходов: (недерминированная) система переходов задается коалгеброй с функтором  $S_Q : A \mapsto (PA)^Q$  для некоторого фиксированного множества  $Q$ . Здесь  $A$  интерпретируется как множество состояний системы, а  $A$  — как множество наблюдаемых действий (в частности, данных, поступающих на вход системы извне), так что структура  $S_Q$ -коалгебры  $a : A \rightarrow S_Q A$  задает для каждого состояния  $s \in A$  и действия  $q \in Q$  множество состояний  $a(s)q \subseteq A$  — возможных результатов перехода из  $s$  под действием  $q$ .

Можно ожидать, что диалгебра общего вида позволяет описывать и вычислительные, и интерактивные аспекты в одной спецификации, а в настоящей работе диалгебры комбинируются в произвольные (ориентированные мульти-) графы в целях специфицирования графовых вычислительных структур. Например, многослойная нейросеть прямого распространения описывается непустой конечной цепочкой диалгебр — графом множеств и отображений вида  $A^{k_0} \rightarrow A^{k_1} \rightarrow \dots \rightarrow A^{k_l}$ , где  $A$  — множество значений распознаваемого сигнала (например,  $A = \mathbb{R}$ );  $l > 1$  — глубина сети;  $k_i > 0$  —

число нейронов в  $i$ -м слое,  $i = 0, \dots, l-1$ . Функция обработки сигнала в каждом слое  $f_i : A^{k_i} \rightarrow A^{k_{i+1}}$  состоит из отображений-компонентов, например:

$$f_{is} : \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{k_i}) \mapsto \sum_{j=1}^{k_i} w_{ijs} \sigma_{ij}(x_j + b_{ij}),$$

$$s = 1, \dots, k_{i+1},$$

где  $\sigma_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция активации  $j$ -го нейрона  $i$ -го слоя;  $w_{ijs}$  и  $b_{ij}$  — веса и смещения, подбираемые при обучении нейросети. У нейросети с обратной связью появляются дополнительные обратные стрелки, направленные от последующих слоев к предыдущим. Разрабатываются и нейросети, архитектура которых задается более сложными графами [10].

Другой класс примеров составляют многопроцессорные вычислительные системы, которые описываются разнообразными графами вычислительных узлов, связанных потоками данных. Рассматриваемое алгебраическое представление таких систем, как и нейросетей, приводит к (характерным для теоретико-категорной семантики вообще) производным графам, у которых ребра отвечают вычислительным операциям в узлах, а вершины описывают передаваемые между узлами данные. Например, параллельный (в узком смысле этого термина) вычислитель представляется графом, состоящим из не менее двух параллельных цепочек, имеющих одно и то же начало (входные данные) и один и тот же конец (выходные данные). Граф простейшего параллельного вычислителя имеет вид  $\bullet \Rightarrow \bullet$ . Небезынтересны также графы, имеющие всего одну вершину (и произвольное число ребер-петель): они представляют распределенные вычислительные системы с разделяемой памятью, которой отвечает вершина. Например, если пометить вершину множеством  $\coprod_{n=0}^{\infty} A^n$  («звезда Клини» исходного множества данных  $A$ ), то получится спецификация системы класса «пространство кортежей» (tuple space), родоначальницей которого была Linda [11].

Диалгебрам присуще одно ограничение, сужающее область их применимости: их гомоморфизмы строятся из того же «материала», что и операции, поскольку сигнатура состоит из эндифункторов. В приложениях в информатике встречаются противоречия этому ограничению, например, когда рассматриваются частичные алгебры — алгебраические спецификации с частично определенными функциями в качестве сигнатурных операций, гомоморфизмы которых, однако, должны быть определены полностью [12]. Для учета таких ситуаций вводятся сигнатурные функторы, область которых отличается от кообласти.

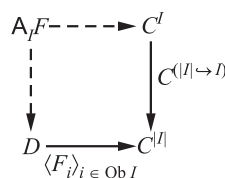
### 3 Категория графалгебр

Следуя вышеизложенным соображениям, обобщим теоретико-категорную конструкцию алгебры так, чтобы структура представлялась диаграммой произвольной формы в некоторой категории, а носители и гомоморфизмы заимствовались из другой категории. Назовем такое обобщение графалгеброй (graphalgebra).

**Определение 1.** Пусть  $I$  — произвольная малая категория (схема, форма),  $F_i : D \rightarrow C$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , — произвольное семейство функторов. *Графалгеброй* сигнатуры  $\langle I, F \rangle$  (кратко —  $\langle I, F \rangle$ -алгеброй) называется произвольная пара  $(A, \Delta)$ , состоящая из  $D$ -объекта  $A$  (носителя) и диаграммы  $\Delta : I \rightarrow C$  (структуры), такая что  $\Delta i = F_i A$ ,  $i \in \text{Ob } I$ . *Гомоморфизмом*  $\langle I, F \rangle$ -алгебр  $(A, \Delta)$  в  $(A', \Delta')$  называется  $D$ -морфизм  $f : A \rightarrow A'$ , удовлетворяющий следующему условию сохранения структуры: семейство  $C$ -морфизмов  $F_i f : \Delta i \rightarrow \Delta' i$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , образует естественное преобразование  $\Delta$  в  $\Delta'$  (т.е. для любых вершин формы  $i, k \in \text{Ob } I$  и стрелки  $h : i \rightarrow k$  выполняется условие  $F_k f \circ \Delta h = \Delta' h \circ F_i f$ ). *Область*  $\langle I, F \rangle$ -алгебры называется категория  $D$ , а *кообласть* — категория  $C$ . *Эндографалгеброй* называется  $\langle I, F \rangle$ -алгебра, область которой совпадает с кообластью.  $\square$

Легко видеть, что для любой фиксированной сигнатуры  $\langle I, F \rangle$  совокупность всех  $\langle I, F \rangle$ -алгебр и всех их гомоморфизмов образует категорию, которую будем обозначать через  $A_I F$ . Покажем, что ее можно получить при помощи универсальных конструкций в «категории всех категорий» **CAT**, а именно: произведения, декартова квадрата и экспоненты. Напомним, в частности, что категория  $C^{|I|}$  (где через  $|I|$  обозначается дискретная подкатегория в  $I$ , состоящая из всех  $I$ -объектов и всех их тождественных морфизмов) изоморфна произведению  $\text{Ob } I$  экземпляров категории  $C$  и снабжена канонической проекцией на  $j$ -й экземпляр  $\text{Pr}_j : C^{|I|} \rightarrow C$  для любого  $j \in \text{Ob } I$ , причем существует единственный функтор  $\langle F_i \rangle_{i \in \text{Ob } I} : D \rightarrow C^{|I|}$ , удовлетворяющий условию  $\text{Pr}_j \circ \langle F_i \rangle_{i \in \text{Ob } I} = F_j$  для всех  $j \in \text{Ob } I$ . Имеет место

**Теорема 1.** Категория  $\langle I, F \rangle$ -алгебр изоморфна вершине (объекту, находящемуся в левом верхнем углу) следующего декартова квадрата в **CAT**:



Доказательство. Проверяется непосредственно по правилам вычисления пределов и экспонент в **CAT**.  $\square$

Штриховые стрелки декартова квадрата из теоремы 1 задают два канонических «забывающих» функтора, определенных на любой категории  $\langle I, F \rangle$ -алгебр. Первый функтор задается левой вертикальной стрелкой и обозначается через  $U_I^F : A_I^F \rightarrow D : (A, \Delta) \mapsto A$ . По аналогии с алгебрами будем называть его *функтором носителя*. Он унивалентен (faithful, т. е. инъективен на любом множестве гомоморфизмов  $\langle I, F \rangle$ -алгебр, имеющих одну и ту же область и одну и ту же кообласть). Второй функтор, изображенный верхней горизонтальной стрелкой, будем обозначать через  $S_I^F : A_I^F \rightarrow C^I : (A, \Delta) \mapsto \Delta$  и называть *функтором структуры*.

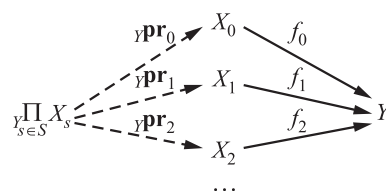
Рассмотрим сигнатуру вида  $\langle \mathbf{2}, F \rangle$ , где  $\mathbf{2}$  — категория, состоящая из двух объектов 0 и 1 и одного нетривиального морфизма  $0 \rightarrow 1$ . Эндографалгебра такой сигнатуры — это не что иное, как диалгебра. Из графалгебр такой сигнатуры получается еще одна хорошо известная конструкция — категория запятой (comma category) [2, § II.6], а именно: для произвольной пары функторов  $Q_0 : D_0 \rightarrow C \leftarrow D_1 : Q_1$  категория запятой  $Q_0/Q_1$  — это  $A_2(Q_0Pr_0, Q_1Pr_1 : D_0 \times D_1 \rightarrow C)$ . Известен способ построения категории запятой посредством декартова квадрата в **CAT** — частный случай теоремы 1 [13]. Графалгебраическая трактовка позволяет естественным образом обобщить эту конструкцию на произвольную форму  $I$  — рассмотреть для произвольного семейства функторов  $Q_i : D_i \rightarrow C, i \in \text{Ob } I$ , категорию графалгебр сигнатуры  $\langle I, (Q_iPr_i : \prod_{j \in \text{Ob } I} D_j \rightarrow C, i \in \text{Ob } I) \rangle$ . Эта категория была впервые введена и исследована автором настоящей статьи под названием *категории мультизапятой* (multicomma) [14]. Для мультизапятой сформулированы и доказаны аналоги теорем 1 и 2. Мультизапятая имеет прикладное значение как способ формально описать в архитектурном представлении  $C$  всевозможные системы, собираемые согласно структурной схеме  $I$  из разнородных компонентов, «каталоги» которых описываются категориями  $D_i$ .

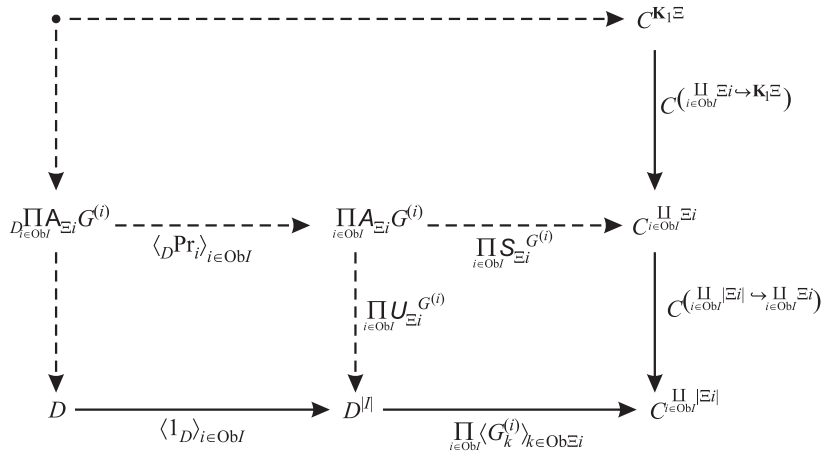
## 4 Иерархическое конструирование графалгебр

Специфицирование графовых вычислительных структур затрудняется тем обстоятельством, что такие структуры редко создаются из элементарных неспецифицируемых единиц. Напротив, на прак-

тике часто возникает потребность в иерархической структуре вида системы систем (System of Systems, SoS), единицами которой выступают цельные графовые структуры, требующие полноценной спецификации. Например, актуальные задачи искусственного интеллекта требуют собирать из нейросетей целые ансамбли [15]. Другим примером служат вычислительные кластеры и облака, состоящие из сложных микропроцессорных узлов, каждый из которых содержит несколько взаимодействующих вычислительных устройств и блоков памяти с разными функциями.

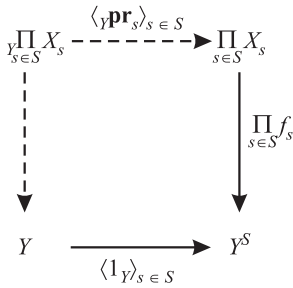
Покажем, как строить алгебраические спецификации иерархических графовых вычислительных структур SoS иерархически из алгебраических спецификаций составляющих. Формально структура SoS описывается графом, в вершинах которой находятся структуры, в свою очередь описываемые подходящими графами (вообще говоря, различными). Такой граф задается диаграммой вида  $\Xi : I \rightarrow \mathbf{Cat}$ . Ее можно отрисовать — преобразовать в малую категорию, порожденную заменой каждой вершины  $i \in \text{Ob } I$  графом  $\Xi_i$ , а каждой стрелки  $h : i \rightarrow l$  — совокупностью стрелок, по одной для каждой вершины  $k$  графа  $\Xi_i$ , направленной из  $k$  в вершину  $\Xi h(k)$  графа  $\Xi_l$ , с наложением подходящих условий естественности. Вместе с **Cat**-диаграммами можно отрисовывать и их морфизмы, так что имеется функтор отрисовки  $\mathbf{K}_1 : \mathbf{D}(\mathbf{Cat}) \rightarrow \mathbf{Cat}$  (это частный случай общей конструкции отрисовки, входящей в монаду диаграмм  $\mathbf{D} : \mathbf{CAT} \rightarrow \mathbf{CAT}$  [16]). Опишем процедуру построения категории графалгебр, сигнатура которых имеет форму отрисовки некоторой **Cat**-диаграммы  $\Xi$ , из категорий графалгебр сигнатур формы  $\Xi_i$  (при условии что все эти графалгебры имеют одну и ту же область и одну и ту же кообласть). Для этого понадобится конструкция расслоенного произведения (multiple pullback) — предела диаграммы, состоящей из произвольного семейства морфизмов с общей кообластью (sink) [9, упражнение 11L]. Напомним, что для произвольного множества  $S$  расслоенным произведением объектов  $X_s, s \in S$ , снабженных морфизмами  $f_s : X_s \rightarrow Y$ , называется универсальная конструкция, состоящая из объекта  $\prod_{s \in S} X_s$  и семейства морфизмов-проекций  $\gamma \text{pr}_s$ , действующих из него в  $X_s$ , таких что значение композиции  $f_s \circ \gamma \text{pr}_s$  не зависит от  $s$ :





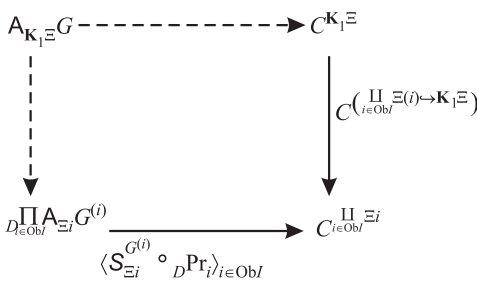
К доказательству теоремы 2: диаграмма в CAT, состоящая из трех декартовых квадратов

Расслоенным произведением пустой совокупности объектов служит  $Y$ . При  $|S| = 1$  расслоенное произведение изоморфно своему единственному сомножителю. При  $|S| = 2$  расслоенное произведение превращается в обычный декартов квадрат. Как легко проверить непосредственно, расслоенное произведение можно вычислить и для произвольного множества  $S$  посредством декартова квадрата следующего вида:



Имеет место

**Теорема 2.** Пусть задана произвольная малая категория  $I$ , диаграмма  $\Xi : I \rightarrow \mathbf{Cat}$  и семейство функторов  $G_k^{(i)} : D \rightarrow C$ ,  $k \in \text{Ob } \Xi i$ ,  $i \in \text{Ob } I$ . Пусть  $D \prod_{i \in |I|} A_{\Xi i} G^{(i)}$  — расслоенное произведение (в CAT) категорий  $\langle \Xi i, G^{(i)} \rangle$ -алгебр,  $i \in \text{Ob } I$ , снабженных функторами носителя. Категория  $\langle \mathbf{K}_1 \Xi, G \rangle$ -алгебр изоморфна вершине следующего декартова квадрата в CAT:



**Доказательство.** Рассмотрим следующую диаграмму в CAT, состоящую из трех декартовых квадратов (см. рисунок). В этой диаграмме правый нижний квадрат действительно является декартовым, поскольку он получен путем «почленного» перемножения декартовых квадратов из теоремы 1, отвечающих категориям  $\langle \Xi i, G^{(i)} \rangle$ -алгебр,  $i \in \text{Ob } I$ . Левый нижний декартов квадрат задает расслоенное произведение из условия теоремы. Верхний прямоугольник — это декартов квадрат, изображенный в условии теоремы. Ввиду композиционных свойств декартовых квадратов [9, предложение 11.10(1)], наружный контур диаграммы представляет собой декартов квадрат. Следовательно, ввиду теоремы 1 и соотношения  $|\mathbf{K}_1 \Xi| \cong \prod_{i \in \text{Ob } I} |\Xi i|$  (отрисовка не добавляет и не удаляет вершины), объект, находящийся в левом верхнем углу диаграммы, изоморфен категории  $\langle \mathbf{K}_1 \Xi, G \rangle$ -алгебр.  $\square$

Теорема 2 допускает ряд частных случаев. Например, если все вершины диаграммы  $\Xi$  помечены одной и той же категорией  $K$  и все стрелки помечены тождественными функторами  $1_K$ , то  $\mathbf{K}_1 \Xi \cong I \times K$  и категория  $\langle I \times K, G \rangle$ -алгебр изоморфна категории  $\langle I, (\text{Pr}_i S_K^{\hat{G}} : A_K \hat{G} \rightarrow C^K, i \in \text{Ob } I) \rangle$ -алгебр, где  $\hat{G}$  — семейство функторов  $\langle G_k^{(i)} \rangle_{i \in \text{Ob } I} : D \rightarrow C^{|I|}$ ,  $k \in \text{Ob } K$ ;  $\text{Pr}_i : (C^{|I|})^K \cong (C^K)^{|I|} \rightarrow C^K$  — проекция. Проиллюстрируем этот результат примером из области спецификации многопроцессорных вычислительных систем. Рассмотрим систему, состоящую из процессора  $p$  и сопроцессора  $c$ . Взаимодействие процессора с сопроцессором сводится к двум операциям: конвертация входных данных при выдаче процессором вычислительного задания сопроцессору, которую обозначим стрелкой  $d_c : p \rightarrow c$ , и обратная конвертация  $d_p : c \rightarrow p$  при получении процессором результата вычисления задания от сопроцессора. Подчиненное поло-

жение сопроцессора по отношению к процессору проявляется в том, что данные процессора включаются в данные сопроцессора инвариантно относительно конвертации, т. е. имеет место соотношение  $d_p \circ d_c = 1_p$ . Получается следующая схема вычислительной системы, обозначаемая далее через  $I_{pc}$ :

$$p \begin{array}{c} \xrightarrow{d_c} \\ \xleftarrow{d_p} \end{array} c \quad \text{с} \quad \text{с} \quad \text{с} \quad d_c \circ d_p.$$

Предположим, что процессор и сопроцессор специфицируются как АГД: спецификации процессора берутся из категории  $T_p\text{-Alg}$ , а сопроцессора — из  $T_c\text{-Alg}$  для подходящих сигнатурных функторов  $T_p, T_c : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Если операции конвертации данных при взаимодействии никак не согласуются с собственными вычислительными операциями процессора и сопроцессора, то спецификацией системы может служить «двухсортная» графалгебра сигнатуры  $\langle I_{pc}, (U_i \text{Pr}_i : T_p\text{-Alg} \times T_c\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{Set}, i \in \{p, c\}) \rangle$ , где  $U_i : T_i\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{Set}$  — функтор носителя. Однако чаще требуется, чтобы конвертация вела себя естественно относительно вычислений, и далее будет продемонстрировано, как удовлетворить это требование путем специфицирования системы в виде иерархической SoS, а именно: у рассматриваемой SoS спецификации обоих узлов имеют сигнатуру формы **2**, поэтому спецификация системы имеет сигнатуру формы  $I_{pc} \times \mathbf{2}$ , к которой можно применить вышеприведенный результат. Согласно ему, сначала спецификации процессора и сопроцессора комбинируются в двухсортную алгебру с сигнатурным функтором  $T_p \times T_c : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ , а затем в качестве спецификации системы выбирается графалгебра сигнатуры  $\langle I_{pc}, (\text{Pr}_i S_{pc} : (T_p \times T_c)\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{Set}^2, i \in \{p, c\}) \rangle$ , где

$$S_{pc} : (T_p \times T_c)\text{-Alg} \rightarrow (\mathbf{Set} \times \mathbf{Set})^2 \\ : ((A_p, A_c), (a_p : T_p A_p \rightarrow A_p, a_c : T_c A_c \rightarrow A_c)) \mapsto (a_p, a_c).$$

Искомая согласованность конвертации с вычислениями обеспечивается тем, что морфизмы, описывающие операции конвертации, заимствуются в этой спецификации не из  $\mathbf{Set}$ , а из категории стрелок  $\mathbf{Set}^2$ , т. е. образуют коммутативные квадраты с вычислительными операциями. При помощи теоремы 2 этот пример можно обобщить и на случай, когда процессор и сопроцессор специфицируются произвольными графалгебрами разных форм.

## 5 Заключение

Настоящая работа представляет первый шаг в исследовании новой категорной конструкции

графалгебры: введены самые основные понятия и показаны некоторые взаимосвязи между ними. В ходе дальнейшей работы предполагается, с одной стороны, рассмотреть возможность и целесообразность обобщения на графалгебры различных приемов алгебраической спецификации: конструирования канонической семантики, верификации путем структурной индукции, параметризации, выделения многообразий и др. С другой стороны, интерес представляет разработка приемов, специфичных для графовых структур — в первую очередь это естественные переходы между графалгебрами различных сигнатур, в том числе включающие трансформации форм. Актуальна также разработка программных инструментов, поддерживающих составление и анализ графалгебраических спецификаций.

## Литература

1. *Cleaveland R., Smolka S. A.* Strategic directions in concurrency research // ACM Comput. Surv., 1996. Vol. 28. No. 4. P. 607–625.
2. *Маклейн С.* Категории для работающего математика / Пер. с англ. — М.: Физматлит, 2004. 352 с. (*Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. — New York, NY, USA: Springer, 1978. 317 p.)
3. *Abramsky S., Gay S. J., Nagarajan R.* Interaction categories and foundations of typed concurrent programming // Deductive program design / Ed. M. Broy. — NATO ASI ser. F. — Springer-Verlag, 1996. P. 35–113.
4. *Bergstra J. A., Middelburg C. A.* Using Hoare logic in a process algebra setting // arXiv.org, 2019. 24 p. arXiv:1906.04491 [cs.LO].
5. *Stewart R., Berthomieu B., Garcia P., Ibrahim I., Michaelson G., Wallace A.* Verifying parallel dataflow transformations with model checking and its application to FPGAs // J. Syst. Architect., 2019. Vol. 101. Art. 101657.
6. *Ковалёв С. П.* Формальный подход к разработке программных систем. — Новосибирск: НГУ, 2004. 180 с.
7. *Jacobs B., Rutten J.* A tutorial on (co)algebras and (co)induction // EATCS Bulletin, 1997. Vol. 62. P. 222–259.
8. *Poll E., Zwanenburg J.* From algebras and coalgebras to dialgebras // Electronic Notes Theoretical Computer Science, 2001. Vol. 44. Iss. 1. P. 289–307.
9. *Adámek J., Herrlich H., Strecker G. E.* Abstract and concrete categories. — New York, NY, USA: John Wiley, 1990. 507 p.
10. *Looks M., Herreshoff M., Hutchins D., Norvig P.* Deep learning with dynamic computation graphs // arXiv.org, 2017. arXiv:1702.02181 [cs.NE].
11. *Carriero N. J., Geleznik D., Mattson T. G., Sherman A. H.* The Linda alternative to message passing systems // Parallel Comput., 1994. Vol. 20. No. 4. P. 633–655.

12. *Burmeister P.* Partial algebras — an introductory survey // *Algebras and orders* / Eds. I. G. Rosenberg, G. Sabidussi. — NATO ASI ser. C. — Kluwer Academic Publs., 1993. Vol. 389. P. 1–70.
13. Comma category. nLab: 2019. <https://ncatlab.org/nlab/show/comma+category>.
14. *Ковалёв С. П.* Методы теории категорий в цифровом проектировании гетерогенных киберфизических систем // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 23–29.
15. *Fawaz H. I., Forestier G., Weber J., Idoumghar L., Muller P.* Deep neural network ensembles for time series classification // *Joint Conference (International) on Neural Networks Proceedings*. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019. Art. 8852316. 6 p. doi: 10.1109/IJCNN.2019.8852316.
16. *Ковалёв С. П.* Теория категорий как математическая прагматика модельно-ориентированной системной инженерии // *Информатика и её применения*, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 95–104.

*Поступила в редакцию 03.09.20*

## ALGEBRAIC SPECIFICATION OF GRAPH COMPUTATIONAL STRUCTURES

S. P. Kovalyov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya Str., Moscow 117997, Russian Federation

**Abstract:** Problems of composing algebraic specifications for computational structures represented by data flow graphs are considered. The evolution of algebraic program specification tools is briefly outlined, from many-sorted algebra via coalgebra to a category-theoretical construction of dialgebra capable of describing interactive computing nodes. As a next step, a novel category-theoretical construction called graphalgebra is proposed which allows combining dialgebras into arbitrary directed multigraphs whose edges represent computational operations at nodes and whose vertices describe data exchanged between nodes. Examples of graphalgebraic specifications for neural networks and multiprocessor computational systems are given. The method of building categories of graphalgebras via universal constructions is described. For a computational structure of the system of systems kind consisting of graph structures, methods of hierarchical construction of an algebraic specification from the specifications of components are proposed.

**Keywords:** algebraic specification; graph computational structure; system of systems; category theory; dialgebra; graphalgebra; pullback

**DOI:** 10.14357/19922264220101

### References

1. Cleaveland, R., and S. A. Smolka. 1996. Strategic directions in concurrency research. *ACM Comput. Surv.* 28(4):607–625.
2. Mac Lane, S. 1978. *Categories for the working mathematician*. New York, NY: Springer. 317 p.
3. Abramsky, S., S. J. Gay, and R. Nagarajan. 1995. Interaction categories and foundations of typed concurrent programming. *Deductive program design*. Ed. M. Broy. NATO ASI ser. F. Springer-Verlag. 35–113.
4. Bergstra, J. A., and C. A. Middelburg. 2019. Using Hoare logic in a process algebra setting. *arXiv.org*. 24 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/1906.04491> (accessed December 17, 2021).
5. Stewart, R., B. Berthomieu, P. Garcia, I. Ibrahim, G. Michaelson, and A. Wallace. 2019. Verifying parallel dataflow transformations with model checking and its application to FPGAs. *J. Syst. Architect.* 101:101657.
6. Kovalyov, S. P. 2004. *Formal'nyy podkhod k razrabotke programnykh sistem* [Formal approach to software systems development]. Novosibirsk: NGU. 180 p.
7. Jacobs, B., and J. Rutten. 1997. A tutorial on (co)algebras and (co)induction. *EATCS Bulletin* 62:222–259.
8. Poll, E., and J. Zwanenburg. 2001. From algebras and coalgebras to dialgebras. *Electronic Notes Theoretical Computer Science* 44(1):289–307.
9. Adámek, J., H. Herrlich, and G. E. Strecker. 1990. *Abstract and concrete categories*. New York, NY: John Wiley. 507 p.
10. Looks, M., M. Herreshoff, D. Hutchins, and P. Norvig. 2017. Deep learning with dynamic computation graphs. *arXiv.org*. Available at: <https://arxiv.org/abs/1702.02181> (accessed December 17, 2021).
11. Carriero, N. J., D. Gelernter, T. G. Mattson, and A. H. Sherman. 1994. The Linda alternative to message passing systems. *Parallel Comput.* 20(4):633–655.



12. Burmeister, P. 1993. Partial algebras — an introductory survey. *Algebras and orders*. Eds. I. G. Rosenberg and G. Sabidussi. NATO ASI ser. C. Kluwer Academic Pubs. 389:1–70.
13. Comma category. Available at: <https://ncatlab.org/nlab/show/comma+category> (accessed December 17, 2021).
14. Kovalyov, S. P. 2021. Metody teorii kategoriy v tsifrovom proektirovanii geterogennykh kiberfizicheskikh sistem [Methods of category theory in digital design of heterogeneous cyber-physical systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):23–29.
15. Fawaz, H. I., G. Forestier, J. Weber, L. Idoumghar, and P. Muller. 2019. Deep neural network ensembles for time series classification. *Joint Conference (International) on Neural Networks Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 8852316. 6 p. doi: 10.1109/IJCNN.2019.8852316.
16. Kovalyov, S. P. 2018. Teoriya kategoriy kak matematicheskaya pragmatika model'no-oriyentirovannoy sistemnoy inzhenerii [Category theory as a mathematical pragmatics of model-based systems engineering]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(1):95–104.

*Received September 3, 2020*

## Contributor

**Kovalyov Sergey P.** (b. 1972) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading scientist, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya Str., Moscow 117997, Russian Federation; kovalyov@sibnet.ru

# О ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СХЕМЫ 3D-ПЕЧАТИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. В. Босов<sup>1</sup>, Ю. И. Битюков<sup>2</sup>, Г. Ю. Денискина<sup>3</sup>

**Аннотация:** Статья посвящена задаче поиска оптимальных траекторий укладки волокон при изготовлении конструкций, армированных непрерывными волокнами, методом 3D-печати. Предложена оптимизационная постановка, в которой целевой функцией выступает один из критериев разрушения композита. Схемы укладки волокон при печати моделируются с помощью аналитических функций, которые находятся из задачи Неймана для уравнения Лапласа. Краевые условия определяются на основе задания углов между волокнами и границей области. Задача Неймана решается посредством конформного преобразования области печати на круг. Таким образом, критерий разрушения композита становится функцией от углов, которые волокна образуют с границей области. Для минимизации целевой функции используется генетический алгоритм поиска глобального минимума функции нескольких переменных.

**Ключевые слова:** композиционные материалы; вейвлеты; 3D-печать; аналитическая функция

**DOI:** 10.14357/19922264220102

## 1 Введение

Композиционные материалы (КМ) широко применяются в разных отраслях промышленности, например авиационной, автомобильной. Композиционные материалы состоят из армирующего и связующего материалов; в качестве армирующего широко применяются углеродные волокна, обладающие большой удельной прочностью. Механические свойства изделий из КМ зависят от направления этого волокна. Перспективным направлением, позволяющим создавать конструкции сложной формы последовательной укладкой композиционного материала, стала технология 3D-печати (см. пример такого решения в [1]). Применение 3D-печати и КМ позволяет получать конструкции с пространственным армированием по заданным траекториям. Полный контроль над расположением волокон во время печати позволяет укладывать их именно так, как того требуют условия эксплуатации: чтобы 100% волокон шли в нужном направлении. Для практической реализации, для разработки автоматизированной системы проектирования (CAD/CAE-системы) и моделирования процесса 3D-печати актуальна задача поиска оптимальной схемы печати, диктуемой условиями эксплуатации изделия.

Как известно [2], схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики КМ в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной систе-

мы координат, т. е. найти эту схему можно только из решений уравнений с разными локальными системами координат. Для задания локальной системы координат в статье использованы аналитические функции, которые строятся на основе известных формул Дини и Чизотти [3] всего лишь заданием направления укладки волокна на границе изделия. В качестве критерия оптимизации для выбора траекторий укладки волокон можно взять любой из критериев разрушения КМ [2].

## 2 Моделирование траекторий укладки волокон при 3D-печати

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^2$  — область печати. Касательные векторы к кривым, по которым укладываются волокна при 3D-печати, образуют векторное поле в  $X$ , которое будем характеризовать комплексным числом  $r = r_1 + ir_2$ , где  $r_1 = r_1(x_1, x_2)$ ;  $r_2 = r_2(x_1, x_2)$ . Это поле предполагается гармоническим, т. е. соленоидальным и потенциальным [3], такое поле не имеет источников и вихрей. Будем считать, что  $X$  — подмножество односвязной области  $\tilde{X}$ :  $X \subset \tilde{X}$ . Значит, выражение  $-r_2 dx_1 + r_1 dx_2$  есть полный дифференциал некоторой функции  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$ , определенной на  $\tilde{X}$ . Эта функция называется функцией тока [3]. Кроме того, выражение  $r_1 dx_2 + r_2 dx_1$  также есть полный диффе-

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский авиационный институт; avbosov@ipiran.ru

<sup>2</sup>Московский авиационный институт, yib72@mail.ru

<sup>3</sup>Московский авиационный институт, degal7@yandex.ru

ренциал некоторой функции  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$ , которая называется потенциалом поля [3]. Функция тока  $v_2(x_1, x_2)$  и потенциал поля  $v_1(x_1, x_2)$  являются сопряженными гармоническими функциями [3]. Линии тока и линии равного потенциала образуют ортогональное семейство. Аналитическая функция  $v_1(x_1, x_2) + iv_2(x_1, x_2)$ ,  $x_1 + ix_2 \in \tilde{X}$ , называется комплексным потенциалом поля [3]. Таким образом, любая аналитическая функция в области  $\tilde{X}$  дает и схему укладки волокон, и локальную криволинейную систему координат в  $X \subset \tilde{X}$ . Будем далее точки  $x = (x_1, x_2)$  изображать на одной комплексной плоскости, а точки  $v = (v_1, v_2)$  — на другой. Тогда преобразование  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$ ,  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$  и его обратное  $x_1 = x_1(v_1, v_2)$ ,  $x_2 = x_2(v_1, v_2)$  будет представлять собой преобразование множества  $\tilde{X}$  на плоскости  $x$  в множество  $\Omega$  на плоскости  $v$ . Сеть линий уровня  $v_1(x_1, x_2) = const$ ,  $v_2(x_1, x_2) = const$  называется изотермической сетью [3]. Кривые, по которым укладываются волокна, определяются параметрическими представлениями

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha,1} : r_{\alpha,1}(v_1) &= x_1(v_1, \alpha) + ix_2(v_1, \alpha), \quad v_1 \in T_{\alpha,1}; \\ \gamma_{\beta,2} : r_{\beta,2}(v_2) &= x_1(\beta, v_2) + ix_2(\beta, v_2), \quad v_2 \in T_{\beta,2}, \end{aligned}$$

где  $T_{\alpha,1}$  и  $T_{\beta,2}$  — некоторые промежутки;  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ;  $T_{\alpha,1} \times \{\alpha\}, \{\beta\} \times T_{\beta,2} \subset \Omega$ .

Поскольку функция  $v_1(x_1, x_2)$  является гармонической в односвязной области  $\tilde{X}$ , то она удовлетворяет уравнению Лапласа. Пусть  $\theta(x)$  — угол между внешней единичной нормалью

$$n(x) = n_1(x) + in_2(x)$$

к границе области  $\tilde{X}$  и волокном. В рамках рассматриваемой модели 3D-печати направление волокна в точке  $x \in \partial\tilde{X}$  задается вектором

$$t(x) = \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \Big|_{v(x)} + i \frac{\partial x_2}{\partial v_1} \Big|_{v(x)}.$$

Учитывая, что  $x_1 \equiv x_1(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$  и  $x_2 \equiv x_2(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ , а также соотношения Коши–Римана, получаем

$$t(x) = \frac{1}{|\nabla v_1(x)|} \left( \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} + i \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} \right).$$

Таким образом, на границе области должно выполняться

$$\frac{1}{|\nabla v_1(x)|} \left( \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} n_1(x) + \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} n_2(x) \right) = \cos \theta(x),$$

что можно переписать в виде

$$\frac{\partial v_1(x)}{\partial n} = q(x) \cos \theta(x),$$

где  $q(x) = |\nabla v_1(x)|$ . Известно [3], что должно выполняться условие

$$\int_{\partial\tilde{X}} \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} ds = \int_{\partial\tilde{X}} \frac{\partial v_2(x)}{\partial s} ds = \int_{\partial\tilde{X}} dv_2 = 0,$$

где  $\partial v_2(x)/\partial s$  — производная по направлению касательной к границе области. Поэтому  $q(x)$  не может быть произвольной. Итак, функцию  $v_1(x_1, x_2)$  на  $\tilde{X}$  будем искать из задачи Неймана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} &= 0; \\ \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} &= \eta(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \partial\tilde{X}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\eta(x) = q(x) \cos \theta(x)$ . Функция  $q(x)$  в представленных ниже примерах выбиралась следующим образом:

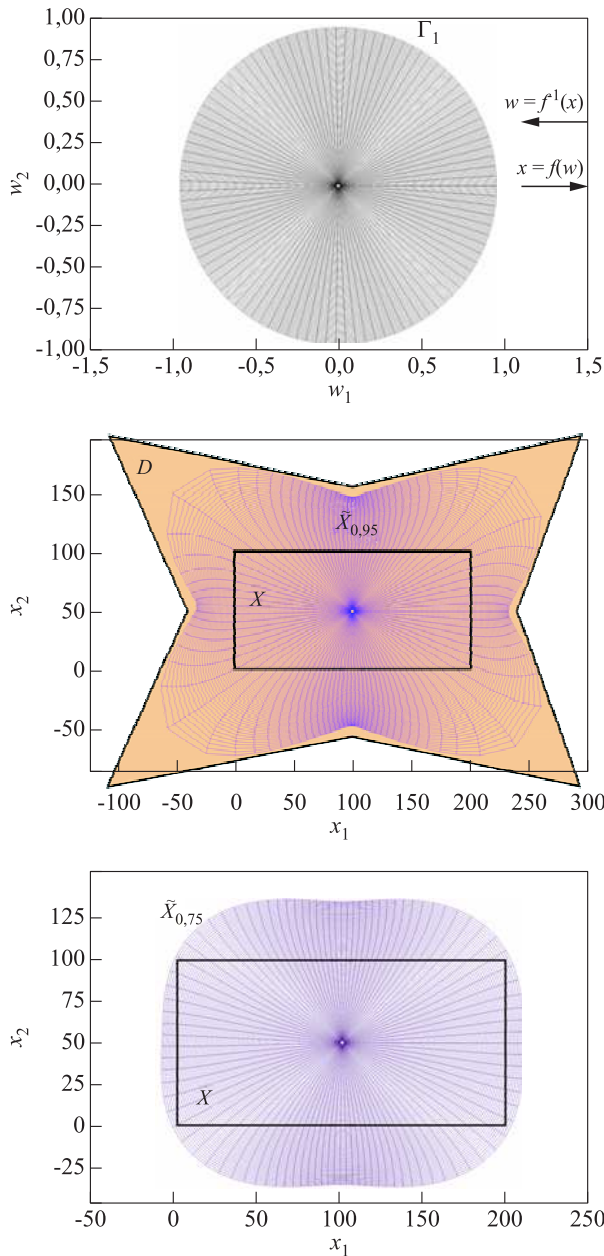
$$q(x) = \begin{cases} \left( \int_{\cos \theta(x) > 0} \cos \theta(x) ds \right)^{-1}, & \text{если } \cos \theta(x) > 0; \\ - \left( \int_{\cos \theta(x) < 0} \cos \theta(x) ds \right)^{-1}, & \text{если } \cos \theta(x) < 0. \end{cases}$$

Пусть  $\Gamma_\rho = \{w = w_1 + iw_2 : w_1^2 + w_2^2 < \rho\}$  и  $x = f(w) = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2)$  — конформное преобразование круга  $\Gamma_1$  на некоторую односвязную область  $D$ , содержащую множество  $X$  (рис. 1). Для  $\rho \in (0; 1)$  обозначим  $\tilde{X}_\rho = f(\Gamma_\rho)$ . Причем  $\rho$  выбрано так, что  $X \subset \tilde{X}_\rho$ . Если обозначить через  $v(t)$  угол наклона касательной к границе области  $D$  в точке  $x$ , соответствующей точке  $w = w_1 + iw_2 \in \partial\Gamma_1$  при конформном отображении  $x = f(w)$ , то конформное преобразование единичного круга на область  $D$  может быть найдено по формуле Чизотти [3]:

$$\begin{aligned} x &= f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2) = \\ &= i \int_{w_{1,0} + iw_{2,0}}^{w_1 + iw_2} \frac{e^{i\xi(y)}}{(1-y)^2} dy + x_0; \end{aligned}$$

$$\xi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \frac{e^{it} + y}{e^{it} - y} dt + i\xi_0,$$

где  $\xi_0$  — некоторая действительная постоянная;  $x_0 \in D$  и  $w_{0,1} + iw_{0,2} \in \Gamma_1$  — заданные точки. Пусть теперь функция  $v_1(x)$  является решением задачи (1), где  $\tilde{X} = \tilde{X}_\rho$ . Из соотношений Коши–Римана и гармоничности функций  $f_1(w_1, w_2)$  и  $f_2(w_1, w_2)$  следует, что функция  $z(w) = v_1(f(w))$



**Рис. 1** Конформное преобразование единичного круга на многоугольник и его ограничения на круги  $\Gamma_{0,95}$  и  $\Gamma_{0,75}$

удовлетворяет уравнению  $\partial^2 z / \partial w_1^2 + \partial^2 z / \partial w_2^2 = 0$ . Определим краевое условие. Пусть  $w = w_1 + iw_2 \in \partial \Gamma_\rho$  и  $m$  — единичная нормаль к границе круга  $\Gamma_\rho$ . Тогда  $m = w_1/\rho + iw_2/\rho$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(w)}{\partial m} &= \frac{\partial z(w)}{\partial w_1} \frac{w_1}{\rho} + \frac{\partial z(w)}{\partial w_2} \frac{w_2}{\rho} = \\ &= \frac{\partial v_1(f(w))}{\partial x_1} \frac{\partial f_1(w)}{\partial m} + \frac{\partial v_1(f(w))}{\partial x_2} \frac{\partial f_2(w)}{\partial m}. \end{aligned}$$

Рассмотрим кривую  $\partial \Gamma_\rho$  и кривую с параметрическим представлением  $\gamma_w: r_w(t) = w_1 t + iw_2 t$ ,  $t \in [0; 1]$ . Они перпендикулярны в точке  $t = 1$ , а их образы при конформном преобразовании  $x = f(w)$  представляют собой кривую  $\partial \tilde{X}_\rho$  и кривую  $\gamma_{f(w)}: r_{f(w)}(t) = f_1(w_1 t, w_2 t) + if_2(w_1 t, w_2 t)$ ,  $t \in [0; 1]$ . Поскольку конформное преобразование сохраняет углы между кривыми, то вектор нормали к границе  $\partial \tilde{X}_\rho$  коллинеарен касательному вектору кривой  $\gamma_{f(w)}$  в точке, соответствующей  $t = 1$ . С учетом того, что

$$\begin{aligned} |r'_{f(w)}(1)| &= \\ &= \rho |\nabla f_1(w)| = \rho \sqrt{\left(\frac{\partial f_1(w)}{\partial w_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1(w)}{\partial w_2}\right)^2}, \end{aligned}$$

получаем

$$n = \frac{r'_{f(w)}(1)}{|r'_{f(w)}(1)|} = \frac{\partial f_1(w)/\partial m + i \partial f_2(w)/\partial m}{|\nabla f_1(w)|}.$$

Следовательно, функция  $z$  является решением задачи Неймана для круга  $\Gamma_\rho: \partial^2 z / \partial w_1^2 + \partial^2 z / \partial w_2^2 = 0$ ,  $\partial z(w)/\partial m = \eta(f(w)) |\nabla f_1(w)|$ ,  $w \in \Gamma_\rho$ . Как известно [3], решение такой задачи может быть найдено по формуле Дини:

$$\begin{aligned} z(w_1, w_2) &= z_0 - \\ &- \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \times \\ &\times \ln \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{\rho^2} d\tau, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $z_0 \in \mathbb{C}$  — произвольная константа.

Итак, из (2) можно найти  $z(w)$ ,  $w \in \Gamma_\rho$ . Зная преобразование  $x = f(w)$ , из соотношения  $z(w) = v_1(f(w))$  можно найти  $v_1(x) = z(f^{-1}(x))$ ,  $x \in \tilde{X}_\rho$ . Функция  $v_2(x)$  может быть найдена аналогично, но для решения уравнений механики КМ она не нужна, достаточно  $v_1(x)$  и соотношений Коши–Римана. На рис. 1 показано конформное преобразование единичного круга на многоугольник и его ограничения на круги  $\Gamma_{0,95}$  и  $\Gamma_{0,75}$ . На рис. 2 показано векторное поле, образованное касательными к кривым  $v_1(x_1, x_2) = const$  (рис. 2, а) и  $v_2(x_1, x_2) = const$  (рис. 2, б).

### 3 Построение оптимальной схемы 3D-печати

Используем теперь описанную модель для поиска оптимальных траекторий укладки волокон при

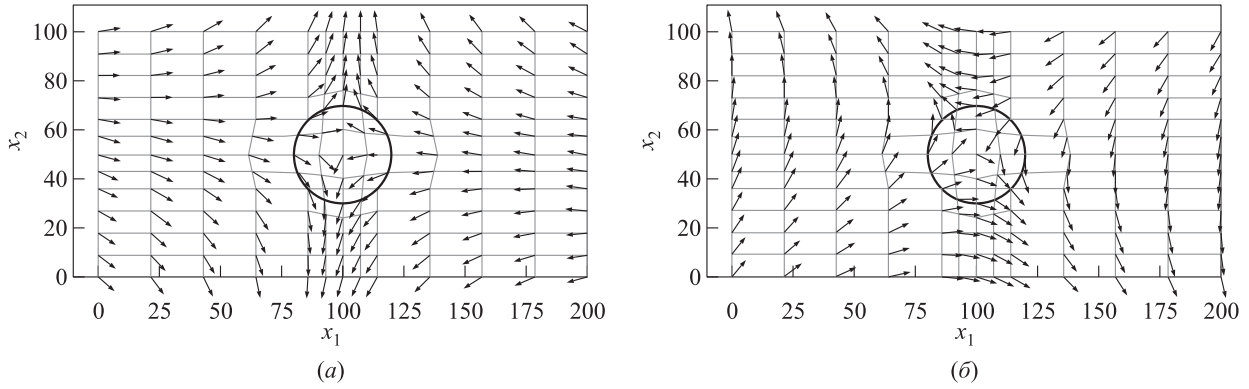


Рис. 2 Касательные векторы к кривым  $v_1(x_1, x_2) = const$  (а) и  $v_2(x_1, x_2) = const$  (б)

3D-печати. Пусть  $\sigma_1^\pm$  и  $\sigma_2^\pm$  — пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперек волокон, а  $\hat{\tau}_{12}$  — предел прочности при сдвиге в плоскости слоя [2]. В качестве целевой функции используем критерии максимальных напряжений

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = \max \left( \frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}} \right),$$

где

$$m_1(\sigma_1) = \begin{cases} \sigma_1^+, & \text{если } \sigma_1 > 0; \\ \sigma_1^-, & \text{если } \sigma_1 < 0; \end{cases}$$

$$m_2(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_2^+, & \text{если } \sigma_2 > 0; \\ \sigma_2^-, & \text{если } \sigma_2 < 0. \end{cases}$$

Значения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\tau_{12}$  могут быть найдены приближенно из уравнений механики композиционных материалов [2], если задать преобразование  $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$ . Краевые условия к этим уравнениям определяются углами  $\theta(x)$ ,  $x \in \partial X$ , которые волокна образуют с внешней нормалью к границе

множества  $X$ . Следовательно, целевая функция является функцией этих углов:

$$R : \theta|_{\partial X} \mapsto v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) \mapsto \max \left( \frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}} \right).$$

Соответствие  $(v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$  дает приближенное решение уравнений механики, полученное далее методом приближенного решения уравнений в частных производных с помощью вейвлетов, построенных на основе схем подразделений [4] и подъема [5]. Преимущество вейвлетов перед другими базисными функциями состоит в том, что вейвлет-коэффициенты убывают быстро, поэтому достаточно небольшого числа слагаемых в разложениях. Дополнительное преимущество вейвлетов, использующих схемы подразделений и подъема, состоит в возможности управлять формой базисных функций, например обнулять их на выбранной области, что еще уменьшает число слагаемых. Эти преимущества оказываются важны, так

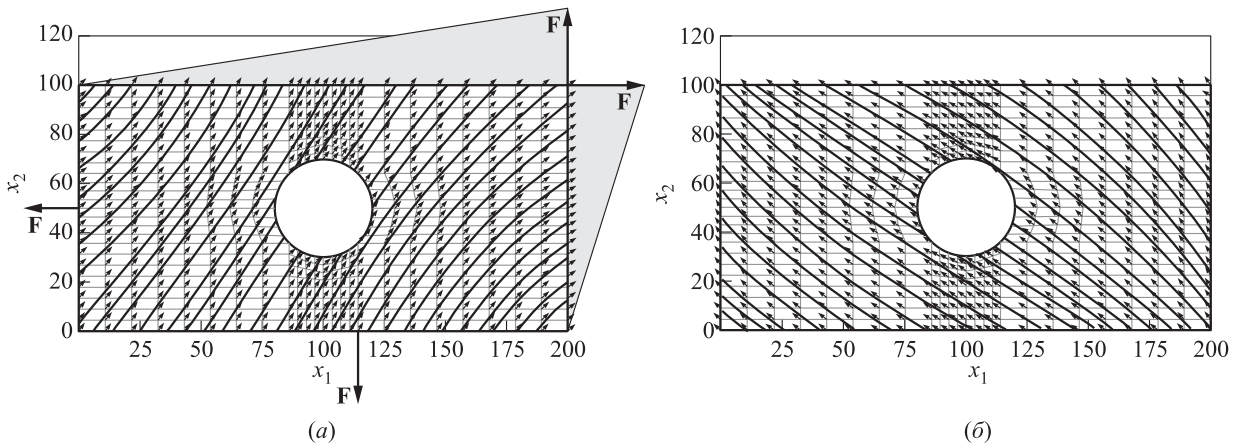


Рис. 3 Оптимальные траектории укладки волокон при 3D-печати

как при минимизации целевой функции требуется многократно решать систему уравнений в частных производных, описывающую напряженно-деформируемое состояние конструкции.

Минимизировать функцию  $R$  предлагается с помощью метода, представленного в [6] и реализованного в библиотеке `scipy` для языка программирования Python. Поскольку не требуется искать глобальный минимум, а достаточно обеспечить выполнение условия  $R < 1$ , можно закончить итерационный процесс при его выполнении. На рис. 3 представлены траектории укладки волокон для 3D-печати прямоугольной пластины с отверстием

$$X = \left\{ (x_1, x_2) : (x_1 - x_{1,0})^2 + (x_2 - x_{2,0})^2 \leq r^2, \right. \\ \left. x_2 \in [0; a], x_2 \in [0; b] \right\}$$

после двух итераций генетического алгоритма.

#### 4 Применение вейвлетов к приближенному решению задач теории упругости

В статье [7] проанализирован общий подход к построению биортогональных вейвлет-систем на основе схем подъема [5], в том числе показано, что эти схемы тесно связаны со схемами подразделений [4] и позволяют строить вейвлеты с заданными свойствами. На основе таких вейвлет-систем далее представлен алгоритм приближенного решения уравнений теории упругости.

Пусть  $X \subset \mathbf{R}^n$ . Будем рассматривать действительное пространство  $L_2(X)$ .

**Определение 1** [5]. Кратномасштабный анализ на  $X$  определяется как последовательность подпространств  $V_j \subset L_2(X)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , такая, что  $V_j \subset V_{j+1}$ ;  $\cup_j V_j$  плотно в  $L_2(X)$  и для каждого  $j$  существуют масштабирующие функции  $\varphi_{j,k}$ ,  $k \in K_j$ , такие что множество  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in K_j}$  представляет собой базис Рисса [8] в  $V_j$ , при этом  $K_j \subset K_{j+1}$ .

**Определение 2** [8]. Пусть  $\{V_j\}_{j \geq 0}$  и  $\{\tilde{V}_j\}_{j \geq 0}$  — два кратномасштабных анализа на  $X$  с масштабирующими функциями  $\varphi_{j,k}$  и  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ ,  $k \in K_j$ , соответственно. Кроме того, пусть  $V_{j+1} = V_j + W_j$ ,  $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j + \tilde{W}_j$  и  $\{\psi_{j,k}, k \in M_j\}$ ,  $\{\tilde{\psi}_{j,k}, k \in M_j\}$  — базисы Рисса в  $W_j$  и  $\tilde{W}_j$  соответственно. Если  $(\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'}) = \delta_{k,k'}$ ,  $(\psi_{j,m}, \varphi_{j,k}) = 0$ ,  $(\tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j,m}) = 0$ ,  $(\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j,m'}) = \delta_{m,m'} \forall j, \forall m, m' \in M_j, \forall k, k' \in K_j$ , то семейства функций  $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq 0, k \in M_j}$  и  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \geq 0, k \in M_j}$  называются биортогональными вейвлет-системами.

Из определения 2 следует [5], что существуют последовательности  $\{h_{j,k,l}\}$  и  $\{\tilde{h}_{j,k,l}\}$  та-

кие, что  $\varphi_{j,k} = \sum_{l \in K_{j+1}} h_{j,k,l} \varphi_{j+1,l}$  и  $\tilde{\varphi}_{j,k} = \sum_{l \in K_{j+1}} \tilde{h}_{j,k,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}$ . Поскольку  $W_j \subset V_{j+1}$  и  $\tilde{W}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$ , то  $\psi_{j,m} = \sum_{l \in K_{j+1}} g_{j,m,l} \varphi_{j+1,l}$  и  $\tilde{\psi}_{j,m} = \sum_{l \in K_{j+1}} \tilde{g}_{j,m,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}$ . Последовательности  $h_{j,k,l}$ ,  $\tilde{h}_{j,k,l}$ ,  $g_{j,k,l}$  и  $\tilde{g}_{j,k,l}$  называются фильтрами. В случае биортогональных вейвлет-систем для  $f \in L_2(X)$  имеет место равенство [5, 8]:

$$f = \sum_{k \in K_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m},$$

где  $v_{j,k} = (f, \tilde{\varphi}_{j,k})$ ;  $\gamma_{j,m} = (\tilde{\psi}_{j,m}, f)$ .

Схема подъема (lifting scheme) позволяет строить биортогональные вейвлет-системы с заданными свойствами, используя некоторые начальные биортогональные вейвлет-системы с фильтрами  $h_{j,k,l}^0$ ,  $\tilde{h}_{j,k,l}^0$ ,  $g_{j,k,l}^0$  и  $\tilde{g}_{j,k,l}^0$ . По схеме подъема новое семейство фильтров  $h_{j,k,l}$ ,  $\tilde{h}_{j,k,l}$ ,  $g_{j,k,l}$  и  $\tilde{g}_{j,k,l}$ , определяющих биортогональные вейвлет-системы, находится по формулам [5]:

$$h_{j,k,l} = h_{j,k,l}^0; \quad \tilde{h}_{j,k,l} = \tilde{h}_{j,k,l}^0 + \sum_{m \in M_j} s_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,l}^0;$$

$$g_{j,m,l} = g_{j,m,l}^0 - \sum_{k \in K_j} s_{j,k,m} h_{j,k,l}^0; \quad \tilde{g}_{j,m,l} = \tilde{g}_{j,m,l}^0$$

при любом выборе последовательности  $\{s_{j,k,m}\}_{k \in K_j, m \in M_j}$ . Следует заметить, что масштабирующие функции  $\varphi_{j,k}$  одинаковы в исходном и поднятом кратномасштабном анализе. Кроме того, можно не менять функцию  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ , а поднимать  $\varphi_{j,k}$ . Механизм этот точно такой же и называется двойственной схемой подъема. Он позволяет улучшить свойства вейвлета  $\tilde{\psi}_{j,m}$ .

Пусть последовательности  $d^i : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и  $a : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  имеют носитель  $\{-1, 0, 1\}$  и на нем могут быть записаны в виде:

$$d^0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}; \quad d^1 = 2^{j+p-1}(-1 \ 0 \ 1);$$

$$d^2 = 2^{2(j+p)}(1 \ -2 \ 1); \quad a = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad p=1, 2, \dots$$

Для краткости введем обозначение для частной производной

$$\partial^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} f(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}$$

порядка  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ . На основании результатов, представленных в [7, 9], можно сформулировать следующую теорему, которая представляет собой алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на  $\mathbf{R}^n$ , полученных с помощью схемы подъема.

**Теорема.** Пусть  $\Lambda^n$  — совокупность всех ненулевых векторов  $e \in \mathbf{Z}^n$ , координаты которых равны 0 или 1. Обозначим  $K_j = 2^{-j} \mathbf{Z}^n$ ,  $M_j = 2^{-j} \mathbf{Z}^n + 2^{-j-1} \Lambda^n$ . Предположим, что последовательность  $A = \{A_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  определяет функцию из  $C^2(\mathbf{R})$  с компактным носителем [4]. Определим последовательность  $b = \{b_t\}_{t \in \mathbf{Z}^n}$  равенством  $b_t = \prod_{i=1}^n A_{t_i}$ ,  $t = (t_1 \dots t_n)^T \in \mathbf{Z}^n$ . Пусть оператор  $U$  функции  $v : K_j \rightarrow \mathbf{R}$  ставит в соответствие функцию  $Uv : K_{j+1} \rightarrow \mathbf{R}$ , определенную равенством  $(Uv)_k = v_k, \forall k \in K_j$ , и  $(Uv)_m = 0, \forall m \in M_j$ . Тогда если последовательность  $v_{j+p}$  получается по схеме подразделений

$$v_{j+p} = b * (Uv_{j+p-1}), \quad p = 1, 2, \dots;$$

$$v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

где  $*$  обозначает свертку, то значения масштабирующих функций и их частных производных можно найти из приближенных равенств:

$$\varphi_{j,\alpha} (2^{-j-p}\beta) \approx v_{j+p,\beta}; \quad \partial^{(l_1, \dots, l_n)} \varphi_{j,\alpha} (2^{-j-p}\beta) \approx ((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * ((a \otimes \dots \otimes a) * v_{j+p}))_\beta,$$

$$l_1, \dots, l_n = 0, 1, 2, \quad l_1 + \dots + l_n \leq 2.$$

Вейвлеты могут быть найдены по формуле

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in K_j} s_{j,k,m} \varphi_{j,k},$$

где последовательность  $s_{j,k,m}$  можно выбрать произвольным образом.

Выбором последовательностей  $A$  и  $s$  можно задавать свойства масштабирующих функций и вейвлетов. Например, можно обнулить их значения в заданной области и на ее границе. На рис. 4 представлен пример, где масштабирующие функции, соответствующие узлам  $k \in K_j$ , принадлежащим заданной области, обнуляются за пределами этой области.

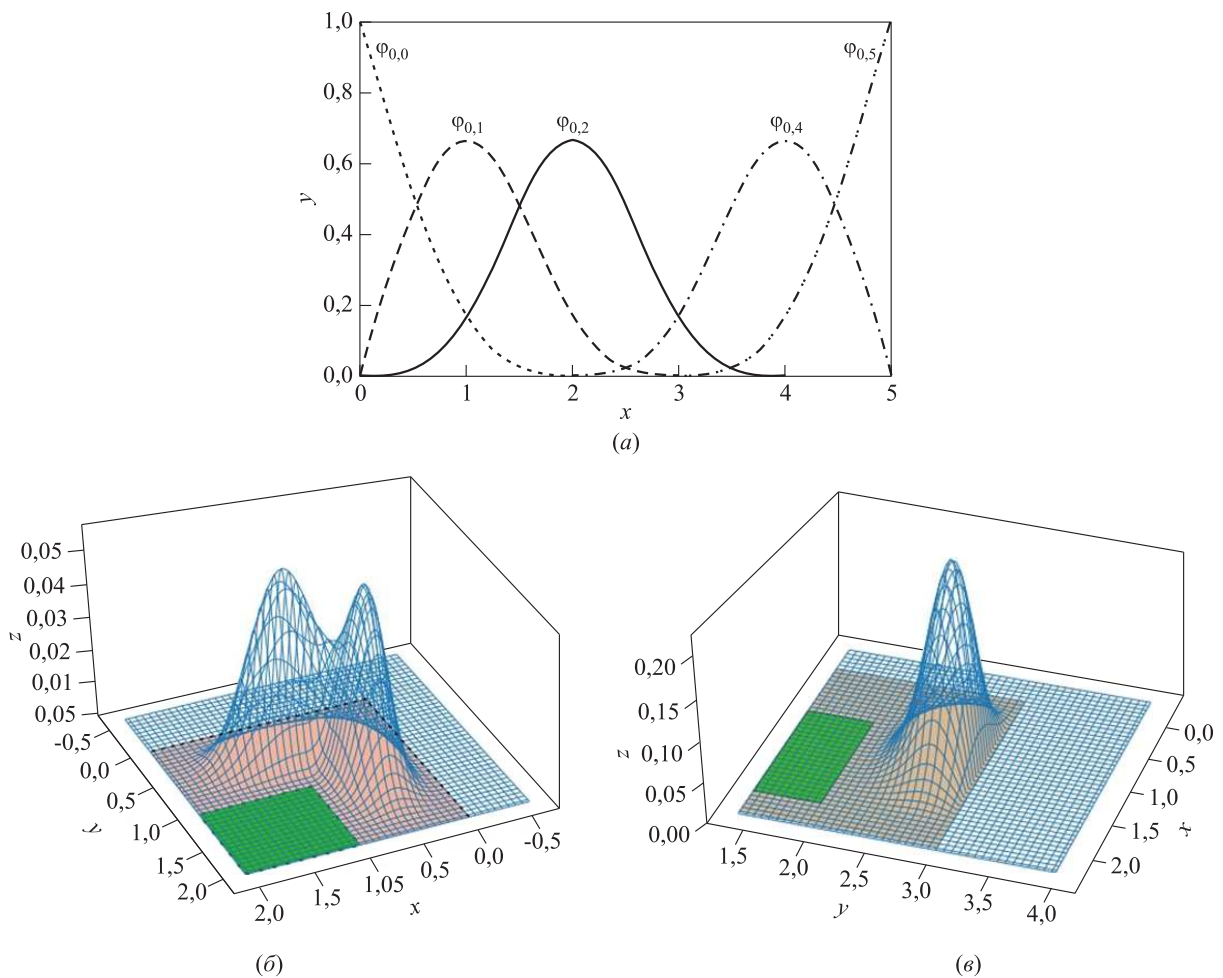


Рис. 4 Графики масштабирующих функций

Пусть  $(T, G, X)$  — триангулируемое пространство с конечным множеством симплексов. Здесь  $T = \cup_{l=1}^N I_l^n \subset I_0^n \subset \mathbf{R}^n$  — объединение замкнутых  $n$ -мерных кубов вида  $I_l^n = \prod_{i=1}^n [b_{i,l}; b_{i,l} + 1]$ , где  $b_{i,l} \in \mathbf{Z}$ ,  $I_0^n$  —  $n$ -мерный куб;  $G : T \rightarrow X \subset \mathbf{R}^n$  — гомеоморфизм,  $G : \text{Int}(T) \rightarrow \text{Int}(X)$  — диффеоморфизм класса  $C^2$ , где  $\text{Int}(X)$  — внутренность множества  $X$ . Пусть  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in K_j}$  и  $\{\psi_{j,m}\}_{m \in M_j}$  — масштабирующие функции и вейвлеты на  $T$ . Определим масштабирующие функции и вейвлеты на  $X$  следующими равенствами:

$$\varphi_{j,k}^X = \varphi_{j,k} \circ G^{-1}; \quad \psi_{j,m}^X = \psi_{j,m} \circ G^{-1},$$

где  $\circ$  обозначает композицию функций, т.е.  $\varphi_{j,k} \circ G^{-1}(x) = \varphi_{j,k}(G^{-1}(x))$ . Тогда если  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  и  $f \circ G \in L_2(T)$ , то

$$f = \sum_{k \in K_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X + \sum_{j \geq j_0} \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X$$

в том смысле, что

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \int_T \left[ \left( f - \sum_{k \in K_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X - \sum_{j=j_0}^J \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X \right) \circ G(u) \right]^2 du = 0.$$

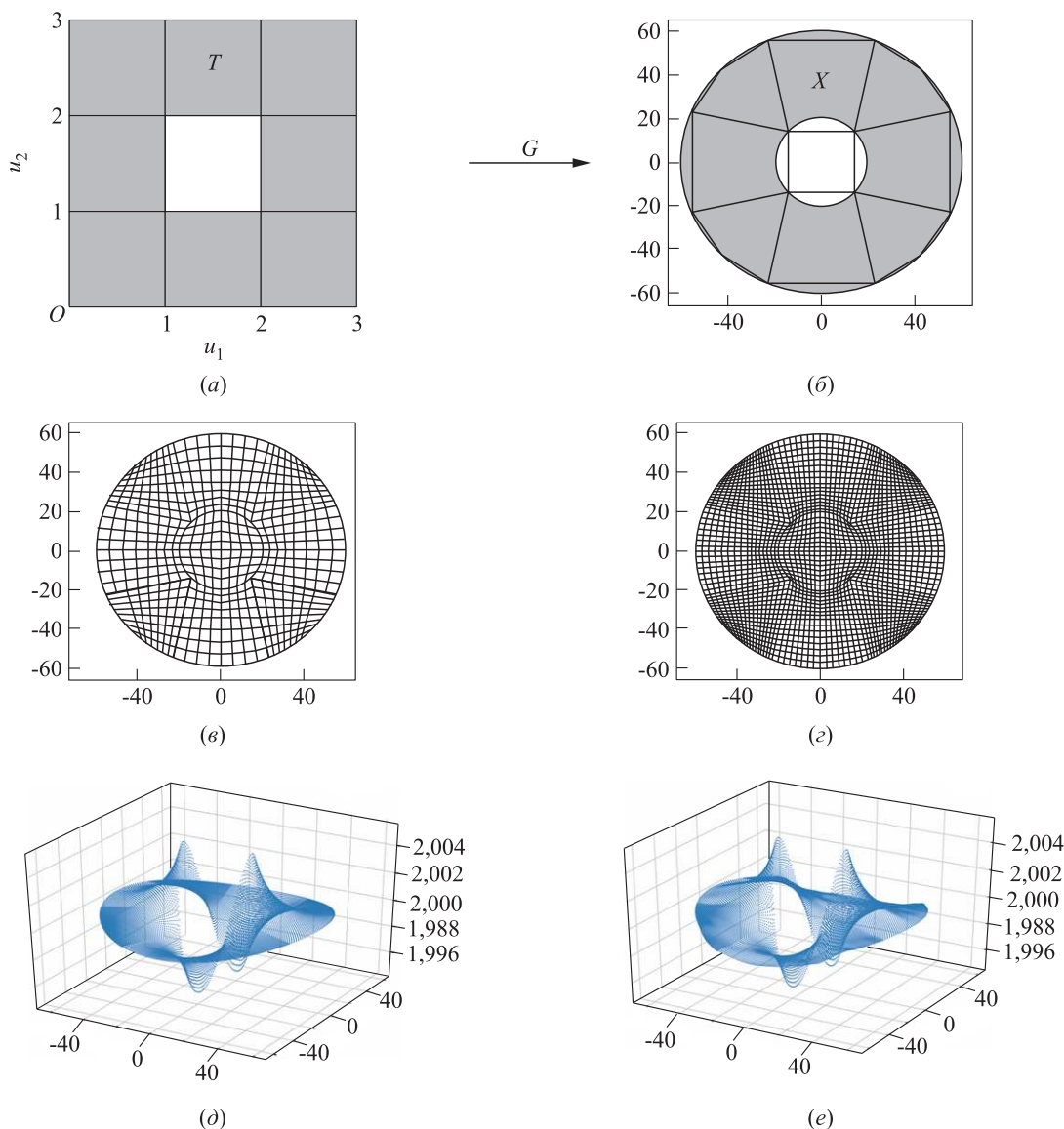


Рис. 5 Триангулируемое пространство  $(T, G, X)$  (а и б), подразделения  $X$  (в и г), графики точного решения  $\sigma_1$  (д) и его приближения  $\sigma_{1,J}$  (е)



На практике отображение  $G$  выписать сложно, поэтому используется его аппроксимация по точечным соответствиям. Методика построения этой аппроксимации с помощью локально-аппроксимационных сплайнов представлена в [7].

Из методов приближенного решения краевых задач математической физики в решаемой задаче наиболее удобен метод наименьших квадратов [10]. Рассмотрим дифференциальное уравнение и краевые условия  $Lw = f$  на  $X$  и  $L_i w = f_i$  на  $\partial X$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , в гильбертовом пространстве  $L_2(X)$ , где  $L$  — линейный дифференциальный оператор. Пусть  $\{V_j\}_{j \geq 0}$  — кратномасштабный анализ на  $X$ . Приближенные решения  $w_j$  данной краевой задачи будем искать в виде:

$$w_j = \sum_{k \in K_0} v_{0,k} \varphi_{0,k}^X + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X = \sum_{k=1}^{M(J)} c_k \omega_k, \quad (3)$$

где  $M(J)$  — число базисных функций в  $V_J$  и для удобства базисные функции пронумерованы одним индексом и обозначены  $\omega_k$ , а коэффициенты  $v_{0,n}$  и  $\gamma_{j,m}$  обозначены  $c_k$  и находятся методом наименьших квадратов из решения вариационной задач

$$w_J = \arg \min_{w \in V_J} F_J(w).$$

Функционал  $F_J(w)$  определяется равенством

$$F_J(w) = \|Lw - f\|^2 + \sum_{i=1}^q a_i \|Lw - f_i\|^2,$$

где  $a_i$  — положительные весовые коэффициенты. С учетом того, что при построении вейвлетов есть возможность обнулить часть базисных функций в заданной области, можно часть коэффициентов разложения (3) найти из граничных условий. В этом случае

$$w_j = \sum_{k \in \text{Int } X} c_k \omega_k + \sum_{t \in \partial X} c_t \omega_t,$$

а остальные коэффициенты уже находятся из задачи минимизации

$$\left\| \sum_{k \in \text{Int } X} c_k L\omega_k - \left( f - \sum_{t \in \partial X} c_t \omega_t \right) \right\|^2 \rightarrow \min_{c_k}.$$

**Пример.** Рассмотрим пластину

$$X = \{(x_1, x_2) : a^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq b^2\}$$

в условиях растяжения/сжатия. Пусть модуль Юнга  $E = 2,1$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Размеры пластины:  $a = 20$  м;  $b = 60$  м. Интенсивность

нормальной к границе пластины нагрузки имеет вид:

$$F_n = 2 \left( 1 + \frac{1}{a^2} \right) n; \quad F_n = 2 \left( 1 + \frac{1}{b^2} \right) n.$$

С использованием биортогональных вейвлетов были рассчитаны компоненты напряжений. Сравним их с точными:

$$\sigma_1 = 2 + \frac{2}{r^2} \cos(2\theta); \quad \sigma_2 = 2 - \frac{2}{r^2} \cos(2\theta);$$

$$\tau_{12} = \frac{2}{r^2} \sin(2\theta).$$

Множества  $T$  и  $X$  показаны на рис. 5, а и 5, б, подразделения  $X$  — на рис. 5, в и 5, г. Погрешности  $\max_{x_i} |\sigma_1(x_i) - \sigma_{1,J}(x_i)|$ ,  $\max_{x_i} |\sigma_2(x_i) - \sigma_{2,J}(x_i)|$  и  $\max_{x_i} |\tau_{12}(x_i) - \tau_{12,J}(x_i)|$  не превышают соответственно 0,0009, 0,000955 и 0,00025 МПа. На рис. 5, д и 5, е представлены графики точного решения  $\sigma_1$  и его приближения  $\sigma_{1,J}$ .

В заключение отметим, что предложенные методики реализованы в CAD/CAE-системе построения таких конструкций, написанной с использованием языка программирования Python.

## Литература

1. Matsuzaki Laboratory. <http://www.rs.tus.ac.jp/rmatsuzaki>.
2. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. 736 с.
4. Cavaretta A. S., Dahmen W., Micchelli C. A. Stationary subdivision schemes // Mem. Am. Math. Soc., 1991. Vol. 93. No. 453. P. 1–186.
5. Schroder P., Sweldens W. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere // 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques Proceedings / Eds. S. G. Mair, R. Cook. — New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1995. P. 161–172.
6. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // J. Global Optim., 1997. No. 11. P. 341–359.
7. Deniskina G. Y., Deniskin Y. I., Bitjukov Y. I. About biorthogonal wavelets, created on the basis of scheme of increasing of lazy wavelets // Adv. Automation II: Rus. Auto Conf. 2020. — Lecture notes in electrical engineering ser. — Cham: Springer, 2021. Vol. 729. P. 173–181. doi: 10.1007/978-3-030-71119-1\_18.

8. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005. 612 с.
9. Deniskina G. Y., Deniskin Y. I., Bityukov Y. I. About some computational algorithms for locally approximation splines, based on the wavelet transformation and convolution // *Advances in automation II* / Eds. A. A. Radionov, V. R. Gasiyarov. — Lecture notes in electrical engineering ser. — Cham, Switzerland: Springer, 2021. Vol. 729. P. 182–191. doi: 10.1007/978-3-030-71119-1\_19.
10. Марчук Г. И., Акилов Г. П. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. 744 с.

Поступила в редакцию 27.09.21

---

---

## ABOUT SEARCHING FOR THE OPTIMAL 3D PRINTING SCHEME OF STRUCTURES FROM COMPOSITE MATERIALS

A. V. Bosov<sup>1,2</sup>, Yu. I. Bityukov<sup>2</sup>, and G. Yu. Deniskina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow State Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

**Abstract:** The article is devoted to finding optimal fiber laying trajectories in the manufacture of structures reinforced with continuous fibers by 3D printing. As the objective function of this optimization problem, one of the criteria for the destruction of the composite is selected. Fiber laying schemes during printing are modeled using analytical functions that are found from the Neumann problem for the Laplace equation. The boundary conditions for this problem are constructed on the basis of specifying the angles between the fibers and the boundary of the region. The Neumann problem is solved by a conformal transformation of the print area into a circle. Thus, the criterion for the destruction of the composite becomes a function of the angles that the fibers form with the boundary of the region. Minimization is carried out using a genetic algorithm for searching for the global minimum of a function of several variables.

**Keywords:** composite materials; wavelets; 3D printing; analytical function

**DOI:** 10.14357/19922264220102

## References

1. Matsuzaki Laboratory. Available at: <http://www.rs.tus.ac.jp/rmatsuzaka/> (accessed December 20, 2021).
2. Vasiliev, V. V. 1988. *Mekhanika konstruktivnykh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow: Mashinostroenie. 272 p.
3. Lavrent'ev, M. A., and B. V. Shabat. 1973. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka. 736 p.
4. Cavaretta, A. S., W. Dahmen, and C. A. Micchelli. 1991. Stationary subdivision schemes. *Mem. Amer. Math. Soc.* 93(453):1–186.
5. Schroder, P., and W. Sweldens. 1995. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques Proceedings*. Eds. S. G. Mair and R. Cook. New York, NY: Association for Computing Machinery. 161–172.
6. Storn, R., and K. Price. 1997. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *J. Global Optim.* 11:341–359.
7. Deniskina, G. Y., Y. I. Deniskin, and Y. I. Bityukov. 2021. About biorthogonal wavelets, created on the basis of scheme of increasing of lazy wavelets. *Advances in Automation II*. Lecture notes in electrical engineering ser. Cham: Springer. 729:173–181.
8. Novikov, I. Ya., V. Yu. Protasov, and M. A. Skopina. 2005. *Teoriya vspleskov* [The theory of wavelets]. Moscow: Fizmatlit. 612 p.
9. Deniskina, G. Y., Y. I. Deniskin, and Y. I. Bityukov. 2021. About some computational algorithms for locally approximation splines, based on the wavelet transformation and convolution. *Advances in automation II*. Eds. A. A. Radionov and V. R. Gasiyarov. Lecture notes in electrical engineering ser. Cham, Switzerland: Springer. 729:182–191. doi: 10.1007/978-3-030-71119-1\_19.
10. Marchuk, G. I., and G. P. Akilov. 1989. *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow: Nauka. 744 p.

Received September 27, 2021

## Contributors

**Bosov Alexey V.** (b. 1969) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Moscow State Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; AVBosov@ipiran.ru

**Bitjukov Yuri I.** (b. 1972) — Doctor of Science in technology, professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; yib72@mail.ru

**Deniskina Galina Yu.** (b. 1993) — PhD student, Faculty of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; dega17@yandex.ru

## КОНТЕКСТНЫЙ ПОИСК НА ФОТОНАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕСТОВ БЕЛЛА\*

С. Н. Андрианов<sup>1</sup>, Н. С. Андрианова<sup>2</sup>, Ф. М. Аблаев<sup>3</sup>, Ю. Ю. Кочнева<sup>4</sup>

**Аннотация:** Рассмотрена возможность конкретной физической реализации контекстного поиска на квантовых состояниях с использованием тестов Белла, который рассматривался ранее лишь как абстрактная математическая процедура. Для этого предложено использовать контекстную кодировку слов в документах на поляризационных фотонных кубитах. Получены конкретизированные аналитические выражения для определения на основе тестов Белла параметра контекстного поиска по паре слов, которые могут быть связанными или нет в зависимости от значения этого параметра. Наибольшей связанности отвечает состояние квантовой перепутанности волновых функций документов по паре выбранных слов, которому соответствует определенное значение параметра контекстного поиска. Предложенные способы реализации семантического контекстного поиска необходимы для определения нелокальной контекстности, которая часто требуется при автоматизированном поиске и машинном переводе. При этом второе слово в паре поисковых слов поясняет смысл первого через их семантическую связь.

**Ключевые слова:** гипоним; гипероним; изотопия; родовидовая связь; фотонный кубит; перепутанные состояния; белловский тест; голографический процессор

**DOI:** 10.14357/19922264220103

В рамках познавательной деятельности человека информация структурируется с точки зрения ее значения и организации, постепенно превращаясь в знание. Формализуемые на естественном языке знания систематизируются в рамках лексической системы языка в толковых, семантических, идеографических словарях, а также в цифровых сетях, включая квантовые.

Формализация знаний с помощью концептуальной схемы может осуществляться в виде лексических онтологий, например WordNet. Этот ресурс является одним из способов представления знаний на основе установления семантических отношений между понятиями с помощью составления синонимических рядов (синсетов) соответствующей части речи, которые, в свою очередь, также связаны между собой разнообразными семантическими отношениями (гиперонимия, меронимия, антонимия и т. д.) [1].

От логической модели построения баз данных отличается подход, представленный методом HAL (Hyperspace Analogue to Language). При построении этого языка считается, что любой языковой знак находится в контексте, а также учитывается линейный характер текста и близость слов друг другу в его линейной развертке. Речь идет о построении базы

данных связей слов с учетом их непосредственного словесного окружения [2]. Авторы этой работы вводят так называемое семантическое пространство, в котором смысл словосочетаний отображается при помощи специального языка HAL.

В языке HAL слова распределяются не так, как в словаре обычного языка — последовательно, например просто в алфавитном порядке, а в виде матрицы (таблицы), где слова распределены по вертикали в самом левом столбце по алфавиту, как и в обычном словаре. Обычный словарь в этом смысле является аналогом векторного пространства. В языке HAL в строках каждое слово размещается в парных сочетаниях с другими словами, что должно отражать какую-то связь этого отдельного слова с остальными словами. Будучи расположенными в матрице, слова в языке HAL имеют как бы тензорный характер, т. е. относятся к некоему гиперпространству. При этом слова в матрице располагаются тем ближе, чем они дальше друг от друга в рассматриваемом тексте. Аналогия с языком в методе HAL заключается в том, что каждой точке гиперпространства можно сопоставить то или иное словосочетание языка рассматриваемого текста.

Таким путем эмпирический подход языка HAL позволяет выявить взаимосвязь слов. Но эта связь

\* Работа Ф. М. Аблаева выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 0671-2020-0065.

<sup>1</sup> Институт прикладных исследований, Академия наук Республики Татарстан

<sup>2</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, natalia\_an83@mail.ru

<sup>3</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, fablayev@gmail.com

<sup>4</sup> Институт прикладных исследований, Академия наук Республики Татарстан, instpianrt@gmail.com

может быть и чисто формальной, следствием случайных совпадений. Если такая связь является изотопической, то она имеет смысловой характер.

Авторы работы [3] такую связь между парой слов в том или ином тексте предложили искать целенаправленно, используя квантовые алгоритмы при записи слов в тексте при помощи языка HAL. При этом квантовые алгоритмы реализовывались чисто математически с использованием известных в квантовой механике абстрактных формул. В интерпретации языка HAL в работе [3] квантовое векторное состояние документа определяется как  $|\Psi\rangle = \sum_i^N |w_{ni}\rangle$ , где  $|w_{ni}\rangle$  —  $i$ -е собственное состояние оператора некоторой величины  $n$ , соответствующее слову  $i$ , т.е. это вектор, являющийся суммой векторов отдельных слов.

Рассмотрим возможность физической реализации такого подхода с использованием конкретных фотонных квантовых состояний  $|w_{vi}\rangle = \sum_j^M |w_{kij}\rangle$  как квантовых состояний слова  $i$ , которые характеризуются частотой фотона  $v_i$  и его волновым вектором  $k_{ij}$ . Можно представить эти состояния как сумму проекций нормированного состояния фотона  $|u_{v_{ij}}\rangle = a_{\vec{k}_j}^{(i)} |u_{\vec{k}_j}\rangle$  на базовые состояния направлений его волнового вектора, лежащих в той или иной плоскости:

$$|u_{v_i}\rangle = \sum_j^M a_{\vec{k}_j}^{(i)} |u_{\vec{k}_j}\rangle.$$

Двум словам  $A$  и  $B$  из текста можно сопоставить векторные состояния  $|u_{v_A}\rangle$  и  $|u_{v_B}\rangle$  и общую плоскость, проходящую через эти векторы. Тогда векторные состояния документа в базисе этих слов можно определить как векторную сумму проекций состояния документа на состояния этих слов в данной плоскости с последующим поворотом на  $90^\circ$  относительно ортогональных к векторам слов осей и проекции на оси в плоскости, ортогональной векторам слов:

$$\left. \begin{aligned} |\Psi_A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\sigma_+} |u_{v_A, \sigma_+}\rangle + \alpha_{\sigma_-} |u_{v_A, \sigma_-}\rangle); \\ |\Psi_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_{\sigma_+} |u_{v_B, \sigma_+}\rangle + \beta_{\sigma_-} |u_{v_B, \sigma_-}\rangle). \end{aligned} \right\} (1)$$

Векторы (1) являются по своей форме поляризованными фотонными кубитами.

Коэффициенты в выражениях (1) можно записать как

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\sigma_+} &= \frac{\langle u_{v_A, \sigma_+} | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle u_{v_A, \sigma_+} | \Psi \rangle^2 + \langle u_{v_A, \sigma_-} | \Psi \rangle^2}}; \\ \alpha_{\sigma_-} &= \frac{\langle u_{v_A, \sigma_-} | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle u_{v_A, \sigma_+} | \Psi \rangle^2 + \langle u_{v_A, \sigma_-} | \Psi \rangle^2}}; \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\sigma_+} &= \frac{\langle u_{v_B, \sigma_+} | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle u_{v_B, \sigma_+} | \Psi \rangle^2 + \langle u_{v_B, \sigma_-} | \Psi \rangle^2}}; \\ \beta_{\sigma_-} &= \frac{\langle u_{v_B, \sigma_-} | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle u_{v_B, \sigma_+} | \Psi \rangle^2 + \langle u_{v_B, \sigma_-} | \Psi \rangle^2}}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Состояния вида (1) позволяют связать каждое слово с тем или иным квантовым битом (кубитом) информации. Определим теперь операторы запроса контекстного поиска на фотонах с учетом того, что поляризации фотонов можно ассоциировать с их спиновыми состояниями. Оператор прямого значения слова соответствует оператору  $z$ -проекции спина:

$$\begin{aligned} \hat{A}|\Psi_A\rangle &= \hat{S}_{Az}|\Psi_A\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\sigma_+} |u_{v_A, \sigma_+}\rangle - \alpha_{\sigma_-} |u_{v_A, \sigma_-}\rangle); \\ \hat{B}|\Psi_B\rangle &= \hat{S}_{Bz}|\Psi_B\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_{\sigma_+} |u_{v_B, \sigma_+}\rangle - \beta_{\sigma_-} |u_{v_B, \sigma_-}\rangle). \end{aligned}$$

Оператор запроса противоположного значения можно определить как

$$\begin{aligned} \hat{A}_x|\Psi_A\rangle &= \hat{S}_{Ax}|\Psi_A\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\sigma_-} |u_{v_A, \sigma_+}\rangle + \alpha_{\sigma_+} |u_{v_B, \sigma_-}\rangle). \end{aligned}$$

Белловский параметр поиска можно записать через матричные элементы операторов запроса по известной из работы [3] формуле:

$$S_{\text{query}} = \left| \langle \hat{A}\hat{B}_+ \rangle_{\Psi} + \langle \hat{A}_x\hat{B}_+ \rangle_{\Psi} \right| + \left| \langle \hat{A}\hat{B}_- \rangle_{\Psi} - \langle \hat{A}_x\hat{B}_- \rangle_{\Psi} \right|,$$

где  $\hat{B}_+ = -(\hat{B} + \hat{B}_x)$ ;  $\hat{B}_- = \hat{B} - \hat{B}_x$ .

Простое вычисление дает

$$S_{\text{query}} = \frac{1}{2} \left\{ \left| \left( \alpha_{\sigma_+}^2 + 2\alpha_{\sigma_+}\alpha_{\sigma_-} - \alpha_{\sigma_-}^2 \right) \right| + \left| \left( \alpha_{\sigma_+}^2 - 2\alpha_{\sigma_+}\alpha_{\sigma_-} - \alpha_{\sigma_-}^2 \right) \right| \right\} \left( \beta_{\sigma_+}^2 + 2\beta_{\sigma_+}\beta_{\sigma_-} - \beta_{\sigma_-}^2 \right). (4)$$

Вычислив коэффициенты  $\alpha_{\sigma_+}$ ,  $\alpha_{\sigma_-}$ ,  $\beta_{\sigma_+}$  и  $\beta_{\sigma_-}$  по формулам (2) и (3), можно установить значения слов по матричным элементам этих операторов. Также можно вычислить белловский параметр  $S_{\text{query}}$ , величина которого определяет степень

перепутанности состояний документа по словам  $A$  и  $B$ . Перепутанность состояний означает, что состояния связаны между собой путем взаимодействия через какие-либо другие состояния. Поэтому таким путем можно установить наличие смысловой связи между выбранными словами в этом документе.

В работе [3] такие вычисления проведены на обычном компьютере. Но можно и построить автономное вычислительное устройство, работающее, например, на частицах света — фотонах. Такое устройство будет обладать повышенным быстродействием как за счет предельно высокой скорости и безынерционности фотонов, так и за счет квантовой параллельности используемых алгоритмов.

В этом устройстве можно определить коэффициенты в состояниях документа, вычисляя скалярные произведения в формулах (2) и (3) при помощи классического оптического процессора. Особенно удобно использовать голографические процессоры [4, 5]. Эти процессоры позволяют записывать результат скалярного произведения векторов при помощи интерференции фотонов, а затем получать результат с использованием считывающего поля. После определения значения коэффициентов можно вычислить значение параметра  $S_{\text{query}}$  по формуле (4). Также можно методами квантовой информатики сгенерировать состояния двух фотонов, соответствующих словам  $A$  и  $B$  и провести измерение параметра  $S_{\text{query}}$  по стандартным схемам работ [6–8].

Итак, в данной работе путем использования фотонных состояний найден конкретный способ реализации квантового алгоритма контекстного поиска, позволяющий искать изотопию, т. е. общий семантический признак, связывающий понятия. При поисковом запросе установление связи (выявление изотопии) между понятиями может осуществляться в текстах различного характера (тексты, относящиеся к одной терминологической области; тексты разных тематических областей). Подход работы [3] позволяет определить, относится ли текст к определенному вопросу, путем введения при поиске пары слов. Так, если искать информацию о политическом скандале «Иран—контрас», то, понимая, что в это время Рейган был президентом Соединенных Штатов, причастных к скандалу, можно ввести при запросе пару слов Рейган—Иран. Если параметр поиска покажет перепутанность состояний, соответствующих этим словам, то это будет означать, что рассматриваемый текст соответствует теме запроса, т. е. задача найти нужный текст решена.

Характер текстов, а также характер запроса пользователя (например, определение значения термина-неологизма посредством сравнения его

с термином, относящимся к той же терминологии, или поиск двух явно не связанных друг с другом понятий) влияет и на определение изотопии (семантической связи) между этими понятиями: гипонимия, гиперонимия (родовидовые отношения), метафора, антонимия. Таким образом, можно установить семантический признак, связывающий понятия. Полученные данные могут быть использованы для создания как толковых словарей, так и специализированных словарей (тезаурусов) в той или иной области в зависимости от характера использованных текстов. Они могут применяться в системах поиска [9, 10] и системах автоматизированного перевода [11, 12].

## Литература

1. Усталов Д. Семантические сети и обработка естественного языка // Открытые системы. СУБД, 2017. № 2. С. 46–47. <https://www.osp.ru/os/2017/02/13052229>.
2. Lund K., Burgess C. Producing high-dimensional semantic spaces from lexical co-occurrence // Behav. Res. Meth. Ins. C., 1996. Vol. 28. P. 203–208.
3. Barros J., Toffano Z., Meguebli Y., Doan B.-L. Contextual query using bell tests // Quantum interaction / Eds. H. Atmanspacher, E. Haven, K. Kitto, D. Raine. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2013. Vol. 8369. P. 110–121.
4. Yariv A. Phase conjugate optics and real-time holography // IEEE J. Quantum Elect., 1978. Vol. QE-14. No. 9. P. 650–660.
5. Dolev S., Fandina N., Rosen J. Holographic parallel processor for calculating Kronecker product // Nat. Comput., 2015. Vol. 14. P. 433–436.
6. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., Holt R. A. Proposed experiment to test local hidden-variable theories // Phys. Rev. Lett., 1969. Vol. 23. No. 15. P. 880–884.
7. Freedman S. J., Clauser J. F. Experimental test of local hidden-variable theories // Phys. Rev. Lett., 1972. Vol. 28. No. 14. P. 938–941.
8. Tanji H., Simon J., Ghosh S., Vuletic V. Simplified measurement of the Bell parameter within quantum mechanics // arXiv.org, 2008. arXiv:0801.4549 [quant-ph].
9. Beltran L., Geriente S. Quantum entanglement in corpuses of documents // Found. Sci., 2019. Vol. 24. P. 227–246.
10. Бессмертный И. А., Васильев А. В., Королева Ю. А., Платонов А. В., Полещук Е. А. Методы квантового формализма в информационном поиске и обработке текстов на естественных языках // Изв. вузов. Приборостроение, 2019. Т. 62. № 8. С. 702–709.
11. Wang C., Seneff S. High-quality speech-to-speech translation for computer-aided language learning // ACM Transactions Speech Language Processing, 2006. Vol. 3. No. 2. P. 1–21.

12. Jia Ye., Weiss R. J., Biadys F., Macherey W., Johnson M., Chen Z., Wu Y. Direct speech-to-speech translation with

a sequence-to-sequence model // arXiv.org, 2019. arXiv: 1904.06037v2 [cs.CL].

Поступила в редакцию 12.03.20

## CONTEXT QUERY ON PHOTONS WITH THE USE OF BELL TESTS

S. N. Andrianov<sup>1</sup>, N. S. Andrianova<sup>2</sup>, F. M. Ablaev<sup>2</sup>, and Yu. Yu. Kochneva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Research, Tatarstan Academy of Sciences, 36 Levobulachnaya Str., Kazan 420011, Russian Federation

<sup>2</sup>Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya Str., Kazan 420008, Russian Federation

**Abstract:** The possibilities for physical realization of contextual query on photons in an optical processor using Bell tests are considered. To solve this problem, context coding of words in documents on quantum states of single photons using the well-known method of hyperspace analog language is proposed. Analytical expressions for determination of parameters of contextual query by a pair of words that can be bound or not bound depending on the value of this parameter were obtained. Most connected is quantum entangled state of document wave functions chosen by a pair of words that corresponds to a certain value of the contextual query parameter. The suggested methods of realization of semantic contextual query are necessary for determination of nonlocal context that is demanded for acquiring better understanding during automated search and machine translation. The second word in the pair of query words clarifies the meaning of the first word through their semantic connection.

**Keywords:** hyponym; hyperonym; isotopy; genus-species relations; photonic qubit; entangled state; Bell test; holographic processor

**DOI:** 10.14357/19922264220103

### Acknowledgments

The research of F. M. Ablaev was funded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities, project No. 0671-2020-0065.

### References

1. Ustalov, D. 2017. Semanticheskie seti i obrabotka estestvennogo yazyka [Semantic nets and natural language processing]. *Otkrytye sistemy. SUBD* [Open Systems. DBMS] 2:46–47. Available at: <https://www.osp.ru/os/2017/02/13052229/> (accessed December 22, 2021).
2. Lund, K., and C. Burgess. 1996. Producing high-dimensional semantic spaces from lexical co-occurrence. *Behav. Res. Meth. Ins. C.* 28:203–208.
3. Barros, J., Z. Toffano, Y. Meguebli, and B.-L. Doan. 2013. Contextual query using Bell tests. *Quantum interaction*. Eds. H. Atmanspacher, E. Haven, K. Kitto, and D. Raine. Lecture notes in computer science ser. Springer. 8369:110–121.
4. Yariv, A. 1978. Phase conjugate optics and real-time holography. *IEEE J. Quantum Elect.* QE-14(9):650–660.
5. Dolev, S., N. Fandina, and J. Rosen. 2015. Holographic parallel processor for calculating Kronecker product. *Nat. Comput.* 14:433–436.
6. Clauser, J. F., M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt. 1969. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 23(15):880–884.
7. Freedman, S. J., and J. F. Clauser. 1972. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 28(14):938–941.
8. Tanji, H., J. Simon, S. Ghosh, and V. Vuletic. 2008. Simplified measurement of the Bell parameter within quantum mechanics. *arXiv.org*. Available at: <https://arxiv.org/abs/0801.4549> (accessed December 22, 2021).
9. Beltran, L., and S. Geriente. 2019. Quantum entanglement in corpuses of documents. *Found. Sci.* 24:227–246.
10. Bessmertnyi, I. A., A. V. Vasiliev, Yu. A. Koroleva, A. V. Platonov, and E. A. Poleschuk. 2019. Metody kvantovogo formalizma v informatsionnom poiske i obrabotke tekstov na estestvennykh yazykakh [Quantum formalism methods in information retrieval and processing of texts on natural languages]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie* [J. Instrument Engineering] 62(8):702–709.
11. Wang, C., and S. Seneff. 2006. High-quality speech-to-speech translation for computer-aided language learning. *ACM Transactions Speech Language Processing* 3(2):1–21.
12. Jia, Ye., R. J. Weiss, F. Biadys, W. Macherey, M. Johnson, Z. Chen, and Y. Wu. 2019. Direct speech-to-speech translation with a sequence-to-sequence model. *arXiv.org*. Available at: <https://arxiv.org/abs/1904.06037> (accessed December 22, 2021).

Received March 12, 2020

## Contributors

**Andrianov Sergey N.** (1959–2020) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Institute of Applied Research, Tatarstan Academy of Sciences, 36 Levobulachnaya Str., Kazan 420011, Russian Federation

**Andrianova Nataliya S.** (b. 1983) — Candidate of Science (PhD) in philology, associate professor, Department of Theory and Practice of Teaching Foreign Languages, Institute of Philology and Intercultural Communication, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya Str., Kazan 420008, Russian Federation; natalia\_an83@mail.ru

**Ablayev Farid M.** (b. 1953) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Head of Department of Theoretical Cybernetics, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya Str., Kazan 420008, Russian Federation; fablayev@gmail.com

**Kochneva Yulia Yu.** (b. 1985) — scientist, Institute of Applied Research, Tatarstan Academy of Sciences, 36 Levobulachnaya Str., Kazan 420011, Russian Federation; instpianrt@gmail.com



# МЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УГЛОВЫХ ТОЧЕК МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМЫХ МЕЖУЗЛОВЫХ ПОТОКОВ МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТИ

Ю. Е. Малащенко<sup>1</sup>

**Аннотация:** Рассматривается модель многопользовательской сети связи, в которой между всеми парами узлов-корреспондентов одновременно передаются информационные потоки различных видов. Анализируются результаты вычислительных экспериментов по оценке метрических характеристик выпуклого множества допустимых межузловых потоков и угловых точек, расположенных на гранях. Базовыми считаются угловые точки пересечения внешней границы множества с осями координат, каждая из которых соответствует максимальному межузловому потоку определенного вида. Для определения координат опорных угловых точек вычисляются значения допустимых межузловых потоков, при одновременной передаче которых достигается предельная нагрузка всех ребер сети. Вычисляются также координаты реперной точки, в которой сумма межузловых потоков достигает максимально возможной величины на множестве достижимости. В ходе вычислительных экспериментов в условных единицах потоков оцениваются нормы векторов, соответствующих координатам угловых точек. Приводятся сравнительные диаграммы условных расстояний между реперной и опорными угловыми точками.

**Ключевые слова:** многопродуктовая сетевая модель; множество допустимых межузловых потоков; предельная нагрузка сети

**DOI:** 10.14357/19922264220104

## 1 Введение

Для многопользовательской сети связи предлагается развитие методов агрегированного описания множества допустимых межузловых потоков различных видов, которые могут одновременно передаваться между всеми парами узлов-корреспондентов. Для оценки и аппроксимации множества предельно достижимых многопродуктовых потоков строится внутренний опорный каркас [1]. В данной работе анализируются результаты вычислительных экспериментов по поиску предельных распределений межузловых потоков и оценке метрических особенностей в расположении соответствующих угловых точек опорного каркаса [2]. В ходе выполнения вычислительной процедуры на первом этапе определяются точки пересечения осей координат с границей множества достижимости. Координаты базовых угловых точек находятся как решение последовательности задач поиска максимального однопродуктового потока между соответствующей парой узлов при фиксированных нулевых значениях для всех остальных [3, 4]. Координаты *опорной угловой точки определяются значениями компонент* вектора межузловых потоков, при которых достигается предельная нагрузка *сети*. При построении внутреннего опорного каркаса формируется репер-

ный вектор межузловых потоков, сумма компонент которого достигает максимальной величины на данном множестве. Для оценки допустимых распределений межузловых потоков вычисляются метрические характеристики векторов и строятся диаграммы расстояний между всеми угловыми точками опорного каркаса. Вычислительные эксперименты позволяют формировать и в явном виде выписывать компоненты векторов межузловых потоков, выпуклая комбинация которых может быть использована для гарантированной оценки функциональных характеристик сети при предельной нагрузке всех ребер.

## 2 Математическая модель

В качестве математической модели для описания многопользовательской сетевой системы используется следующая формальная запись условий и ограничений, которые должны выполняться при одновременной передаче потоков различных видов между всеми парами узлов-корреспондентов.

Сеть  $G(d)$  задается множествами  $\langle V, R, U, P \rangle$ :

- узлов (вершин) сети  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$ ;
- неориентированных ребер  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$ .

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mala-yur@yandex.ru

Ребро  $r_k$  соединяет концевые вершины  $v_{n_k}$  и  $v_{j_k}$ . Ребру  $r_k$  ставятся в соответствие две ориентированные дуги  $\{u_k, u_{k+E}\}$  из множества ориентированных дуг  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$ . Дуги  $\{u_k, u_{k+E}\}$  определяют прямое и обратное направление передачи потока по ребру  $r_k$  между концевыми вершинами  $\{v_{n_k}, v_{j_k}\}$ .

В многопользовательской сети  $G(\mathbf{d})$  рассматривается  $M = N(N - 1)$  независимых, невзаимозаменяемых и равноправных потоков различных видов, которые передаются между узлами-корреспондентами из множества  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ .

По определению, каждой паре узлов-корреспондентов  $p_m$  соответствуют:

- вершина-источник с номером  $s_m$ , через которую входной поток  $m$ -го вида  $z_m$  поступает в сеть;
- вершина-приемник с номером  $t_m$ , из которой поток  $m$ -го вида  $z_m$  покидает сеть.

В множестве  $P$  выделяется подмножество  $P(R^+)$  пар узлов-корреспондентов, расположенных в концевых вершинах ребра  $r_k$ ,  $k = \overline{1, E}$ . Вводятся следующие обозначения: пусть ребро  $r_k$  соединяет вершины с номерами  $n$  и  $j$  такими, что  $n < j$ . Для соответствующей пары узлов-корреспондентов  $p_k$ , расположенных в узлах  $\{v_n, v_j\}$ , узел  $v_n$  считается источником, а узел  $v_j$  — приемником потока  $z_k$   $k$ -го вида, который передается из узла с номером  $n$  в узел с номером  $j$  для пары  $p_k$ . Для пары  $p_{k+} \iff \{v_j, v_n\}$  узел  $v_j$  считается источником и устанавливается соответствие  $s_k \iff j$ , а узел  $v_n$  — приемником и  $t_k \iff n$ .

Пары  $p_m$  из подмножества  $P(R^+)$  называются смежными узлами-корреспондентами. Все остальные пары узлов-корреспондентов относятся к множеству  $P(R^-)$ :

$$P = P(R^+) \cup P(R^-);$$

$$P(R^+) \cap P(R^-) = \emptyset.$$

Введем обозначения:

$z_m$  — величина межузлового потока  $m$ -го вида, который поступает в сеть из узла с номером  $s_m$  и покидает из узла с номером  $t_m$ ;

$S(v_n)$  — множество номеров исходящих дуг, по которым поток покидает узел  $v_n$ ;

$T(v_n)$  — множество номеров входящих дуг, по которым поток поступает в узел  $v_n$ .

Во всех узлах  $v_n \in V$ ,  $n = \overline{1, N}$ , для всех видов потоков должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v = v_{s_m}; \\ -z_m, & \text{если } v = v_{t_m}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1)$$

$$n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, x_{mi} \geq 0, z_m \geq 0.$$

Величина  $z_m$  равна входному потоку  $m$ -го вида, который пропускается от источника к приемнику пары  $p_m$  при распределении потоков  $x_{mi}$  по дугам сети.

Каждому ребру  $r_k \in R$  приписывается неотрицательное число  $d_k$ , определяющее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру  $r_k$  в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$  — наперед заданные положительные числа  $d_k > 0$ . Вектором  $\mathbf{d}$  определяются следующие ограничения на сумму дуговых потоков всех видов, передаваемых по ребру  $r_k$ :

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k,$$

$$x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, k = \overline{1, E}. \quad (2)$$

В рамках данной модели пропускная способность ребер сети — вектор  $\mathbf{d}$  — трактуется как «ресурсное ограничение», а сумма дуговых потоков рассматривается как показатель использования «ресурсов» сети при передаче межузловых потоков различных видов.

Для всех  $z_m$  и  $x_{mi}$ , удовлетворяющих условиям (1) и (2), вычисляются суммарные потоки:

$$y_m = \sum_{i=1}^{2E} x_{mi}, m = \overline{1, M}. \quad (3)$$

Суммарный реберный поток  $y_m$  характеризует «нагрузку» на сеть при передаче межузлового потока величины  $z_m$  из узла-источника  $s_m$  в узел-приемник  $t_m$ . Величина  $y_m$  показывает, какой суммарный ресурс — пропускная способность сети — требуется для передачи межузлового потока  $z_m$ , а отношение  $w_m = y_m/z_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , показывает, какие ресурсы необходимы для передачи единичного потока  $m$ -го вида между узлами  $s_m$  и  $t_m$ .

Ограничения (1)–(3) задают подмножество допустимых значений компонент вектора межузловых потоков  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$ :

$$Z(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid (\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ удовлетворяют (1)–(3)}\}, \quad (4)$$

а все допустимые распределения ресурсов принадлежат подмножеству

$$Y(\mathbf{d}) = \{\mathbf{y} \geq 0 \mid (\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ удовлетворяют (1)–(3)}\}.$$

### 3 Базовые угловые точки

В рамках данного модельного описания, по определению, монопольным режимом называется способ управления, при котором все ресурсы сети используются для передачи потока одной выделенной пары узлов-корреспондентов  $p_a \in P$ , а для всех остальных потоки полагаются равными нулю.

Предельно допустимый поток, который можно передать между фиксированной парой узлов-корреспондентов  $p_a$  в монопольном режиме, является решением стандартной, в данном случае однопродуктовой, задачи о максимальном потоке.

**Задача 1.** Найти:

$$z_a^0 = \max_{\langle z, x \rangle \in Z(d)} z_a$$

при условии  $z_i = 0, i = \overline{1, M}, i \neq a$ .

При решении задачи 1 для пары  $p_a$  вычисляются: межузловый поток  $z_a^0$ ; дуговые потоки  $\{x_{ak}^0; x_{a(k+E)}^0\}, k = \overline{1, E}$ ; суммарное значение реберного потока  $y_a^0 = \sum_{i=1}^{2E} x_{ai}^0$ .

Поток величины  $z_a^0$  называется МРМ-потоком и является *максимальным потоком*, передаваемым в *монопольном режиме* для пары узлов-корреспондентов  $p_a$ .

Задача 1 решается последовательно для всех  $p_m \in P$ , вычисляются значения  $z_m^0$  для  $m = \overline{1, M}$ .

Вектор  $\mathbf{z}^0(m) = \langle 0, 0, \dots, z_m^0, \dots, 0, 0 \rangle$  определяет координаты угловой точки множества достижимости  $Z(\mathbf{d})$ , которая лежит на пересечении границы  $Z(\mathbf{d})$  с соответствующей координатной осью  $z_m$ .

Множество векторов

$$\mathbf{Z}^{(0)} = \langle \mathbf{z}^0(1), \mathbf{z}^0(2), \dots, \mathbf{z}^0(M) \rangle$$

определяет угловые точки *базового* МРМ-сечения.

### 4 Реперная угловая точка

В множестве  $Z(\mathbf{d})$  существует допустимый вектор  $\mathbf{z}(d)$  с компонентами

$$\begin{aligned} z_m(d) &= 0, p_m \in P(R^-); \\ z_k(d) &= d_k, p_k \in P(R^+). \end{aligned}$$

Сумма межузловых потоков

$$\sigma(d) = \sum_{k=1}^E z_k(d) = \sum_{k=1}^E d_k = D^*$$

является максимально возможной среди всех допустимых векторов  $\mathbf{z} \in Z(\mathbf{d})$ .

Для каждой пары  $p_k \in P(R^+)$  межузловому потоку  $z_k(d)$  соответствует реберный поток  $x_k^0(d)$ , а  $y_k^0(d) = x_k^0(d)$ . Суммарная нагрузка

$$\sum_{k=1}^{2E} y_k^0(d) = \sum_{k=1}^{2E} x_k^0(d) = \sum_{k=1}^E z_k(d) = \sum_{k=1}^E d_k = D^*.$$

Вектор  $\mathbf{z}(d)$  задает распределение PLD-потоков (от *англ.* Peak Load Distribution), поскольку при одновременной передаче всех межузловых потоков  $z_k(d), p_k \in P(R^+)$ , достигается *предельно допустимая нагрузка* всех ребер сети.

Вектор определяет координаты *реперной* точки на границе множества  $Z(\mathbf{d})$ .

### 5 Опорный внутренний каркас

Пусть для некоторой пары  $p_a \in P$  в результате решения задачи 1 найден МРМ-поток  $z_a^0$  и дуговые потоки  $\{x_{ak}^0; x_{a(k+E)}^0\}, k = \overline{1, E}$ . Значению  $z_a^0$  ставится в соответствие вектор

$$\mathbf{z}^1(a) = \langle z_1^1(a), z_2^1(a), z_3^1(a), \dots, z_a^1(a), \dots, z_M^1(a) \rangle$$

с компонентами

$$\begin{aligned} z_m^1(a) &= 0 \text{ для } m \neq a, p_m \in P(R^-); \\ z_a^1(a) &= z_a^0; \\ z_k^1(a) &= d_k - (x_{ak}^0 + x_{a(k+E)}^0), p_k \in P(R^+) \\ &\text{для всех } k = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

По построению, для любого вектора  $\mathbf{z}^1(j), p_j \in P$ , суммарная (общая) нагрузка:

$$\begin{aligned} \sigma(j) &= \sum_{m=1}^M y_m^1(j) = \sum_{k=1}^E (x_{jk}^0 + x_{j(k+E)}^0) + \\ &+ \sum_{k=1}^E [d_k - (x_{jk}^0 + x_{j(k+E)}^0)] = \\ &= \sum_{k=1}^E d_k + \sum_{k=1}^E (x_{jk}^0 + x_{j(k+E)}^0) - \\ &- \sum_{k=1}^E (x_{jk}^0 + x_{j(k+E)}^0) = D^*. \end{aligned}$$

Множество векторов

$$\mathbf{Z}^1 = \{\mathbf{z}^1(1), \mathbf{z}^1(2), \mathbf{z}^1(3), \dots, \mathbf{z}^1(m), \dots, \mathbf{z}^1(M)\}$$

определяет угловые точки PLD-сечения. На основе вектора  $\mathbf{z}(d)$  и угловых векторов из множеств  $\mathbf{Z}^0$  и  $\mathbf{Z}^1$  формируется опорный внутренний каркас:

$$\text{SiF}(1) = \{\mathbf{z}(d), \mathbf{Z}^0, \mathbf{Z}^1\}$$

(от *англ.* Support internal Frame — опорный внутренний каркас). Любая выпуклая комбинация векторов из множества SiF(1) задает допустимое распределение потоков, которые могут одновременно передаваться между всеми парами узлов-корреспондентов.

## 6 Вычислительный эксперимент

Результаты вычислительных экспериментов, описанные ниже, служат продолжением исследований, начатых в [1]. Вычислительные эксперименты проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1. В каждой сети 69 узлов. Пропускные способности ребер — значения  $d_k$  — выбирались случайным образом из отрезка [900, 999] и совпадали для ребер, присутствующих в обеих сетях. В кольцевой сети пропускная способность каждого из добавленных ребер равнялась 900.

В рамках вычислительных экспериментов оценивались *метрические расстояния* между угловыми точками SiF(1)-каркаса, координаты которых задаются значениями компонент соответствующих векторов. На первом этапе вычислялись *расстояния* между реперной и всеми базовыми угловыми точками:

$$\rho_m^0 = \rho(\mathbf{z}(d), \mathbf{z}^0(m)) = \|\mathbf{z}(d) - \mathbf{z}^0(m)\| = \left[ \sum_{j=1}^M (z_j(d) - z_j^0(m))^2 \right]^{1/2}.$$

для всех  $p_m \in P, m = 1, M$ .

Диаграммы распределения *расстояний* между реперной и базовыми угловыми точками представлены на рис. 2. Диаграммы в правом столбце относятся к угловым точкам, соответствующим смежным парам корреспондентов  $p_k \in P(R_+)$ , а в левом столбце — для  $p_m \in P(R_-)$ . Значения  $\rho_{(\cdot)}^0$

упорядочены по величине от большего к меньшему (по невозрастанию), а значения  $\pi_+(k) = k/M_+$  и  $\pi_-(m) = m/M_-$  по горизонтальным осям определялись в соответствии с номерами в списках  $k \in R_+$  и  $m \in R_-$ , где  $M_+ = |P(R_+)|$  и  $M_- = |P(R_-)|$  — общее число элементов в списке.

Тонкие пунктирные линии на диаграммах указывают *расстояние* реперной угловой точки от начала координат — значение нормы вектора:

$$\rho^d = \rho(0, \mathbf{z}(d)) = \|\mathbf{z}(d)\|.$$

Компоненты вектора  $\mathbf{z}(d)$  определяют Парето-оптимальное распределение межузловых потоков. Анализ диаграмм на рис. 2 показывает, что расстояния от реперной угловой точки до всех базовых угловых точек  $\rho_m^0 > \rho^d, p_m \in P(R_-)$ , для всех несмежных пар. При этом расстояния  $\rho_k^0 \leq \rho^d, p_k \in P(R_+)$ , для 80% базовых угловых точек смежных пар. Следовательно, в множестве (4) допустимых межузловых потоков подмножество угловых базовых точек смежных пар расположено ближе к максимальной «линии уровня» для суммы допустимых межузловых потоков:  $\sum'_m z_m = D^*$ . Указанную структурную особенность следует учитывать при решении оптимизационных задач с линейным функционалом \*на-сумму-потоков\* при поиске распределений потоков различных видов.

*Распределение расстояний* от опорных угловых точек до начала координат и реперной точки представлено на рис. 3 ( $m = \bar{1}, M$ ):

$$\rho_m^1 = \rho(0, \mathbf{z}^1(m)) = \|\mathbf{z}^1(m)\| = \left[ \sum_{j=1}^M z_j^2(m) \right]^{1/2};$$

$$\rho_m^\Delta = \rho(\mathbf{z}(d), \mathbf{z}^1(m)) = \left[ \sum_{j=1}^M (z_j(d) - z_j^1(m))^2 \right]^{1/2}.$$

Верхние кривые соответствуют *расстояниям* от начала координат, а нижние — расстояниям до реперной угловой точки. Диаграммы в правом столбце

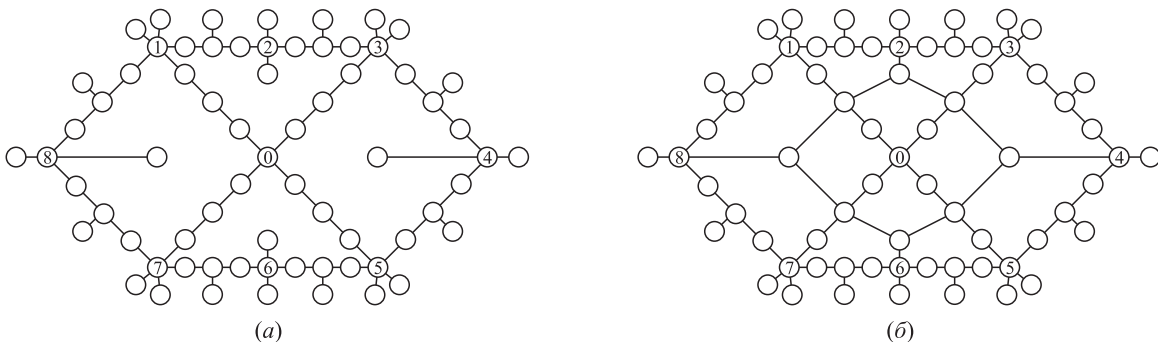
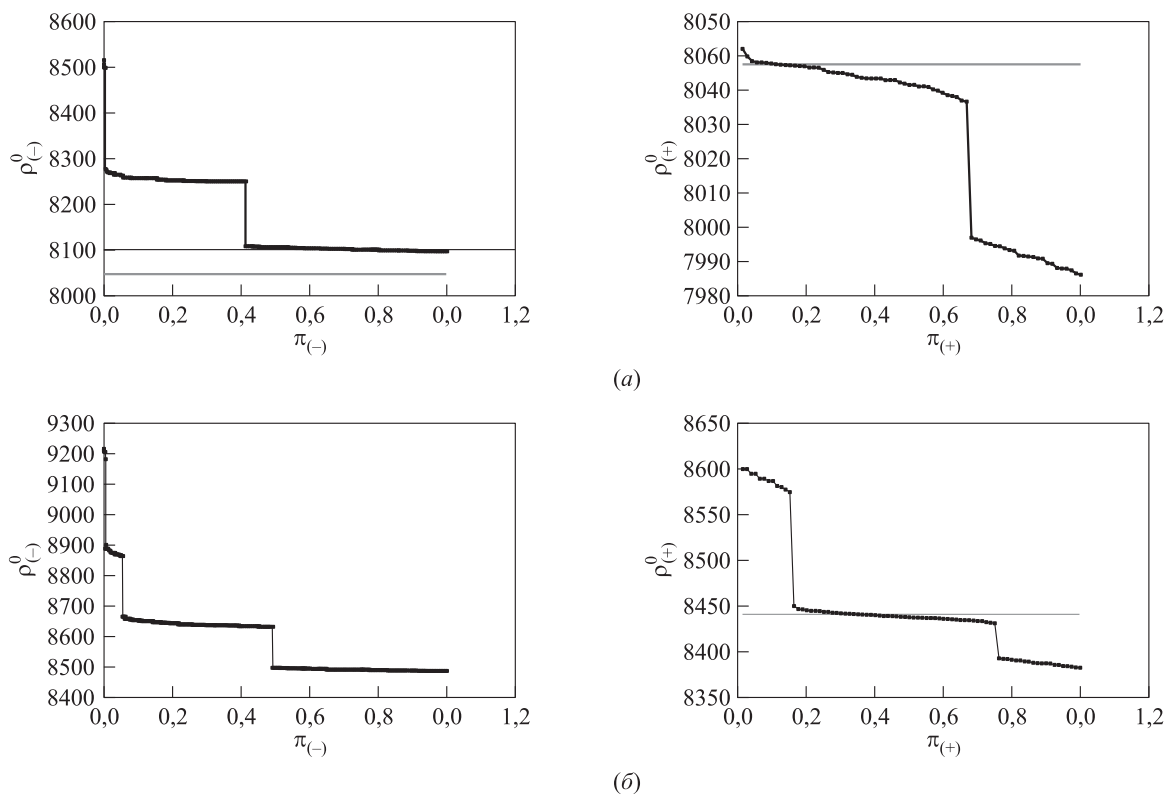
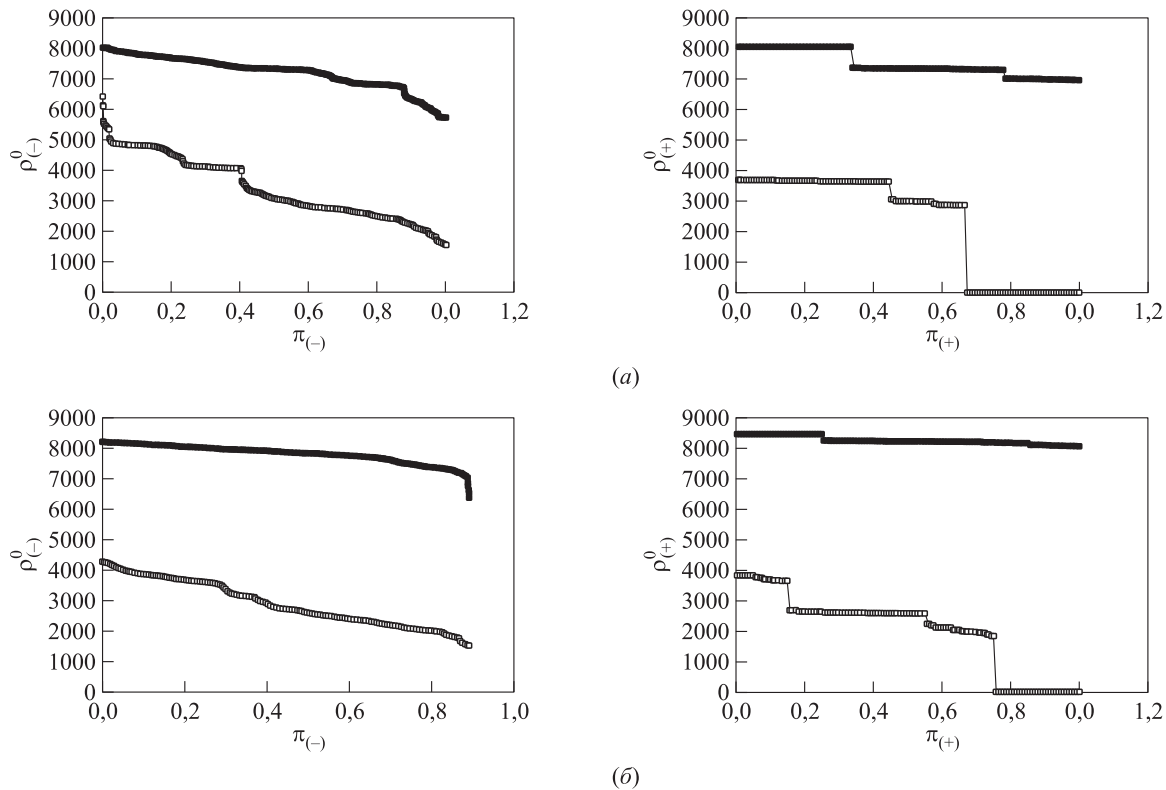


Рис. 1 Модели сетевых систем: (а) базовая; (б) кольцевая



**Рис. 2** Диаграммы распределения расстояний между реперной и базовыми угловыми точками: (а) базовая сеть; (б) кольцевая сеть



**Рис. 3** Диаграммы распределения расстояний от опорных угловых точек до начала координат и реперной точки: (а) базовая сеть; (б) кольцевая сеть

относятся к смежным парам и позволяют уточнить результаты анализа кривых на рис. 2. Из графиков следует, что более 20% опорных угловых точек смежных пар  $\rho_k^\Delta, p_k \in P(R_+)$ , совпадают с реперной угловой точкой  $\mathbf{z}(d)$ . Указанные угловые опорные точки соответствуют парам, которые имеют *единственно* возможный путь соединения по смежному ребру и получают привилегированный доступ к остаточной пропускной способности при любой *уравнительной недискриминирующей* стратегии распределения межузловых потоков. Диаграммы в левом столбце (см. рис. 3) характеризуют расположение опорных угловых точек для несмежных пар и расстояния от соответствующих базовых граничных точек на координатных осях.

## 7 Заключение

В статье [1] был предложен способ построения внутреннего опорного каркаса для исследования предельных функциональных возможностей многопользовательской сети [1, 2]. В данной работе рассматриваются результаты вычислительных экспериментов по поиску крайних точек опорного каркаса, соответствующих допустимым распределениям межузловых потоков различных видов, при

одновременной передаче которых достигается полная загрузка всех ребер сети. При формировании базовых векторов опорного каркаса многократно решается задача о максимальном потоке и минимальном разрезе [3, 4]. Результирующие вычислительные затраты оцениваются полиномиальной функцией от общего числа узлов сети [4].

## Литература

1. Малашенко Ю. Е. Максимальные межузловые потоки при предельной загрузке многопользовательской сети // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 24–28.
2. Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений. — М.: Макс Пресс, 2008. 197 с.
3. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1984. 392 с. (Jensen P. A., Barnes J. W. Network flow programming. — New York, NY, USA: Wiley, 1980. 408 p.)
4. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ / Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2005. 1296 с. (Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to algorithms. — New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2001. 1056 p.)

Поступила в редакцию 14.12.21

# METRIC EVALUATIONS OF THE ANGULAR POINTS OF THE SET OF ATTAINABLE INTERNODAL FLOWS OF MULTIUSER NETWORK

Yu. E. Malashenko

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The paper considers a model of a multiuser communication network in which information flows of various types are simultaneously transmitted between all pairs of correspondent nodes. The results of computational experiments for evaluation of the metric characteristics of a convex set of attainable interstitial flows and angular points located on the faces are analyzed. The angular points of intersection of the outer boundary of the set with the coordinate axes, each of which corresponds to the maximum internodal flow of a certain type, are considered as basic-point. To determine the coordinates of the support-angular-points, the values of permissible internodal flows are calculated, with simultaneous transmission of which the maximum load of all network edges is achieved. The coordinates of the bench-mark-point at which the sum of the internodal flows reaches the maximum possible value on the attainable set are also calculated. The norm of vectors corresponding to the coordinates of angular points is estimated in conditional units of flows during the computational experiments. Comparative diagrams of conditional distances between the bench-mark and support-angular points are provided. Computational experiments make it possible to write an explicit form of the vectors of internodal flows, the convex combination of which can be used to guarantee the evaluation of the functional characteristics of the network at the maximum load of all edges. When forming the basic vectors of the support frame, the problem of the maximum flow and the minimum cut is repeatedly solved. The resulting computational costs are estimated by a polynomial function of the total number of network nodes.

**Keywords:** multicommodity network model; internodal flows set; network peak-load

**DOI:** 10.14357/19922264220104

## References

1. Malashenko, Yu. E. 2021. Maksimal'nye mezhuzlovye potoki pri predel'noy zagruzke mnogopol'zovatel'skoy seti [Maximum internode flows at peak load of a multiuser network]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):24–28.
2. Lotov, A. V., and I. I. Pospelova. 2008. *Mnogokriterial'nye zadachi prinyatiya resheniy* [Multicriteria decision-making problems]. Moscow: Maks Press. 197 p.
3. Jensen, P. A., and J. W. Barnes. 1980. *Network flow programming*. New York, NY: Wiley. 408 p.
4. Cormen, T. H., C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. 2001. *Introduction to algorithms*. New York, NY: McGraw-Hill. 1056 p.

*Received December 14, 2021*

## Contributor

**Malashenko Yuri E.** (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; malash09@ccas.ru

# НОРМАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ, СТОХАСТИЧЕСКИ НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

И. Н. Сеницын<sup>1</sup>

**Аннотация:** Для систем, стохастически не разрешенных относительно производных (СтНРОП), разработаны два подхода к сведению таких систем к детерминированным уравнениям, не разрешенным относительно математических ожиданий и ковариационных характеристик (теорема 1), а также математических ожиданий и координатных функций канонических разложений (КР) (теорема 2). После сведения таких систем к детерминированным используются известные результаты автора. Приведен пример. Рассмотрены вопросы оценивания (фильтрации, экстраполяции и др.), идентификации и калибровки для приведенных моделей. Теоремы 1 и 2 допускают обобщения на эрдитарные стохастические системы (СтС), описываемые интегродифференциальными уравнениями. Особого внимания заслуживает развитие прямых численных методов анализа, моделирования, оценивания и калибровки как для широкополосных, так и для узкополосных возмущений.

**Ключевые слова:** каноническое разложение (КР); метод аналитического моделирования (МAM); нормализация по Пугачеву; системы, стохастически не разрешенные относительно производных (СтНРОП); стохастический процесс (СтП); стохастическая система (СтС); стохастическая функция

**DOI:** 10.14357/19922264220105

## 1 Введение

В [1, 2] развиты приближенные методы аналитического моделирования (МAM) широкополосных стохастических процессов (СтП) в СтНРОП, основанные на методах нормальной аппроксимации (МНА) и параметризации распределений. Для эрдитарных интегродифференциальных с гладкими нелинейностями СтНРОП, приведенных к дифференциальным СтС, соответствующие методы даны в [3, 4]. В [5] представлены МAM и оценивания нормальных СтП в СтНРОП с негладкими нелинейностями.

Основываясь на методе нормализации по Пугачеву сложных СтС [6–9], рассмотрим вопросы приведения СтНРОП к детерминированным системам, не разрешенных относительно производных. В разд. 2 приведены краткие сведения по нормальным СтС (НСтС). Системы СтНРОП описаны в разд. 3. В разд. 4 даются основные результаты (теоремы 1 и 2) по приведению систем, стохастически не разрешенных относительно производных, к соответствующим детерминированным системам. В разд. 5 приведен пример, иллюстрирующий основные результаты. Раздел 6 посвящен вопросам применения к задачам оценивания, идентификации и калибровки. Заключение содержит выводы и возможные обобщения.

## 2 Нормальные стохастические системы Пугачева

### 2.1 Определения

Следуя В.С. Пугачеву [6–9], назовем СтС в действительном линейном функциональном пространстве нормальной, если при нормальном распределении ее входного сигнала в пространстве  $X$  совместное распределение выходного сигнала в пространстве  $Y$  и входного сигнала в пространстве  $X$  нормально. Определим в пространствах  $X$  и  $Y$  слабые топологии с помощью множеств линейных функционалов  $L_x$  и  $L_y$  соответственно. В пространствах  $L_x$  и  $L_y$  определим слабые топологии с помощью множеств линейных функционалов вида  $\lambda x$  и  $\mu y$ , соответствующих всем возможным  $x \in X$  и  $y \in Y$ . Кроме того, будем предполагать, что пространства  $X$  и  $Y$  рефлексивны. Если теперь определить на прямом произведении пространств  $Z = XY$  множество  $L_z$  линейных функционалов  $\nu z = \lambda x + \mu y$  для  $\lambda \in L_x$  и  $\mu \in L_y$  и совершенно таким же образом ввести слабые топологии в  $Z$  и  $L_z$ , то пространство  $Z$  тоже будет рефлексивным. При этих условиях любой положительно определенный функционал  $g(\lambda)$  на  $L_x$  (или  $L_y$ , или  $L_z$ ), непрерывный во введенной топологии и удовлетворяющий условию  $g(0) = 1$ , однозначно опреде-

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru



ляет вероятностную меру на  $\sigma$ -алгебре, порождаемой базой в топологии в  $X$  (соответственно  $Y, Z$ ), и является характеристическим функционалом, соответствующим этой вероятностной мере. Поэтому принятые допущения дают возможность задавать распределения вероятностей в пространствах  $X, Y, Z$  с помощью характеристических функционалов (х.ф.).

Введем понятия математического ожидания, ковариационного оператора и взаимного ковариационного оператора посредством следующих формул:

$$m_x = MX = \int x\mu_x(dx),$$

где  $\mu_x$  — вероятностная мера  $X$ ;

$$K_x\lambda = M(X - m_x)(\lambda\bar{X} - \overline{\lambda m_x}),$$

где  $\lambda \in L_x$  — отображение  $L_x$  в  $X$ ;

$$\begin{aligned} K_{yx}\lambda &= M(Y - m_y)(\lambda\bar{X} - \overline{\lambda m_x}) = \\ &= \int (y - m_y)(\lambda x - \overline{\lambda m_x})\mu_z(dx dy), \end{aligned}$$

где  $\lambda \in L_x$  (отображение  $L_x$  в  $Y$ ). Здесь  $\mu_z$  — вероятностная мера составного стохастического элемента (СтЭ)  $Z = XY$  с реализациями в прямом произведении пространств  $Z = XY$ . При этом СтЭ  $X$  и  $Y$  коррелированы, если  $K_{yx}\lambda \neq 0$  хотя бы для одного  $\lambda \in L_x$ , и некоррелированы, если  $K_{yx}\lambda = 0$  для всех  $\lambda \in L_x$ . Оператор  $K_x$  положителен, если  $\lambda K_x\lambda \geq 0$  при всех  $\lambda \in L_x$ , и симметричен, когда  $\lambda'K_x\lambda = \lambda K_x\lambda'$ .

Распределение СтЭ  $X$  в действительном линейном пространстве называется нормальным, если его х.ф. определяется формулой:

$$g_x(\lambda) = M_N e^{i\lambda X} = \exp\left[i\lambda m_x - \frac{1}{2}\lambda K_x\lambda\right], \quad \lambda \in L_x.$$

Если СтЭ  $Z = \{X, Y\}$  распределен нормально, то условное распределение СтЭ  $Y$  (или СтЭ  $X$ ) при любом данном значении  $x$  (соответственного  $y$ ) СтЭ  $X$  (соответственно  $Y$ ) регулярно и нормально, причем условное математическое ожидание СтЭ  $Y$  (соответственно  $X$ ) зависит линейно от  $x$  (соответственно  $y$ ), а его условный ковариационный оператор не зависит от  $x$  (соответственно  $y$ ).

## 2.2 Общий алгоритм нормализации

Для получения уравнений НСтС достаточно аппроксимировать:

- (1) математическое ожидание  $m_{y|x}$  ее выходного сигнала от входного сигнала  $x$  приближенной линейной зависимостью  $a + Lx$ ;

- (2) определить оператор  $L$  из уравнения

$$LK_x = K_{yx};$$

- (3) усреднить по возможным реализациям входного сигнала  $x$  ковариационный оператор  $K_{y|x}$  выходного сигнала и заменить переходную плотность вероятности нормальной с параметрами

$$a = m_y - Lm_x; \quad K_{y'} = M_N K_{yx} = \int K_{y|x}\mu_x(dx).$$

В [6–9] показано, что любую НСтС можно рассматривать как последовательное соединение цепочки, состоящей из параллельно соединенных детерминированной линейной системы с оператором  $L$  и генератора шума, вырабатывающего нормально распределенный шум  $Y'$ , независимый от входного сигнала, и идеального детерминированного сумматора.

Любые соединения НСтС представляют собой НСтС.

Теория НСтС дает возможность применять для стохастического анализа и моделирования НСтС хорошо разработанный аппарат теории линейных СтС. При этом необходимо только учитывать наряду с обычными источниками помех и шумов в детерминированных системах, внутренние шумы, создаваемые генераторами шумов, соединенными с детерминированными линейными системами в элементах этой системы.

## 2.3 Алгоритм нормализации посредством канонических разложений

При использовании КР случайных функций (СФ) и СтП в основе лежат следующие соотношения:

$$\begin{aligned} X &= m_x + \sum_{i=1}^{\infty} V_i x_i, \quad K_x = \sum_{i=1}^{\infty} D_i^V x_i x_i^T; \\ K_y &= \sum_{i=1}^{\infty} D_i^V y_i y_i^T + \sum_{i=1}^{\infty} D_j^W z_j z_j^T; \\ Y &= m_y + \sum_{i=1}^{\infty} V_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} W_j z_j; \\ \sum_{i=1}^{\infty} V_i y_i &= LX^0, \quad L = \sum_{i=1}^{\infty} y_i; \\ \sum_{i=1}^{\infty} W_j z_j &= Y'; \quad K_{y'} = \sum_{i=1}^{\infty} D_j^W z_j z_j^T. \end{aligned}$$

Здесь  $V_i = f_i X^0$  и  $W_j = f_j' Y^0$  — некоррелированные случайные величины (СВ) с дисперсиями  $D_i^V$

и  $D_j^W$ ;  $x_i, y_i$  и  $z_j$  — детерминированные координатные функции;  $f_i$  и  $f'_j$  — линейные функционалы, определяющие базисы в соответствующих гильбертовых пространствах, порожденных СВ  $V_i$  и  $W_j$ .

### 3 Системы, стохастически не разрешенные относительно производных

В задачах статистической идентификации и калибровки сложных СтС встречаются элементы, описываемые СФ вектора состояния и его производных по времени. Примерами могут служить элементы с сухим трением, гистероны, радиолокационные, оптические и акустические устройства со стохастическими пеленгационными характеристиками, а также стохастические организационно-технично-экономические системы [10]. На основе экспериментальных данных для таких систем трудно провести параметризацию соответствующих характеристик.

Типовой системой, стохастически не разрешенной относительно производных, может служить следующая:

$$F(t, \dot{X}_t, X_t, U_t) = \Phi(t, \dot{X}_t, X_t, U_t) + \varphi(t, X_t, U_t) = 0; \quad (1)$$

$$\dot{U}_t = a_{0t}^U + a_t^U U_t + b_t^U V_t. \quad (2)$$

Здесь  $X_t$  и  $\dot{X}_t$  —  $n^x$ -мерный вектор состояния и его производная (понимаемая в среднеквадратическом смысле);  $U_t$  —  $n^U$ -мерный СтП;  $V_t$  —  $n^V$ -мерный векторный СтП типа гауссовского (нормального) белого шума с матрицей интенсивностей  $\nu^V = \nu^V(t)$ ;  $\Phi = \Phi(t, \dot{X}_t, X_t, U_t)$  — векторная СФ отмеченных переменных размерности  $n^\Phi$ ;  $\varphi = \varphi(t, X_t, U_t)$  — известная векторная функция размерности  $n^\varphi$ ;  $a_{0t}^U, a_t^U$  и  $b_t^U$  — известные функции размерности  $n^U \times 1, n^U \times n^U$  и  $n^U \times n^V$ .

При использовании КР для стохастической функции  $\Phi$  и гауссовского белого шума  $V_t$  требуются или априорно заданные экспериментальные данные, или спектрально-корреляционные вероятностные характеристики.

**Замечание 1.** К системе (1) приводятся также уравнения вида:

$$\begin{aligned} & F(t, \Theta, \dot{X}_t, \dot{X}_t, \dots, X_t^{(k)}, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(r)}) = \\ & = \Phi(t, \Theta, \dot{X}_t, \dot{X}_t, \dots, X_t^{(k)}, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(r)}) + \\ & + \varphi(t, \Theta, \dot{X}_t, \dot{X}_t, \dots, X_t^{(k)}, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(r)}) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\dot{U}_t = a^U(t, \Theta, U_t) + b^U(t, \Theta, U_t) V,$$

рассмотренные в [1, 2, 5] соответственно для гладких и разрывных функций. Здесь  $\Theta$  — определяющие инструментальные параметры системы;  $X_t^{(k)}$  и  $U_t^{(r)}$  — производные от соответствующих функций;  $V$  — нормальный белый шум интенсивности  $\nu$ ;  $a^U = a^U(t, \Theta, U_t)$  и  $b^U = b^U(t, \Theta, U_t)$  — известные функции отмеченных переменных.

## 4 Основные результаты

### 4.1 Общий ковариационный подход

В условиях существования решения, понимаемого в среднеквадратическом смысле, рассмотрим два подхода для приведения (1) к двум системам детерминированных уравнений для математических ожиданий и ковариационных характеристик.

Сначала рассмотрим случай, когда уравнения (1) допускают нормализацию по Пугачеву относительно переменных  $\dot{X}_t$  и  $Z_t = [X_t^T U_t^T]^T$ :

$$F \approx \Phi_0(t, m_t^{\dot{X}}, m_t^Z) + \Delta \Phi_t^0 + k^\Phi(t, m_t^{\dot{X}}, m_t^Z) \dot{X}_t^0 + k^\Phi Z_t^0 + \varphi_0(t, m_t^Z) + k^\varphi(t, m_t^Z) Z_t^0 = 0. \quad (3)$$

Из (3), опуская аргументы, получим следующее уравнение:

$$\Phi_0 + \varphi_0 = 0. \quad (4)$$

При этом будем считать, что уравнение (4) допускает нормализацию по математическому ожиданию  $m_t^{\dot{X}}$ .

Теперь рассмотрим уравнения для центрированных составляющих. Уравнение для  $Z_t^0$  имеет вид:

$$k^\Phi \dot{X}_t^0 + (k^\Phi + k^\varphi) Z_t^0 = 0. \quad (5)$$

При условии  $\det k^\Phi \neq 0$ , разрешая (5) относительно  $\dot{X}_t^0$ , приходим к следующему матричному выражению для матрицы  $K_t^{\dot{X}}$ :

$$K_t^{\dot{X}} = -(k^\Phi)^{-1} (k^\Phi + k^\varphi) K_t^Z. \quad (6)$$

Для вычисления  $K_t^Z, K_t^X, K_t^{\Delta\Phi}$  и  $K_t^{X\Delta\Phi}$  с учетом (2) имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_t^0 &= AZ_t + BV; \\ \dot{K}_t^Z &= AK_t^Z + K_t^Z A^T + B\nu^V B^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} [-(k^\Phi)^{-1}] & [0]; \\ [0] & [a_t^U] \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} [0] \\ [b_t^U] \end{bmatrix}; \quad \nu^V = [\nu_{ij}]; \quad (8)$$

$$K_t^Z = \begin{bmatrix} [K_t^X] & [K_t^{X\Delta\Phi}] \\ [K_t^{X\Delta\Phi}] & [K_t^{\Delta\Phi}] \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где квадратными скобками отмечены блочные квадратные матрицы соответствующих размеров  $n^X, n^\Phi, n^{\Delta\Phi}$  и  $n^\varphi$ .

**Теорема 1.** Пусть система (1), стохастически не разрешенная относительно производных, допускает нормализацию по Пугачеву. Тогда в основе ковариационного алгоритма лежат уравнения (4), (6) и (7) при условиях (8) и (9) и  $\det k^\Phi \neq 0$ .

## 4.2 Алгоритмы, основанные на канонических разложениях

При использовании КР со СВ  $W_h$  и  $V_j$  в основе соответствующего алгоритма приведения лежат следующие соотношения:

$$X_t = m_t^X + \sum_{h=1}^{H_W} W_h x_{ht}^W + \sum_{j=1}^{H_V} V_j x_{jt}^V; \quad (10)$$

$$\dot{X}_t = \dot{m}_t^X + \sum_{h=1}^{H_W} W_h \dot{x}_{ht}^W + \sum_{j=1}^{H_V} V_j \dot{x}_{jt}^V; \quad (11)$$

$$Z_t = m_t^Z + \sum_{h=1}^{H_W} W_h z_{ht}^W + \sum_{j=1}^{H_V} V_j z_{jt}^V, \quad (12)$$

$$\Phi \approx \Phi_0 + \Delta\Phi_t^0; \quad (13)$$

$$\Phi_0(t, m_t^X, m_t^Z) = M_{\mathcal{N}}\Phi(t, \dot{X}_t, Z_t); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_t^0 &= \Delta\Phi_t^0(t, m_t^X, m_t^Z) = \\ &= \sum_{h=1}^{H_\Phi} W_h w_h(t, m_t^X, m_t^Z); \end{aligned} \quad (15)$$

$$K_t^Z = \sum_{h=1}^{H_W} D_{jt}^W x_{ht}^W \overline{x_{ht}^W} + \sum_{j=1}^{H_V} D_j^V x_{jt}^V \overline{x_{jt}^V}; \quad (16)$$

$$\dot{z}_{ht}^W = A z_{ht}^W, \quad \dot{z}_{jt}^V = A z_{jt}^V + B v_{jt}. \quad (17)$$

Здесь СВ  $W_h$  и  $V_j$  и соответствующие им координатные функции  $x_t^W, x_{ht}^W$  и  $v_{jt}^V$  находятся экспериментально на основе ковариационных функций  $\Phi$  и  $V$  по известным формулам [8].

**Теорема 2.** Пусть система (1), стохастически не разрешенная относительно производных, допускает нормализацию посредством КР по Пугачеву. Тогда

в основе ковариационного алгоритма лежат уравнения (10)–(17) для математических ожиданий и координатных функций при условиях  $\det k^\Phi \neq 0$  и  $\det k^\varphi \neq 0$ .

Для гладких и разрывных нелинейностей предложены алгоритмы приведения к стохастическим дифференциальным уравнениям, разрешенным относительно производных, основанные на построении стохастических регрессионных моделей согласно [5].

**Замечание 2.** В условиях замечания 1 формулируются утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, но только для расширенного вектора состояния  $\bar{X} = [X^T U^T]^T$ .

**Замечание 3.** Для гладких и разрывных нелинейностей предложены алгоритмы приведения к стохастическим дифференциальным уравнениям, разрешенным относительно производных, основанные на построении стохастических регрессионных моделей согласно [5]. В этих моделях имеет место зависимость коэффициентов нормализации не только от математических ожиданий, но и от вероятностных моментов  $\Phi_0, \varphi_0, k^\Phi$  и  $k^\varphi$  второго порядка  $K_t^Z$ .

## 5 Пример

Сначала рассмотрим скалярную гауссовскую систему вида (1)

$$F \equiv \Phi(\dot{X}_t) + a_t X_t + u_t = 0. \quad (18)$$

Здесь  $X_t = m_t^X + X_t^0$  и  $\dot{X}_t = \dot{m}_t^X + \dot{X}_t^0$  — переменная состояния и ее производная по времени  $t$ ;  $a_t$  — известная скалярная функция времени;  $\Phi(\dot{X}_t)$  — СФ, допускающая нормализацию по Пугачеву, следующего вида:

$$\Phi(\dot{X}_t) \approx \Phi_0 + k^\Phi \dot{X}_t^0 + \Delta\Phi_t^0. \quad (19)$$

Здесь  $\Delta\Phi_t^0$  — нормальный СтП, удовлетворяющий линейному уравнению формирующего фильтра

$$\dot{\Delta}\Phi_t^0 = a_t^{\Delta\Phi} \Delta\Phi_t^0 + b_t^{\Delta\Phi} V_t, \quad (20)$$

где  $a_t^{\Delta\Phi}$  и  $b_t^{\Delta\Phi}$  — скалярные известные функции;  $V_t$  — нормальный белый шум интенсивности  $\nu^V = \nu^V(t)$ . Входящие в (19) функции  $\Phi_0$  и  $k^\Phi$  зависят от  $m_t^X$  и  $D_t^X$ .

Уравнение (18) с учетом (19) распадается на два скалярных уравнения: одно для математического ожидания при условии  $k^{\Phi_0} \neq 0$  имеет вид:

$$\Phi_0 + a_t m_t^X + u_t = 0, \quad \Phi_0 = k^{\Phi_0} m_t^X, \quad (21)$$

а для  $X_t^0$  при условии  $\det k^\Phi \neq 0$  имеем

$$k^\Phi \dot{X}_t^0 + \Delta\Phi_t^0 + a_t X_t^0 = 0$$

или

$$\dot{X}_t^0 = a_t(k^\Phi)^{-1}X_t^0 - (k^\Phi)^{-1}\Delta\Phi_t^0. \quad (22)$$

Уравнения (22) и (20) для  $Z_t^0 = [X_t^0 \Delta\Phi_t^0]^T$  приводят к следующему векторному уравнению для ковариационной матрицы:

$$\dot{K}_t^Z = AK_t^Z + K_t^Z A^T + B\nu^V B^T, \quad (23)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -a_t(k^\Phi)^{-1} & -(k^\Phi)^{-1} \\ 0 & a^{\Delta\Phi} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b^{\Delta\Phi} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (21) и (23) в развернутом виде приводят к следующим соотношениям:

$$m_t^{\dot{X}} = (a_t m_t^X + u_t)(k^{\Phi_0})^{-1}; \quad (24)$$

$$D_t^{\dot{X}} = a_t^2 (k^\Phi)^{-2} D_t^X + (k^\Phi)^{-2} D_t^{\Delta\Phi} - 2a_t (k^\Phi)^{-2} K_t^{X\Delta\Phi}; \quad (25)$$

$$\dot{D}_t^X = -2(a_t D_t^X + K_t^{X\Delta\Phi}); \quad (26)$$

$$\dot{D}_t^{\Delta\Phi} = 2a_t^{\Delta\Phi} D_t^{\Delta\Phi} + (b_t^{\Delta\Phi})^2 \nu^V; \quad (27)$$

$$\dot{K}_t^{X\Delta\Phi} = a_t^{\Delta\Phi} K_t^{\Delta\Phi} - (a_t K_t^{X\Delta\Phi} + D_t^{\Delta\Phi})(k^\Phi)^{-1}. \quad (28)$$

Таким образом, гауссовская стохастическая система (18)–(20) сведена к системе взаимосвязанных детерминированных конечных уравнений (24) и (25) и дифференциальных уравнений (26)–(28).

При использовании КР в случае, когда

$$\Phi(\dot{X}_t) = \sum_{h=-\infty}^{h=\infty} W_h \exp(i\lambda_h \dot{X}_t);$$

$$D_h^W = \int_{\lambda_h - \Delta}^{\lambda_h + \Delta} s^\Phi(\lambda) d\lambda,$$

сводится к совместной детерминированной системе, не разрешенной относительно производных, для математических ожиданий и координатных функций:

$$F_0(t, m_t^X, \dot{m}_t^X) = \Phi_0(t, \dot{m}_t^X) + u_t + a_t m_t^X = 0;$$

$$\exp(i\lambda_h \dot{m}_t^X) + a_t x_{ht} = 0 \quad (h = \overline{1, H_W});$$

$$D_t^X = \sum_{h=1}^{H_W} D_h^W x_{ht} \overline{x_{ht}}.$$

## 6 Применение

### 6.1 Фильтрация

Пусть исходная наблюдаемая СтНРОП состояния  $X_t$  и наблюдения  $Y_t$  имеет вид:

$$F_1(t, \Theta, \dot{X}_t, X_t, U_t, Y_t) + \varphi_1(t, \Theta, X_t, U_t, Y_t) = 0. \quad (29)$$

Предположим, что (29) удовлетворяет условиям теоремы 1 для вектора переменных  $\bar{X}_t$  и может быть приведена к виду:

$$\dot{\bar{X}}_t = (\bar{a}Y_t + \bar{a}_1\bar{X}_t + \bar{a}_0) + \bar{\psi}V. \quad (30)$$

Векторное уравнение наблюдения примем следующим:

$$\dot{Y}_t = (bY_t + b_1\bar{X}_t + b_0) + \psi_1V. \quad (31)$$

В (30) и (31)  $V$  — гауссовский белый шум интенсивности  $\nu^V$ ;  $\bar{\psi}$  и  $\psi_1$  — известные коэффициенты, зависящие от времени. В таком случае, используя известные уравнения среднеквадратичной оптимальной гауссовской линейной фильтрации [11], придем к следующему утверждению.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия:

- (1) стохастическая, не разрешенная относительно старшей производной, система (29) может быть разрешена и приведена к виду (30) для наблюдаемого расширенного вектора состояния;
- (2) наблюдения  $Y_t$  полны и описываются линейным уравнением (31), разрешенным относительно производной  $Y_t$ .

Тогда при условии невырожденности диффузионной матрицы наблюдений  $\det(\psi_1\nu\psi_1^T) \neq 0$  уравнения среднеквадратичного несмещенного линейного фильтра для оценки расширенного вектора  $\bar{X}_t$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_t &= (aY_t + a_1\hat{X}_t + a_0) + \\ &+ \beta_t [\dot{Y}_t - (bY_t + b_1\bar{X}_t + b_0)]; \quad (32) \end{aligned}$$

$$\beta_t = (R_t b_1^T + \psi_1\nu\psi_1^T)(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_t &= a_1 R_t + R_t a_1^T + \psi\nu\psi^T - \\ &- (R_1 b_1^T + \psi_1\nu\psi_1^T)(\psi_1\nu\psi_1^T)^{-1}(b_1 R_t + \psi_1\nu\psi_1^T). \quad (34) \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{X}_t$  — среднеквадратичная оценка расширенного вектора состояния;  $R_t$  — ковариационная матрица среднеквадратичных ошибок фильтрации расширенного вектора  $\bar{X}_t$ .

Аналогично формулируется **теорема 4** для алгоритма, основанного на КР. Для этого используются результаты [8, 9].

**Замечание 4.** В случае когда результаты наблюдения не влияют на объект наблюдения, полагая  $a = b = 0$ , получаем известные уравнения фильтра Калмана–Бьюси [11].

**Замечание 5.** Для фильтрации в условиях, когда помеха в уравнениях наблюдения не является белым шумом, уравнение (31), в зависимости от гладкости

фильтруемого сигнала и помехи следует использовать методы Гулько–Новосельцевой или Брайсона–Иохансена [11].

**Замечание 6.** Случай, когда уравнения (30) и (31) содержат параметрические шумы подробно изучен в [5].

## 6.2 Идентификация и калибровка

Если в состав расширенного вектора состояния входят инструментальные параметры  $\Theta$ , представляющие собой СВ, т. е. когда  $\dot{\Theta} = 0$ , уравнения (32)–(34) будут представлять собой алгоритм совместной фильтрации и идентификации для  $x_t = [\bar{X}_t^T \Theta^T]^T$ . Для решения метрологических задач в технических приложениях широко используются комплексы операций и алгоритмов для систем калибровки при специальных условиях с целью подтверждения требований стандартов.

## 7 Заключение

1. Для СтНРОП разработаны два подхода к сведению таких систем к детерминированным уравнениям, не разрешенным относительно математических ожиданий и ковариационных характеристик (теорема 1), а также математических ожиданий и координатных функций КР (теорема 2). После сведения таких систем к детерминированным используются известные результаты [1, 2, 5]. Приведен пример.
2. Рассмотрены вопросы фильтрации (теорема 3), идентификации и калибровки для приведенных моделей.
3. Теоремы 1 и 2 допускают обобщения на эрдитарные СтС, описываемые интегродифференциальными уравнениями.
4. Особого внимания заслуживает развитие прямых численных методов анализа, моделирования, оценивания и калибровки как для широкополосных, так и для узкополосных возмущений.

## Литература

1. Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование широкополосных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 1. С. 3–10.
2. Сеницын И. Н. Параметрическое аналитическое моделирование процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27. № 1. С. 20–45.
3. Сеницын И. Н. Нормальные субоптимальные фильтры для дифференциальных стохастических систем, не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 3–10.
4. Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование и фильтрация нормальных процессов в интегродифференциальных стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2021. Т. 31. № 1. С. 37–56.
5. Sinitsyn I. N. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic differential equations with unsolved derivatives // J. Mathematics Statistics Research, 2021. Vol. 3. Iss. 1. Art. 139. 7 p. doi: 10.36266/JMSR/139.
6. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990. 632 с.
7. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.
8. Сеницын И. Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. 768 с.
9. Академик Пугачев Владимир Семенович: к столетию со дня рождения / Под ред. И. Н. Сеницына. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2011. 376 с.
10. Сеницын И. Н., Шаламов А. С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. — 2-е изд. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2019. 1072 с.
11. Сеницын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачева. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.

Поступила в редакцию 22.03.21

# NORMALIZATION OF SYSTEMS WITH STOCHASTICALLY UNSOLVED DERIVATIVES

I. N. Sinitsyn

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** For a system with stochastically unsolved derivatives, two approaches for reduction of such systems to deterministic systems are developed. The first approach is based on equations for mathematical expectations and covariance characteristics. The second approach considers equations for mathematical expectations and coordinate functions for canonical expansions. The theory of normal stochastic systems is the basis of the developed approaches. An illustrative example is given. Applications to estimation, identification, and calibration problems are considered. Some generalizations are mentioned.

**Keywords:** canonical expansion (CE); methods of analytical modeling (VFV); normalization by Pugachev; stochastic processes (StP); stochastic systems (StS); stochastic function system with stochastically unsolved derivatives

**DOI:** 10.14357/19922264220105

## References

1. Sinitsyn, I. N. 2017. Analiticheskoe modelirovanie shirokopolosnykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling of wide band processes in stochastic systems with unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(1):3–10.
2. Sinitsyn, I. N. 2017. Parametricheskoe analiticheskoe modelirovanie protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Parametric analytical modeling of wide band processes in stochastic systems with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 27(1):20–45.
3. Sinitsyn, I. N. 2021. Normal'nye suboptimal'nye fil'try dlya differentsial'nykh stokhasticheskikh sistem, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Normal suboptimal filters for differential stochastic systems with unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):3–10.
4. Sinitsyn, I. N. 2021. Analiticheskoe modelirovanie i fil'tratsiya normal'nykh protsessov v integrodifferentsirovannykh stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling and filtering in integrodifferential systems with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(1):37–56.
5. Sinitsyn, I. N. 2021. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic equations with unsolved derivatives. *J. Mathematics Statistics Research* 3(1):139. 7 p.
6. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 1987. *Stochastic differential systems. Analysis and filtering*. Chichester — New York: John Wiley & Sons. 549 p.
7. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2001. *Stochastic systems. Theory and applications*. Singapore: World Scientific. 908 p.
8. Sinitsyn, I. N. 2009. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy i ikh primeneniye v zadachakh komp'yuternoy podderzhki nauchnykh issledovaniy* [Canonical expansions of random functions and their applications in computer-aided support]. Moscow: TORUS PRESS. 768 p.
9. Sinitsyn, I. N., ed. 2011. *Akademik Pugachev Vladimir Semenovich: k stoletiyu so dnya rozhdeniya* [Academician Pugachev Vladimir Semenovich: To the centenary of his birth]. Moscow: TORUS PRESS. 376 p.
10. Sinitsyn, I. N. 2019. *Leksii po teorii sistem integrirovannoy logisticheskoy podderzhki* [Lectures on theory of integrated logistic support systems]. Moscow: TORUS PRESS. 1072 p.
11. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd. ed. Moscow: Logos. 776 p.

Received March 22, 2021

## Contributor

**Sinitsyn Igor N.** (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

# О ПРИМЕНЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ ПЛОХО ФОРМАЛИЗУЕМЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ВИРТУАЛЬНОГО СКРИНИНГА КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ I: ОСНОВЫ ПРОБЛЕМНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ТЕОРИИ\*

И. Ю. Торшин<sup>1</sup>

**Аннотация:** Топологический подход к анализу плохо формализованных задач и теория хемографов являются расширениями алгебраического подхода к распознаванию, развиваемого в научной школе академика РАН Ю. И. Журавлёва. В первой части статьи предложен проблемно ориентированный формализм для разработки алгоритмов скрининговых оценок квантово-механических (КМ) свойств молекул по их химической структуре. Предложены способы введения метрик на множествах молекул и процедуры порождения «синтетических» признаков описаний, основанные на согласовании значений «экспертной» метрики на множестве значений свойств молекул со значениями настраиваемой метрики на множестве структур молекул.

**Ключевые слова:** алгебраический подход; хемоинформатика; размеченные графы; комбинаторный анализ разрешимости

**DOI:** 10.14357/19922264220106

## 1 Введение. Проблемная область

Алгебраический подход к анализу проблем распознавания, классификации включает формулировку и исследование критериев разрешимости и регулярности задач [1–3], корректности и полноты моделей алгоритмов [4–6]. Исследуются алгоритмы в виде композиций  $A = B \circ C \circ D$ , где  $B$  — распознающий оператор;  $C$  — корректирующая операция (корректор);  $D$  — решающее правило. Исходно в рамках алгебраического подхода наибольшее внимание уделяется именно формулировке и исследованию критериев разрешимости и регулярности задач распознавания/классификации, корректности и полноты моделей алгоритмов [1].

Исследование выполнимости этих критериев и «обучение» алгоритмов подразумевает, что задано формальное описание: *матрица информации* (набор признаков описаний объектов) и *информационная матрица* (отнесение объектов к определенным классам). В то же время во многих прикладных областях (биология, химия, медицина) встречаются

задачи, формальные описания которых могут быть получены очень многими способами.

Прикладные задачи, для которых не существует однозначного метода выделения объектов, определения признаков описаний и классов объектов на основе имеющегося «исходного описания» считаются *плохо формализуемыми* [4]. Адекватная формализация задач позволяет улучшить аккуратность и обобщающую способность соответствующих алгоритмов распознавания. С этой целью в русле алгебраического подхода разрабатываются топологическая и метрическая теории анализа данных [7–9].

К плохо формализуемым относятся и рассматриваемые в настоящей работе задачи типа «структура–свойство», где существенную неоднозначность представляют собой способы порождения признаков описаний молекул.

В статье представлены результаты совместного применения топологического подхода к плохо формализованным задачам [4] и методов теории анализа хемографов [8, 9] для разработки алгоритмов виртуального скрининга КМ свойств молекул.

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-00356, 18-07-00944, 20-07-00537).

<sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, tiy135@yahoo.com

## 2 Введение. О виртуальных скринингах молекул

Квантовая механика — один из ярких примеров успешного применения теории вероятностей, теории операторов, теории групп и функционального анализа в теоретической физике. Тем не менее точное аналитическое решение уравнения Шредингера имеется только для атома водорода, а высокоточные полумпирические схемы КМ-расчетов вычислительно затратны. В то же время задачи поиска перспективных материалов и лекарств подразумевают проведение скринингов пространства всех возможных «малых» органических молекул (более  $10^{11}$  структур [10]).

Для осуществления первоначальных стадий таких виртуальных скринингов необходимы алгоритмы для оценочных расчетов КМ-свойств молекул, позволяющие выделять подмножества молекул с экстремальными значениями КМ-свойств. Практически важны (а) точность, (б) обобщающая способность, (в) производительность вычислений и (г) интерпретируемость таких алгоритмов. В случае оценочных расчетов КМ-свойств молекул необходимо особо акцентировать интерпретируемость таких алгоритмов в терминах теории химической связи на уровне, доступном для химиков-практиков. Одно из возможных решений — алгоритмы, построенные на основании теории хемографов в рамках топологического подхода к анализу данных.

## 3 Основы топологической теории анализа данных

Алгебраический подход требует определения множества *начальных информации* ( $I_i$ ) и множества *конечных информации* ( $I_f$ ) [1]. Исследуемые алгоритмы  $A(\theta) : I_i \rightarrow I_f$  ( $\theta$  — вектор внутренних параметров) «обучаются» на основе конечных множеств прецедентов  $Pt \subset I_i \times I_f$ . Топологическая теория анализа данных позволяет проводить систематические исследования различных способов определения множеств  $I_i$  и  $I_f$  и так называемого множества оценок (область значений распознающего оператора  $B$ ).

Пусть  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots, x_{N_0}\}$  — множество исходных описаний объектов,  $\mathbf{X} \subseteq S$ , где  $S$  — пространство таких описаний. Пусть  $J_{ob}$  — пространство допустимых признаков описаний объектов и определена функция  $D : S \rightarrow J_{ob}$ . Определим  $J_{ob} \subseteq I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k \times \dots \times I_{n+1}$ ,  $I_i \subseteq I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k \times \dots \times I_n$  и  $I_f \subseteq I_{n+1} \times I_{n+2} \times \dots \times I_{n+l}$  на основе  $I_k = \{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_b}, \dots, \lambda_{k_{|I_k|-1}}, \Delta\}$  —

множеств значений  $k$ -х компонент признакового описания,  $k = 1, \dots, n + l$ , где  $\Delta$  — неопределенность;  $n$  — число признаков;  $l$  — число целевых (прогнозируемых) переменных.

Формализация задачи, т. е. переход от множества  $\mathbf{X} \subseteq S$  к множеству прецедентов  $\mathbf{Q} \subseteq J_{ob}$ , заключается в определении таких функций  $\Gamma_k : S \rightarrow I_k$ ,  $k = 1, \dots, n + l$ , что  $D(x_\alpha) = (\Gamma_1(x_\alpha) \times \dots \times \Gamma_k(x_\alpha) \times \dots \times \Gamma_{n+l}(x_\alpha))_\Delta$  [4, 6],  $m_\alpha = (\Gamma_1(x_\alpha) \times \dots \times \Gamma_n(x_\alpha))_\Delta$  — *вектор значений признаков*, а  $t_\alpha = (\Gamma_{n+1}(x_\alpha) \times \dots \times \Gamma_{n+l}(x_\alpha))_\Delta$  — *вектор значений  $l$  целевых переменных*, образующих *матрицу информации*  $\mathbf{M}_I = (m_\alpha)$ ,  $m_\alpha \in I_i$ , и *информационную матрицу*  $\mathbf{M}_F = (t_\alpha)$ ,  $t_\alpha \in I_f$ , соответственно. Функции  $D$  соответствует функция  $\varphi : 2^S \rightarrow 2^{J_{ob}}$ ,  $\varphi(\mathbf{X}) = \{D(x_\alpha) | x_\alpha \in \mathbf{X}\}$ , формирующая множество прецедентов  $\mathbf{Q} = \{q_i | q_i = (m_i, t_i)\} \subseteq I_i \times I_f$ ,  $q_i[k] \in I_k$ ,  $i = 1, \dots, |\mathbf{X}|$ ,  $\mathbf{Q} = \varphi(\mathbf{X})$  [4]. Для  $\Gamma_k$  определена функция полного прообраза значения  $\lambda_{k_b} \in I_k$  в множестве  $\mathbf{X}$ ,  $\Gamma_k^{-1}(\lambda_{k_b}) \subseteq \mathbf{X}$ , а для функции  $D$  — функция полного прообраза объекта,  $D^{-1}(q) = \bigcap_{k=1, n} \Gamma_k^{-1}(q[k])$ .

**Определение 1.** *Регулярным будем называть множество прецедентов  $\mathbf{Q}$ , для которого выполнено  $\forall (q_1, q_2) : D^{-1}(q_1) \neq D^{-1}(q_2)$ . Если множества  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Q}$  изоморфны, так что  $\forall x \in \mathbf{X} : x = D^{-1}(D(x))$ , то  $\mathbf{X}$  также регулярно [4]. В дальнейшем рассматриваются только регулярные множества  $\mathbf{X}/\mathbf{Q}$ .*

В подавляющем большинстве реальных задач множества  $I_k$  выбираются произвольно. Для получения более информативных «синтетических признаковых описаний» [4] множество  $\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \{\Gamma_k^{-1}(\lambda_{k_b})\}$  рассматривается как предбаза *топологии*  $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \{\emptyset, I, a \cup b, a \cap b : a, b \in \mathbf{U}(\mathbf{X})\}$ , где  $I = \{\mathbf{X}\}$  — единичный элемент. Введение отношения порядка на элементах  $\mathbf{T}(\mathbf{X})$  позволяет частично упорядочить элементы топологии  $\mathbf{T}(\mathbf{X})$  в *решетку*  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X})) = \{a \vee b, a \wedge b : a, b \in \mathbf{T}(\mathbf{X}), (a \geq b) \text{ или } (a \leq b)\}$  так, что  $a \leq b \equiv a \subseteq b$  и  $a \vee b = \sup(a, b)$  — объединение,  $a \wedge b = \inf(a, b)$  — пересечение множеств  $a$  и  $b$ . Показано, что при регулярности  $\mathbf{X}/\mathbf{Q}$  (определение 1) решетка  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$  — булева и элементы  $\mathbf{U}(\mathbf{X})$  являются вершинами  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$  [4]. При этом возникают три фундаментальные разновидности признаков: *булевы* (вершина решетки  $\Gamma_k^{-1}(1)$ ), *категорные* (антицепи решетки) и *числовые* (цепи решетки) [4].

Таким образом,  $k$ -я числовая величина, заданная на  $\mathbf{Q}$  посредством  $I_k$ , соответствует некоторой цепи  $A_k(\mathbf{X})$  в  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$ , образованной множествами  $u(\lambda_{k_b}) = \bigcup_{\beta=1}^b \Gamma_k^{-1}(\lambda_{k_\beta})$ ,  $\lambda_{k_{b-1}} \leq \lambda_{k_b} \leq \lambda_{k_{b+1}}$ . Каждому значению  $\lambda_{k_b}$  соответствует множество объектов  $u(\lambda_{k_b})$  и единственное дополнение  $\neg u(\lambda_{k_b})$



(так как решетка булева). Совокупность точек  $\text{cdf}(A_k(\mathbf{X})) = \{(\lambda_{k_b}, |u(\lambda_{k_b})|/N)\}$  представляет эмпирическую функцию распределения (э.ф.р.)  $k$ -й переменной.

#### 4 Порождение «синтетических» числовых признаков

Булевой решетке  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$  сопоставляется метрическое пространство значений признаков  $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X})), \rho_{\mathbf{L}})$  с метрикой  $\rho_{\mathbf{L}} : \mathbf{L}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$ . Над  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$  также определяется метрическое пространство объектов  $\mathbf{M}_q[\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))](\mathbf{Q}, \rho_q)$  с метрикой  $\rho_q : \mathbf{Q}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$ . Для определения метрик  $\rho_{\mathbf{L}}$  и  $\rho_q$  вводятся понятия *изотонной оценки* на решетке и *окрестности* элемента в топологии [4].

**Определение 2.** Оценка на решетке  $\mathbf{L}$  есть такая функция  $v : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{R}^+$ , что  $\forall a, b : v[a] + v[b] = v[a \wedge b] + v[a \vee b]$ . Оценка изотонна, если  $\forall a, b : a \subseteq \subseteq b \Rightarrow v[a] \geq v[b]$  (например, высота элемента  $h[x]$ ). Функция  $\rho(x, y) = v[x \vee y] - v[x \wedge y]$ , где  $v$  изотонна, является метрикой типа  $\rho_{\mathbf{L}}$  [4].

**Определение 3.** Окрестность  $u(x)$  точки  $x \in \mathbf{X}$  в топологии  $\mathbf{T}(\mathbf{X})$  есть произвольное  $u \in \mathbf{T}(\mathbf{X})$ ,  $x \in u$ ;  $u(x)$  разделяет  $x, y \in \mathbf{X}$  при  $(x \in u) \neq (y \in u)$ .

Любой объект  $q \in \mathbf{Q}$  представлен в  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$  как набор окрестностей  $\Gamma_k^{-1}(q[k])$ ,  $k = 1, \dots, n$ , что позволяет определить метрику  $\rho_q(q_1, q_2)$  как функцию  $f_q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ ,  $\rho_q(q_1, q_2) = f_q((\rho_{\mathbf{L}}(\Gamma_k^{-1}(q_1[k]), \Gamma_k^{-1}(q_2[k])))$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Определение 4.** Для аддитивных  $f_q$  расстояние  $\rho_q(q_1, q_2)$  между объектами  $q_1$  и  $q_2$  определяется посредством линейной комбинации  $S(\sum_{k=1, \dots, n} \omega_k s(\rho_{\mathbf{L}}(\Gamma_k^{-1}(q_1[k]), \Gamma_k^{-1}(q_2[k])))$ , где  $S, s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$  — произвольные «сглаживающие» функции, а  $\omega_k$  — вес  $k$ -го признакового описания.

Если  $S = 1$ ,  $s = 1/|\mathbf{Q}|$ ,  $\rho_{\mathbf{L}}(x, y) = (x \neq y)$ , ( $\omega_k = 1$ ), а  $\Gamma_k^{-1}$  и  $\Gamma_k$  определены для  $I_k = [0, 1]$ , то  $\rho_q$  — метрика Хэмминга. При  $S = \sqrt{\cdot}$ ,  $s(x) = x^p$ ,  $\rho_{\mathbf{L}}(x, y) = |x \Delta y|$ ,  $I_k \subset \mathbf{R}$ ,  $\rho_q$  — взвешенная метрика Минковского и т. д. В рамках топологического подхода порождение синтетических признаков осуществляется посредством метрики  $\rho_{\mathbf{L}}$  либо метрики  $\rho_q$  (последнее требует определения  $\rho_{\mathbf{L}}$ ).

#### 5 Синтетические признаки на основании метрики $\rho_{\mathbf{L}}$

**Определение 5.** Расстояние  $\rho_A : \mathbf{A}(\mathbf{X})^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$  между цепями  $a = \langle a_1, \dots, a_i, \dots, \mathbf{I} \rangle$  и  $b = \langle b_1, \dots, b_j, \dots, \mathbf{I} \rangle$

есть сумма расстояний между соответствующими элементами:

$$\rho_A(a, b) = \min \left( \sum_{i=1, |a|} \rho_{\mathbf{L}} \left( a_i, \arg \min_{b_j \in b} \rho_{\mathbf{L}}(a_i, b_j) \right), \sum_{i=1, |b|} \rho_{\mathbf{L}} \left( b_j, \arg \min_{a_i \in a} \rho_{\mathbf{L}}(b_j, a_i) \right) \right).$$

Пусть  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  — множество всех цепей  $\mathbf{L}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$ . Алгоритмы прогнозирования  $k$ -й переменной соответствуют цепям в  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ , наиболее близким к цепи  $\mathbf{A}_k(\mathbf{X})$ . Пусть  $\mathbf{A}(\mathbf{X})_{1, n} \subset \mathbf{A}(\mathbf{X})$  соответствует цепям над элементами  $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда искомые алгоритмы соответствуют решению задачи

$$aa = \arg \min_{a \in \mathbf{A}(\mathbf{X})_{i, n}} \rho_A(A_k(\mathbf{X}), a). \quad (1)$$

#### 6 Синтетические признаки на основании метрики $\rho_q$

В рамках данного подхода согласовываются значения настраиваемой «признаковой» метрики  $\rho_q$  с вектором весов  $(\omega_k)$

$$\arg \min_{\{\omega_k\}} \sum_{m=1}^{|\mathbf{X}|} \sum_{j \neq m}^{|\mathbf{X}|} \mathbf{L}_F(\rho_q((\omega_k), X_m, X_j) - \rho_e(X_m, X_j)), \quad (2)$$

где  $\mathbf{L}_F$  — та или иная функция потерь. Например, в настоящей работе в качестве  $\mathbf{L}_F$  используется функция модуля  $\mathbf{L}_F(x) = |x|$ . Практически важным случаем экспертной метрики  $\rho_e$  является «скалярная» метрика (например, модуль разности значений).

**Теорема 1.** При использовании скалярной метрики  $\rho_e$  условие (1) для метрики Хэмминга  $\rho_q$  соответствует аддитивной схеме учета признаков.

**Доказательство.** Для  $\rho_e$  в виде модуля разности выполнены все три аксиомы метрики (так как они выполнены для любых трех коллинеарных точек). Пусть нулевой элемент входит во все множества  $I_k$ , так что можно определить расстояние от нулевого элемента до любого другого элемента множества  $I_k$  посредством экспертной метрики  $\rho_e$ . В  $\rho$ -конфигурации объектов, образованной метрикой  $\rho_q$ , за нулевую точку с номером  $m_0$  можно, вообще говоря, принять любой объект (например, центральный объект, соответствующий минимальной сумме расстояний до всех остальных). Пусть в  $m$ -сумме в выражении (2) одна из  $j$ -сумм соответствует нулевому элементу  $\mathbf{X}_{m_0}$ .

Использование скалярной метрики  $\rho_e$  в условии (2) соответствует проекции  $|\mathbf{X}|$ -мерной  $\rho_q$ -конфигурации на одномерную числовую ось значений  $I_k$ . Любая из  $j$ -сумм в (1) включает все объекты из  $\mathbf{X}$  и покрывает все множество значений  $I_k$ . Разница между любыми двумя значениями из  $I_k$  (т.е.  $\rho_e(\mathbf{X}_m, \mathbf{X}_j)$ ) также является отрезком на числовой оси  $k$ -й переменной, соответствующим сдвигу значений в множестве  $I_k$  на константу  $\lambda_{k\beta}$ .

Так как каждая из  $j$ -сумм в (2) соответствует одной и той же (с точностью до константы) задаче согласования метрик, то задача (2) с  $\mathbf{L}_F(x) = |x|$  может быть переформулирована через расстояния от нулевого элемента, т.е. произведен переход от оценки попарных расстояний к суммированию по всем объектам:

$$\arg \min_{\{\omega_k\}} \sum_{m \neq m_0}^{|\mathbf{X}|} |\rho_q(\{\omega_k\}, \mathbf{X}_{m_0}, \mathbf{X}_m) - \mathbf{T}_m|, \quad (3)$$

где  $\mathbf{T}_m = \rho_e(\mathbf{X}_{m_0}, \mathbf{X}_m)$  — значение прогнозируемой  $k$ -й числовой переменной для объекта  $\mathbf{X}_m$  (так как, по построению, точка  $\mathbf{X}_{m_0}$  соответствует нулевому значению). Если  $\rho_q$  определена как метрика Хэмминга (см. комментарий к определению 4), то задача в постановке (3) соответствует представлению  $\rho_q$  в виде линейной формы, т.е. аддитивной схеме учета признаков. Теорема доказана.

Таким образом, в случае скалярных  $\rho_e$  расстояния  $\rho_q$  служат своего рода «синтетическими» числовыми признаками объектов в множествах  $\mathbf{X}/\mathbf{Q}$ . Для практического применения (2) необходимо определить функции  $\Gamma_k$ , а для определения метрических пространств  $\mathbf{M}_L$  и  $\mathbf{M}_q$  — метрики  $\rho_L$  и  $\rho_q$ . В случае задач типа «структура—свойство» молекул для этого применяется теория хемографов.

## 7 О теории анализа размеченных графов

Для порождения признаков описаний молекулярных структур в рамках теории анализа размеченных графов вводится понятие хемографа [8]. Признаковые описания порождаются над разметками хемографов [9].

**Определение 6.** Граф  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  — совокупность множества вершин  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(G)$  и множества ребер  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(G)$ ,  $\mathbf{E} \subset \mathbf{V}^2$ . Хемограф ( $\chi$ -граф) — конечный, связный, неориентированный, размеченный граф без петель, с кликовым числом не более 3. Множество  $\Gamma = \{(\mathbf{V}, \mathbf{E}) | \mathbf{V} \subset \mathbf{N}, \mathbf{E} \subset \mathbf{N}^2\}$ , где  $\mathbf{N}$  — натуральный ряд, есть множество всех графов.

Множество вершин  $\chi$ -графа  $\mathbf{X}$  соответствует множеству атомов молекулы, а множество ребер —

множеству химических связей молекулы. Хемографы строятся на основе «внешних» (декартовых) координат ядер атомов  $\mathbf{R}(X) = \{\vec{R}_i(X) | \vec{R}_i \in \mathbf{R}^3\}$ ,  $i = 1, \dots, |\mathbf{V}(X)|$ , или «внутренних» координат (межатомные расстояния), так что  $\chi$ -графу  $X$  сопоставлен ряд матриц  $\mathbf{M}(X) = (m_{ij}(X))$ ,  $m_{ij} \in \mathbf{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, |\mathbf{V}(X)|$  (матрица межатомных расстояний, матрица смежности и др.). Химические формулы в различных «машинных» форматах (SMILES, XYZ и др.) суть упрощенные представления матриц  $\mathbf{M}(X)$  или координат  $\mathbf{R}(X)$ .

Признаковые описания  $\chi$ -графов вводятся на основании анализа специальной разновидности подграфов  $\chi$ -графов — цепей и узлов, для описания которых в работах [8, 9] вводится комплекс понятий и соответствующих обозначений: множество всех замкнутых подграфов  $\chi$ -графа  $X$ ,  $\Pi(X)$  (включает множество связных подграфов  $\mathbf{S}(X)$ , множество цепей  $\mathbf{C}(X)$ , множество  $\chi$ -узлов  $\mathbf{K}(X)$ ), операции объединения/пересечения множества подграфов ( $\Pi = \bigcup_{i=1}^{|\Pi|} \pi_i = (\bigcup_{i=1}^{|\Pi|} \mathbf{v}_i, \bigcup_{i=1}^{|\Pi|} \mathbf{e}_i)$ ;  $\widehat{\Pi} = \bigcap_{i=1}^{|\Pi|} \pi_i$ ), условие образования графа  $\widehat{O} = X$  множеством  $\mathbf{O} \subseteq \subseteq \Pi(X)$ , оператор  $\hat{c}^n$  вычисления цепей длины  $n$ , множество смежности (окружение) вершины  $v$ :  $\Gamma(v) = \hat{v} \hat{e} v$ , узел вершины  $v$ ,  $(\Gamma(v), \hat{e} v)$  и др. [8]. Такие подграфы необходимы для исследования изоморфизма  $\chi$ -графов.

**Определение 7.** Графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны ( $G_1 \simeq G_2$ ) если существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами и ребрами. Изоморфизм  $G_1 \simeq G_2$  соответствует существованию функции перенумерации  $\mu_I : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ , так что из  $G_2 = \mu_I(G_1)$  следует  $G_1 \simeq G_2$ . Определяется класс  $\mathbf{I}(G) = \{g \in \Gamma | \exists \mu_I : G = \mu_I(g)\}$ .

**Определение 8.** Пусть задан алфавит меток  $\mathbf{Y} = \{v_1, v_2, \dots, v_n(\mathbf{Y})\}$ . Функция разметки  $\mu_Y : \mathbf{V} \rightarrow \rightarrow \mathbf{Y}$  сопоставляет метку каждой вершине  $\chi$ -графа.

Для комбинаторного анализа свойств изоморфизма графов и для порождения признаков описаний  $\chi$ -графов в теории анализа размеченных графов вводятся множество  $\chi$ -цепей  $\hat{\mathbf{Y}}$  над алфавитом  $\mathbf{Y}$  (в том числе подмножества всех  $\chi$ -цепей длины  $n$ ,  $\hat{\mathbf{Y}}^n \subset \hat{\mathbf{Y}}$ ), множество  $\chi$ -узлов  $\hat{\mathbf{Y}} = \bigcup_{k=2} \hat{\mathbf{Y}}(k)$ ,  $\hat{\mathbf{Y}}(k) = \{\mathbf{Y} \times 2^{\mathbf{Y}^k}\}$ , понятия инварианта графа ( $\iota : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N} : \forall a \in \Gamma : b \in \mathbf{I}(a) \Rightarrow \iota(b) = \iota(a)$ ), кортеж-инварианта  $\iota : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n, n \geq 2$ , полноты инварианта  $\forall a \in \Gamma : b \in \mathbf{I}(G) \Leftrightarrow \iota(a) = \iota(b)$ , изомерных по инварианту  $\iota$  графов, функции разметки  $\chi$ -цепей  $\mu_c : \mathbf{C} \rightarrow \hat{\mathbf{Y}}$  и  $\chi$ -узлов  $\mu_\kappa : \mathbf{K} \rightarrow \hat{\mathbf{Y}}$ ,  $\chi$ -фрагментов как элементов множеств  $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$  и  $\hat{\mu}_\kappa^{-1}\kappa$ , оператора вхождения множества подграфов  $\pi \subset \Gamma$  в  $\chi$ -граф  $\mathbf{X}$   $\hat{\beta}[\mathbf{X}] : 2^\Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ , опе-

ратора числа вхождений множества подграфов в  $\mathbf{X}$   $\hat{\eta}[\mathbf{X}] : 2^\Gamma \rightarrow \mathbf{N}$  и др. [9].

Эти понятия позволяют проводить комбинаторный анализ изоморфизма  $\chi$ -графов и порождать признаковые описания  $\chi$ -графов как  $\hat{\eta}[\mathbf{X}]\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$ ,  $\hat{\eta}[\mathbf{X}]\hat{\mu}_c^{-1}\kappa$ ,  $\hat{\beta}[\mathbf{X}]\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$ ,  $\hat{\beta}[\mathbf{X}]\hat{\mu}_c^{-1}\kappa$  (лемма 1 в работе [7]). Результат последовательного применения  $\hat{\mu}_c^{-1}$  к  $\alpha = \{\alpha \in \tilde{\mathbf{Y}}\}$  обозначим  $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha = \{\hat{\mu}_c^{-1}\alpha, \alpha \in \alpha\}$ , оператора  $\hat{\mu}_c^{-1}$  ко множеству  $\chi$ -узлов  $\kappa = \{\kappa \in \tilde{\mathbf{Y}}\} - \hat{\mu}_c^{-1}\kappa = \{\hat{\mu}_c^{-1}\kappa, \kappa \in \kappa\}$ , оператора  $\hat{\beta}$  ко множеству  $\tilde{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ ,  $\tilde{\pi} \subset \Gamma$  обозначим  $\hat{\beta}\tilde{\pi} = \{\hat{\beta}\pi_1, \hat{\beta}\pi_2, \dots, \hat{\beta}\pi_n\}$ .

Комбинаторный анализ разрешимости задачи анализа изоморфизма  $\chi$ -графов сводится к установлению локальной полноты некоторых кортеж-инвариантов [9]. Пусть  $\iota : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , — кортеж-инвариант, построенный над некоторым множеством из  $n$  элементарных инвариантов  $\iota_e \subset \mathbf{E}$ . Пусть для графа  $G$  выражение  $\iota_i(G) = \{\iota_i(G), i = 1, \dots, n\}$  будет означать множество значений инвариантов из  $\iota_e$ . Определим функцию нумерации элементарных инвариантов  $\lambda : \iota_e \rightarrow \mathbf{N}$  и оператор формирования кортеж-инварианта. Оператор формирования кортеж-инварианта  $\hat{\iota} : 2^{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{R}^n$  по заданному  $\iota_e$  определим как  $\hat{\iota}\iota_e = (\iota_j, \iota_k, \dots, \iota_l)$ ,  $\iota_j, \iota_k, \dots, \iota_l \in \iota_e$ ,  $\lambda(\iota_j) = 1 \leq \lambda(\iota_k) < \dots < \lambda(\iota_l) = n$ , а значение  $i$ -го элемента кортежа  $\hat{\iota}\iota_e$  обозначим  $\hat{\iota}[i]\iota_e(G) = \iota(G)|\lambda(\iota) = i$ . В теореме 2 показана взаимосвязь между изоморфизмом  $\chi$ -графов и полнотой кортеж-инвариантов.

**Теорема 2.**  $\forall a, b \in \Gamma : |\mathbf{I}(a) \cap \mathbf{I}(b)| > 0 \Leftrightarrow \exists_{i=1, n} i : \hat{\iota}[i]\iota_e(a) \neq \hat{\iota}[i]\iota_e(b)$ , так что  $\hat{\iota}\iota_e$  — полный кортеж-инвариант.

Доказательство приведено в работе [7]. Следствия теоремы важны для анализа множества прецедентов Pr.

**Следствие 1.** Полные инварианты могут быть образованы над подмножествами множеств  $\tilde{\mathbf{Y}}$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , если для каждого  $\chi$ -графа  $\mathbf{X}$  множества прецедентов Pr существуют  $\kappa'(\mathbf{X}) = \{\kappa \in \kappa | \hat{\eta}[\mathbf{X}]\hat{\mu}_c^{-1}\kappa = 1\}$  и  $\alpha'(\mathbf{X}) = \{\alpha \in \alpha' | \hat{\eta}[\mathbf{X}]\hat{\mu}_c^{-1}\alpha = 1\}$  такие, что при  $\pi'(\mathbf{X}) = \hat{\mu}_c^{-1}\kappa'(\mathbf{X}) \cup \hat{\mu}_c^{-1}\alpha'(\mathbf{X}) \tilde{\pi}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ .

**Следствие 2.** Пусть в конечном Pr  $\subset \Gamma$  каждый граф  $G$  помечен меткой изоморфности  $\text{iso}(G) : \mathbf{I}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{N}$ . Разрешимость

$$\forall_{a, b \in \text{Pr}} \text{iso}(a) \neq \text{iso}(b) \Rightarrow \iota(a) \neq \iota(b)$$

эквивалентна полноте

$$\forall_{a, b \in \text{Pr}} \text{iso}(a) \neq \text{iso}(b) \Rightarrow \exists_{i=1, |\mathbf{X}|} i : \hat{\iota}[i]\chi(a) \neq \hat{\iota}[i]\chi(b).$$

**Следствие 3.** Задача распознавания изоморфных графов разрешима тогда и только тогда, когда

$\sum_{a \in \text{Pr}} |\mathbf{i}\mu(a, \iota, \text{Pr}) \setminus \mathbf{i}(a, \text{Pr})| = 0$ , где  $\mathbf{i}\mu(G, \iota, \text{Pr})$  — множество изомерных  $G$  графов;  $\mathbf{i}(G, \text{Pr})$  — множество изоморфных  $G$  графов.

**Следствие 4.** Инвариант  $\iota$  полон при  $r_\iota(\iota, \text{Pr}) = 1 - (1/|\text{Pr}|^2) \sum_{a \in \text{Pr}} |\mathbf{i}\mu(a, \iota, \text{Pr}) \setminus \mathbf{i}(a, \text{Pr})| = 1$ .

**Следствие 5.** Пусть  $\phi(\hat{\iota}\chi, i, \text{Pr}) = \{(a, b) | a, b \in \text{Pr}, \hat{\iota}[i]\chi(a) \neq \hat{\iota}[i]\chi(b)\}$  и  $\phi(\hat{\iota}\chi, i, \text{Pr}) \cap \phi(\hat{\iota}\chi, j, \text{Pr}) = \emptyset$ . Тогда  $r_\iota(\iota, \text{Pr}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{X}|} \varphi_\iota(\hat{\iota}\chi, i, \text{Pr})$ , где  $\varphi_\iota(\hat{\iota}\chi, i, \text{Pr}) = |\phi(\hat{\iota}\chi, i, \text{Pr})| / |\text{Pr}|^2$ .

## 8 Топологическая теория анализа $\chi$ -графов

На основании алфавита  $\mathbf{Y}$  строятся различные множества  $\chi$ -цепей длины  $m$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}^m$ ,  $m = 1, \dots, m_{\max}$ , множество всех  $\chi$ -узлов  $\hat{\mathbf{Y}}$  и затем соответствующие элементарные  $\chi$ - и кортеж-инварианты. Для  $\chi$ -графа  $X \in \mathbf{X}$  вычисляются множество всех  $\chi$ -цепей  $X$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}(X)$ , и множество всех  $\chi$ -узлов  $X$ ,  $\hat{\mathbf{Y}}(X)$ . Для любых  $\alpha \in \tilde{\mathbf{Y}}(X)$ ,  $\kappa \in \hat{\mathbf{Y}}(X)$  пусть  $\hat{\beta}[X]\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$ ,  $\hat{\beta}[X]\hat{\mu}_c^{-1}\kappa$  — булевы инварианты. Тогда для выбранных  $\alpha \subseteq \tilde{\mathbf{Y}}$  и  $\kappa \subseteq \hat{\mathbf{Y}}$  таких, что  $|\alpha| + |\kappa| = n$ , вычисляются множества  $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$  и  $\hat{\mu}_c^{-1}\kappa$ . Если множества  $\mathbf{I}_k$  определены как  $[0, 1]$ , то множество элементарных инвариантов  $\iota_e = \hat{\beta}\hat{\mu}_c^{-1}\alpha \cup \hat{\beta}\hat{\mu}_c^{-1}\kappa$ , а если  $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{N}$ , то  $\iota_e = \hat{\eta}\hat{\mu}_c^{-1}\alpha \cup \hat{\eta}\hat{\mu}_c^{-1}\kappa$ . Определив функцию нумерации инвариантов  $\lambda : \iota_e \rightarrow \mathbf{N}$ , определяем функцию  $\Gamma_k$  как  $\Gamma_k(X) = \hat{\iota}[k]\iota_e(X)$ , а функцию  $D$  — как  $D(X) = \hat{\iota}\iota_e(X)$ .

Таким образом, предбаза  $\mathbf{U}(\mathbf{X})$  топологии  $\mathbf{T}(\mathbf{X})$  состоит из подмножеств  $\chi$ -графов, соответствующих  $\chi$ -цепям или  $\chi$ -узлам. Для  $D(\mathbf{X}) = \hat{\iota}\iota_e(\mathbf{X})$  задача (2) реализуется как хемометрический анализ [7]:

$$\arg \min_{\{\omega_k\}} \sum_{m_0=1}^{|\mathbf{X}|} \sum_{m \neq m_0}^{|\mathbf{X}|} \left| \sum_{k=1}^n \omega_k \hat{\iota}[k] \hat{\beta}[X_{m_0}] \pi \oplus \hat{\iota}[k] \hat{\beta}[X_m] \pi - |T_m - T_{m_0}| \right|,$$

где  $\pi \subseteq \hat{\mu}_c^{-1}\alpha \cup \hat{\mu}_c^{-1}\kappa$  — некоторое «опорное» множество подграфов;  $T_m$  — оцениваемое свойство  $m$ -й молекулы, а выражение под знаком суммы по  $k$  соответствует  $\rho_q$ -метрике Хэмминга. Применяя теорему 1 и «сглаживающую» функцию  $S : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$  (определение 4), получаем:

$$\arg \min_{\{\omega_k\}} \sum_{m=1}^{|\mathbf{X}|} \left| S \left( \sum_{k=1}^n \omega_k s \left( \hat{\iota}[k] \hat{\beta}[X_m] \pi \right) \right) - T_m \right|.$$

## 9 Заключение

Для построения проблемно ориентированных метрик и алгоритмов прогнозирования КМ свойств

молекул по их химической структуре разработанные признаковые описания хемографов анализируются посредством теории топологического анализа данных. В результате анализа топологии  $T(X)$  и решетки  $L(T(X))$  с использованием условий (1) и (2) могут быть получены различные алгоритмы прогнозирования произвольной числовой переменной на основе структуры хемографов. Эти алгоритмы одновременно являются алгоритмами порождения «синтетических» числовых признаков, информативных относительно этой переменной. Такие «синтетические» признаки могут использоваться в алгоритмических конструкциях алгебраического подхода и в обычных методах машинного обучения (регрессия, нейронные сети, метрические методы и др.). Сопоставление полученных моделей алгоритмов с формализмом квантовой механики, равно как и экспериментальная апробация соответствующих алгоритмов, будут представлены во второй части статьи.

## Литература

1. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики, 1978. № 33. С. 5–68.
2. Рудаков К. В., Торшин И. Ю. Вопросы разрешимости задачи распознавания вторичной структуры белка // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 2. С. 25–35.
3. Рудаков К. В., Торшин И. Ю. Анализ информативности мотивов на основе критерия разрешимости задачи распознавания вторичной структуры белка // Информатика и её применения, 2011. Т. 5. Вып. 4. С. 40–50.
4. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification // Pattern Recognition Image Analysis, 2015. Vol. 25. No. 4. P. 577–587.
5. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Combinatorial analysis of the solvability properties of the problems of recognition and completeness of algorithmic models. Part 2: Metric approach within the framework of the theory of classification of feature values // Pattern Recognition Image Analysis, 2017. Vol. 27. No. 2. P. 184–199.
6. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. On the procedures of generation of numerical features over partitions of sets of objects in the problem of predicting numerical target variables // Pattern Recognition Image Analysis, 2019. Vol. 29. No. 4. P. 654–667. doi: 10.1134/S1054661819040175.
7. Ruddigkeit L., van Deursen R., Blum L., Reymond J. Enumeration of 166 billion organic small molecules in the chemical universe database GDB-17 // J. Chem. Inf. Model., 2012. Vol. 52. No. 11. P. 2864–2875. doi: 10.1021/ci300415d.
8. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 1: Fundamentals of modern chemical bonding theory and the concept of the chemograph // Pattern Recognition Image Analysis, 2014. Vol. 24. No. 1. P. 11–23.
9. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 2: Local completeness of invariants of chemographs in view of the combinatorial theory of solvability // Pattern Recognition Image Analysis, 2014. Vol. 24. No. 2. P. 196–208.
10. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Topological data analysis in materials science: The case of high-temperature cuprate superconductors // Pattern Recognition Image Analysis, 2020. Vol. 30. No. 2. P. 262–274. doi: 10.1134/S1054661820020157.

Поступила в редакцию 30.03.21

# ON THE APPLICATION OF A TOPOLOGICAL APPROACH TO ANALYSIS OF POORLY FORMALIZED PROBLEMS FOR CONSTRUCTING ALGORITHMS FOR VIRTUAL SCREENING OF QUANTUM-MECHANICAL PROPERTIES OF ORGANIC MOLECULES I: THE BASICS OF THE PROBLEM-ORIENTED THEORY

I. Yu. Torshin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The topological approach to the analysis of poorly formalized problems and the theory of chemographs are extensions of Zhuravlev’s algebraic approach to recognition. In the first part of the article, a problem-oriented formalism is proposed aimed at development of algorithms for screening assessments of the quantum-mechanical

properties of molecules on the basis of their chemical structure. Methods for introducing metrics on sets of molecules and procedures for generating “synthetic” feature descriptions are proposed. The latter are generated by matching the values of some “expert” metric on the set of molecular properties to a tunable metric on the set of molecular structures.

**Keywords:** algebraic approach; chemoinformatics; labeled graphs; combinatorial solvability analysis

**DOI:** 10.14357/19922264220106

## Acknowledgments

This work was supported in part by RFBR grants 19-07-00356, 18-07-00944, 20-07-00537.

## References

- Zhuravlev, Yu. I. 1978. Ob algebraicheskom podkhode k resheniyu zadach raspoznavaniya ili klassifikatsii [On algebraic approach to recognition and classification problems]. *Problemy kibernetiki* [Cybernetic Problems] 33:5–68.
- Rudakov, K. V., and I. Yu. Torshin. 2010. Voprosy razreshimosti zadachi raspoznavaniya vtorichnoy struktury belka [Questions of solvability of the problem of recognition of the secondary structure of a protein]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform Appl.* 4(2):25–35.
- Rudakov, K. V., and I. Yu. Torshin. 2011. Analiz informativnosti motivov na osnove kriteriya razreshimosti v zadache raspoznavaniya vtorichnoy struktury belka [Analysis of the informativeness of motives based on the criterion of solvability in the problem of recognizing the secondary structure of a protein]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform Appl.* 5(4):40–50.
- Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2015. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification. *Pattern Recognition Image Analysis* 25(4):577–587.
- Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2017. Combinatorial analysis of the solvability properties of the problems of recognition and completeness of algorithmic models. Part 2: Metric approach within the framework of the theory of classification of feature values. *Pattern Recognition Image Analysis* 27(2):184–199.
- Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2019. On the procedures of generation of numerical features over partitions of sets of objects in the problem of predicting numerical target variables. *Pattern Recognition Image Analysis* 29(4):654–667. doi: 10.1134/S1054661819040175.
- Ruddigkeit, L., R. van Deursen, L. Blum, and J. Raymond. 2012. Enumeration of 166 billion organic small molecules in the chemical universe database GDB-17. *J. Chem. Inf. Model.* 52(11):2864–2875. doi: 10.1021/ci300415d.
- Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2014. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 1: Fundamentals of modern chemical bonding theory and the concept of the chemograph. *Pattern Recognition Image Analysis* 24(1):11–23.
- Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2014. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 2: Local completeness of invariants of chemographs in view of the combinatorial theory of solvability. *Pattern Recognition Image Analysis* 24(2):196–208.
- Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2020. Topological data analysis in materials science: The case of high-temperature cuprate superconductors. *Pattern Recognition Image Analysis* 30(2):262–274. doi: 10.1134/S1054661820020157.

Received March 30, 2021

## Contributor

**Torshin Ivan Yu.** (b. 1972) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, Candidate of Science (PhD) in chemistry, senior scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; tiy135@yahoo.com

# ПЕРСОНАЛЬНЫЙ КОГНИТИВНЫЙ АССИСТЕНТ: ПЛАНИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НА ОСНОВЕ СЦЕНАРИЕВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ\*

И. В. Смирнов<sup>1</sup>, А. И. Панов<sup>2</sup>, А. А. Чуганская<sup>3</sup>, М. И. Суворова<sup>4</sup>, Г. А. Киселёв<sup>5</sup>,  
И. А. Курузов<sup>6</sup>, О. Г. Григорьев<sup>7</sup>

**Аннотация:** Представлены процедуры планирования поведения когнитивного ассистента (КА) на основе сценариев — обобщенных схем решения задач. Когнитивный ассистент является виртуальным интеллектуальным агентом, обладающим своей собственной картиной мира и строящим картину мира пользователя, которому он помогает решать различные повседневные или профессиональные задачи. Ключевой компонентой целенаправленного поведения КА являются сценарии — неоднократно используемые абстрактные последовательности действий и ситуаций, на основе которых ассистент порождает конкретный план действий для пользователя. Рассмотрено понятие сценария в психологической и лингвистической интерпретации, рассмотрена возможность извлечения сценариев из текстов, выполнена формализация сценария и плана поведения на основе знакового подхода к представлению знаний, предложены методы синтеза плана поведения. Рассмотрен модельный пример синтеза плана поведения для задачи ассистирования при покупке автомобиля.

**Ключевые слова:** когнитивный ассистент; сценарий деятельности; планирование поведения

**DOI:** 10.14357/19922264220107

## 1 Введение

Настоящая работа развивает концепцию персонального КА, представленную в статье [1]. Когнитивный ассистент является виртуальным интеллектуальным агентом, обладающим знаковой картиной мира и действующим на основе построения плана действий и сценария поведения пользователя, которому он помогает решать повседневные или профессиональные задачи. Когнитивный ассистент действует проактивно, предсказывая поведение пользователя, обладает целеполаганием и инструментами мотивационного характера, обеспечивающими достижение поставленных перед ним целей.

Ключевой компонентой целенаправленного поведения КА выступают сценарии — неоднократно используемые абстрактные последовательности действий и ситуаций [2, 3], стереотипные последовательности поведения в определенных обстоя-

тельствах. Они выступают обобщенными схемами решения задач, на основе которых ассистирующая система может предлагать конкретный план для пользователя. Знания о возможной последовательности действий для достижения цели и способность формировать из них конкретный план (алгоритм) для пользователя отличает КА от существующих аналогов, которые, как правило, выполняют только функцию голосового интерфейса к различным сервисам. Рассмотрим далее концепцию сценариев деятельности и способы порождения из них планов поведения применительно к КА.

## 2 Сценарий и план поведения

### 2.1 Психологические основы концепций сценария и плана поведения

В психологических исследованиях понятие «сценария» поведения возникло для объяснения со-

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-29-22027).

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Российский университет дружбы народов, ivs@isa.ru

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), pan@isa.ru

<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, anfisa.makh@gmail.com

<sup>4</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, suvorova@isa.ru

<sup>5</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Российский университет дружбы народов, kiselev@isa.ru

<sup>6</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), kuruzov2014@mail.ru

<sup>7</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, oleggpolikvart@yandex.ru

циально обусловленных нормативно-ролевых последовательностей действий в рамках определенной деятельности. Первоначально термин был предложен Э. Берном. Американский психолог обозначил транзакцией единицу общения между людьми, когда коммуникативный стимул вызывает соответствующую реакцию [4]. Такие взаимосвязанные последовательности образуют ритуальные, т. е. социально обоснованные повторяющиеся действия. «Существенной особенностью и процедур, и ритуалов мы считаем то, что они стереотипны» [4, с. 14]. Для построения ритуала-сценария значима принципиальная предсказуемость, когда появление одной транзакции с большой вероятностью определяет появление другой. Берн назвал такую форму взаимоотношений людей играми, а набор игр — жизненными сценариями, которые формируются у детей и определяют дальнейшие стратегии их поведения.

В близкой Э. Берну методологической парадигме бихевиоризма развивались идеи когнитивных исследований. Росс и Нисбетт отмечают: «В основе концепции сценариев лежит представление о том, что люди вступают в предсказуемые, едва ли не ритуальные взаимодействия в попытке удовлетворить свои потребности ценою насколько возможно малого социального напряжения и когнитивных усилий» [5, с. 145]. В таком рассмотрении сценария обозначается еще одна его значимая функция — экономия когнитивных ресурсов, что позволяет повышать адаптивные возможности психики.

Принципиально иначе выглядит деятельностный подход к поведению. В концепции А. Н. Леонтьева [6] ключевым становится анализ деятельности и предпосылок ее возникновения. В таком же методологическом ключе рассуждал Д. Н. Узнадзе, утверждая, что поведение невозможно понять без мотива, соотношения с объективной ситуацией и «нужностью» предмета потребности. Все эти функции объединяет установка, которая и определяет путь к реализации цели. В содержательном плане это дает начальную точку для реализации сценария и построения плана. Узнадзе разделяет установки на два типа: индивидуальные и «опосредованные чужой объективацией» [7, с. 47]. Если первый возникает в ходе собственной деятельности человека и, как правило, направлен на область предметных взаимодействий или характерен для ситуаций затруднения (встреча с новыми явлениями для субъекта), то второй тип установок социально обусловлен. Этот второй тип перешел «в достояние людей в виде *готовых формул*, не требующих более непосредственного участия процессов объективации. Источником, откуда черпаются такого рода формулы, является воспита-

ние и обучение» [8, с. 203]. Таким образом, содержательное разграничение плана и сценария возможно за счет выделения актуально действующей установки деятельности и уровня ее реализации.

В когнитивной науке встречались подходы, которые предлагали фиксировать фреймовую структуру сценариев в виде набора речевых параметров (М. Минский, Ч. Филмор и др.). В этом плане на современном этапе развития общества такими источниками могут выступать сетевые тексты, в которых в словесной форме фиксируется сценарная информация [9]. Индивидуальные сценарии в рамках коммуникации могут переходить в социальные. В рамках индивидуального сценария возможно построение плана, который реализуется в пошаговых действиях для достижения целей различного уровня.

Таким образом, при построении данного исследования будем основываться на следующем определении: «Под сценарием предлагается понимать вербализованное представление знаний об участниках, ключевых признаках, условиях, целях, способах и этапах их достижения как компонентах типичной ситуации взаимодействия субъекта с реальностью» [9, с. 219]. При этом план выступает индивидуализированной формой реализации деятельности, ключевым моментом которой является соответствие достигаемой цели.

## 2.2 Лингвистическое моделирование сценариев и возможности извлечения сценариев из текстов

Современные методы анализа и генерации текста, используемые, к примеру, в чат-ботах, системах поиска и сравнения текстов, достаточно плохо учитывают глобальную структуру текста. Один из распространенных способов заложить в модель информацию о глобальном содержании документа — описание тематики документа с помощью метода «мешок слов» или тематическое моделирование. Но при таком подходе теряется информация о структуре изложения, о взаимосвязях упоминаемых в тексте концептов друг с другом. Методы извлечения сюжетно-композиционного строения текста, к которым относится и сценарный анализ, позволяют преодолеть эту проблему и существенно повысить качество решения многих задач, включая синтез текста и рассуждения по тексту [10]. Сценарный анализ — это один из этапов анализа структуры текста, к результатам которого можно применять правила или другие методы решения конечной задачи.

В настоящей работе предпринята попытка использования сценарного подхода к анализу текстов инструкций. Такие тексты содержат, как правило, прямые наименования основных действий, состояний, признаков ситуации, в которой инструктируемый (коллективный адресат) мыслится автором текста как исполнитель определенной роли [11]. Инструкции характеризуются четкими и недвусмысленными формулировками, наличием эксплицитной мотивирующей составляющей, усиливающей побудительную модальность текста, что важно с точки зрения минимизации поведенческой вариативности [9, 11].

Понимание сценарного подхода авторами статьи близко по смыслу к скриптам Шенка — одному из главных формализмов, описывающих типичную последовательность событий в мире. Однако создание скриптов — трудоемкий процесс, требующий большого ручного труда для описания каждой отдельной предметной области. Подход, предложенный Чемберсом и Журафски [12], не требует никакой разметки текстов, даже указания их тематики. Подход получил название нарративных цепочек событий (NarrativeEventChains). Речь идет о частично упорядоченных наборах событий, относящихся к одному действующему лицу.

Пример нарративной цепочки:

*— обвинил X*  
*X утверждал, что*  
*X заявил, что*  
*— уволил X*

В основе подхода нарративных цепочек лежит кореференция. На первом шаге с помощью дистрибутивных методов определяются нарративные отношения между событиями (извлекаются взаимосвязанные события и их участники), связанными одними кореферентными аргументами. На втором шаге с помощью временного классификатора эти события частично упорядочиваются. На третьем шаге автономные цепочки из пространства событий отсекаются и группируются.

### 3 Синтез плана поведения КОГНИТИВНЫМ АССИСТЕНТОМ

Формализация сценария как элемента картины мира представлена в работе [13]. Алгоритм синтеза плана поведения (АСПП) КА опирается на знаковый подход представления знаний и является одним из применений алгоритма MAP, получившего название на основе обозначений идентификаторов компонент знака ( $M$  — компонента значения;  $A$  — компонента смысла;  $P$  — компонента образа) [14].

Суть применения алгоритма заключается в синтезе плана поведения, регламентирующего целенаправленную деятельность пользователя, в том случае когда деятельность обладает качествами предметности и ситуативности. С помощью АСПП когнитивный ассистент осуществляет синтез рекомендуемых пользователю шагов, предоставляющих возможность достижения желаемой для пользователя ситуации из текущего состояния. Результатом работы алгоритма становится план поведения, который представлен последовательностью кортежей

$$\langle (s_0, a_0, s_1), (s_1, a_1, s_2), \dots, (s_{n-1}, a_{n-1}, s_n) \rangle \quad (1)$$

таких, что  $\{f_a^0\} \subseteq \{f_{s_0}\}$ ,  $\{f_a^{\text{end}}\} \subseteq \{f_{s_n}\}$ , где множества  $\{f_a^0\}$  и  $\{f_a^{\text{end}}\}$  — множества фактов из мира пользователя, формирующие его представление о начальной и конечной ситуации;  $\{f_{s_0}\}$  и  $\{f_{s_n}\}$  — множества фактов в картине мира КА, формирующие необходимые для планировщика системы условия синтеза плана поведения. В формуле (1)  $s_0, \dots, s_n$  — знаки начальной, промежуточных и целевой ситуаций, а  $a_0, \dots, a_n$  — каузальные матрицы на сети смыслов знаков действий, способствующих активации знаков ситуаций плана. Множества  $\{f_{s_0}\}$  и  $\{f_{s_n}\}$  являются дополненными множествами  $\{f_a^0\}$  и  $\{f_a^{\text{end}}\}$ , недостающие факты выбираются из картины мира КА на основе правил формирования ситуации и требуются для создания условий применения планировщика.

Каждое из действий КА является иерархическим и имеет свой операциональный состав, способ извлечения которого опирается на три основные категории:

- (1) в картине мира КА присутствует полное описание требуемого действия и операциональный состав извлекается из образной компоненты знака действия;
- (2) в процессе синтеза сценария помимо основного сценария деятельности может быть получен сценарий выполнения требуемого действия, не входившего ранее в картину мира КА. В этом случае процесс уточнения требует вызова планировщика, которому передается сценарий выполнения для сокращения необходимого КА времени на синтез плана с помощью АСПП;
- (3) отсутствие полного описания действия в картине мира КА требует вызова АСПП для удовлетворения требований по детализации плана. Уровень детализации формируется по требованию пользователя или на основе работы алгоритма рассуждений.



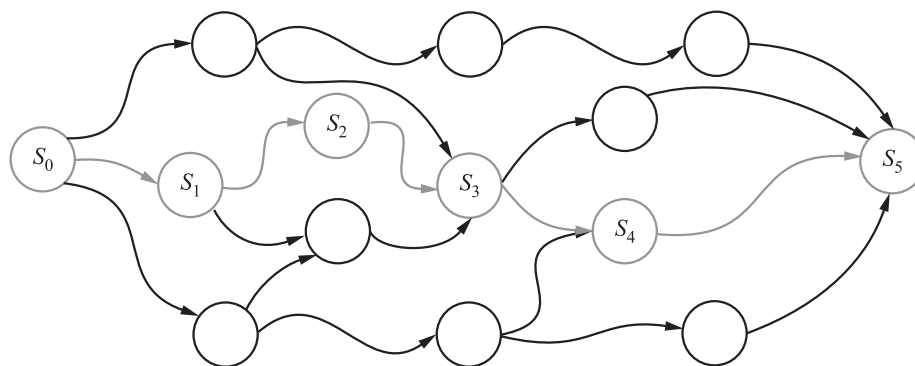


Рис. 1 Синтез плана поведения на основе сценария деятельности КА

Для вышеупомянутых категорий характерен процесс уточнения имеющегося операционального состава деятельности знаниями, полученными на основе анализа  $\{f_a^0\}$  в рамках процедуры пополнения знаний КА. В общем виде план поведения на основе сценария деятельности представлен на рис. 1. Серым цветом отмечены кортежи ситуаций и действий, выбранные КА в процессе АСПП из множества кортежей в рамках сценария. Для каждой возможной последовательности действий сценария строится план. Из множества всех построенных планов выбирается наиболее подходящий для  $\{f_a^0\}$  и  $\{f_a^{\text{end}}\}$ .

Алгоритм синтеза плана поведения выполнен на основе процедуры MAP\_ITERATION, состоящей из четырех основных этапов:

- (1) S-этап — поиск прецедента деятельности из текущей ситуации, который ранее способствовал достижению схожей целевой ситуации. Поиск осуществляется в базе предактивированных прецедентных действий;
- (2) M-этап — поиск применимых действий на множестве возможных значений. Поиск проходит на основе получения множества действий над объектами, присутствующими в ситуации, и выборе среди них применимых. При синтезе плана на основе имеющегося сценария деятельности этот этап отвечает за выбор схемы действий, соответствующей рассматриваемой ситуации;
- (3) A-этап — генерация матриц действий на множестве смыслов, соответствующих найденным значениям. Все сгенерированные действия эвристически оцениваются и отбираются те, которые способствуют наиболее быстрой активации целевой ситуации;
- (4) P-этап — построение новой ситуации по множеству признаков условий найденных действий.

## 4 Пример модельного сценария и плана покупки автомобиля

Рассмотрим модельный пример сценария покупки автомобиля. Автомобильная тематика была выбрана по причине наличия достаточно однозначного набора действий, обеспечивающих достижение желаемой цели. Модельный сценарий реконструирован на основе текстов людей, описывающих свой опыт покупки автомобиля. В качестве исходного набора данных был собран корпус из 100 текстов (159 698 словоупотреблений). В корпус вошли инструкции о покупке, осмотре и оформлении автомобиля на свое имя (как нового, так и подержанного), т. е. тексты, содержащие сценарии в более-менее явном виде (рекомендации авторов читателям).

Фрагмент схемы сценария покупки автомобиля представлен на рис. 2. Данная схема применима и для других предметных областей. Она может быть использована на практике для задачи управления поведением интеллектуального агента. Центральное место в этой структуре занимает сценарий. Он состоит из следующих элементов:

- одиночное действие (на рис. 2, например, это элемент «НоваяИлиБУ: ПростоеДействие»)
- ветвление, которое состоит из множества шагов, порядок которых не важен, может выполняться не полностью или взаимоисключающе (на рис. 2 это элемент «ОпределениеТребований: Ветвление»)
- цепочка шагов, т. е. простая последовательность, которая говорит, что и в каком порядке надо сделать (на рис. 2 это элемент «ПокупкаАвто: ЦепочкаШагов»).

Каждый шаг в сценарии является, по сути, отдельным вложенным сценарием.

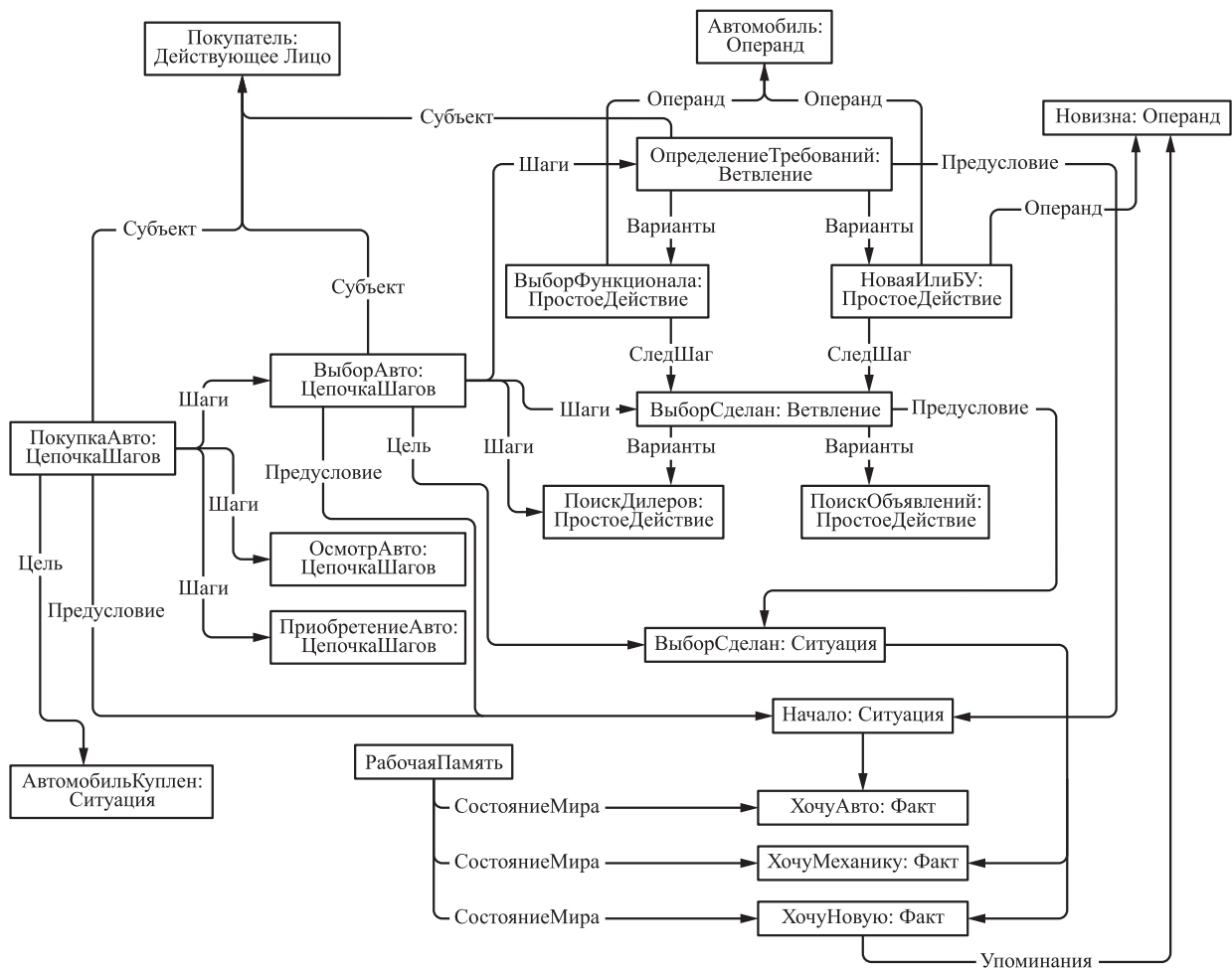


Рис. 2 Фрагмент схемы сценария покупки автомобиля

У каждого шага в сценарии есть также цели и предусловия. Конечная цель — это описание ситуации, к которой желательно прийти в результате выполнения сценария. Ситуацию можно описать как набор фактов о мире из рабочей памяти агента, т. е. каким мир должен стать в результате выполнения этого шага. Предусловия — это некий ограничитель, который не позволяет нарушать последовательность шагов в сценарии и определяет тот набор фактов, при удовлетворении которых можно приступить к выполнению каждого следующего шага: какая информация должна быть получена, какие решения приняты, какие ресурсы необходимы и т. д. У каждого шага также есть субъект, который его выполняет, и операнды (автомобиль, лакокрасочное покрытие, водительские права и др.).

Стрелками на рис. 2 обозначены связи (или отношения) между элементами сценария. Связь «СледШаг» задает следующий сценарий, который необходимо выполнить после текущего. Связь «Варианты» задает множество других сценариев, кото-

рые нужно выполнить после текущего, причем порядок выполнения этих сценариев не важен (и не все они могут быть выполнены). Связь «Шаги» задает множество сценариев, которые должны быть выполнены строго последовательно.

Все эти связи служат для явного указания последовательности действий. Однако на практике возможны ситуации, когда порядок действий неизвестен (к примеру, если сценарий собирался КА на основе разных текстов, в которых содержалась неполная информация), но какие-то элементы сценария все равно присутствуют, например есть понимание цели. Эти факты ссылаются (связь «Упоминание») на операнды (например, автомобиль, тип трансмиссии и др.), другие цели (зачем нужен автомобиль, кого на нем возить и куда ездить) и т. д. Переходя по таким связям, можно находить другие сценарии и действия, которые нужно выполнить для удовлетворения текущей цели. Это позволяет, двигаясь с других сторон, восстановить последовательность шагов сценария, выполняемого впервые.

## 5 Заключение

Моделирование целенаправленного поведения и сценариев деятельности — одно из новых направлений исследований в области искусственного интеллекта. Задача построения сценариев по текстам задействует верхние уровни языка (дискурс, сюжет) и становится новой актуальной проблемой для обработки русского языка. Использование извлекаемых из текстов сценариев деятельности повышает степень разумности и автономности интеллектуальных систем.

Дальнейшим развитием КА будет проработка механизмов взаимодействия ассистента с пользователем на естественном языке. Предполагается, что ассистент будет предлагать пользователю дальнейшие шаги по решению задачи в виде рекомендаций, генерируемых автоматически на основе текущего состояния и предыдущих шагов в синтезированном персональном плане ассистирования. Текущее состояние (завершенность текущего шага плана) также будет определяться ассистентом на основе диалога с пользователем.

## Литература

1. *Смирнов И. В., Панов А. И., Скрынник А. А., Чистова Е. В.* Персональный когнитивный ассистент: концепция и принципы работы // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 105–113.
2. *Осипов Г. С., Панов А. И.* Отношения и операции в знаковой картине мира субъекта поведения // Искусственный интеллект и принятие решений, 2017. № 4. С. 5–22.
3. *Осипов Г. С., Панов А. И.* Синтез рационального поведения когнитивного семиотического агента в динамической среде // Искусственный интеллект и принятие решений, 2020. № 4. С. 80–97.
4. *Берн Э.* Люди, которые играют в игры. Психология человеческой судьбы / Пер. с англ. А. Грузберг. — М.: Эксмо, 2008. 576 с. (*Berne E.* Games people play: The psychology of human relationships. — New York, NY, USA: Ballantine Books, 1973. 192 p.)
5. *Росс Л., Нисбетт Р.* Человек и ситуация. Уроки социальной психологии / Пер. с англ. В. В. Румынского. — М.: Аспект Пресс, 2000. 429 с. (*Ross L., Nisbett R.* The person and the situation: Perspectives of social psychology. — Philadelphia, PA, USA: Temple University Press, 1991.)
6. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. — М.: Политиздат, 1975. 304 с.
7. *Асмолов А. Г.* Деятельность и установка. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. 150 с.
8. *Узнадзе Д. Н.* Экспериментальные основы психологии установки. — Тбилиси: Акад. наук Груз. ССР, 1961. 210 с.
9. *Кузнецова Ю. М., Пенкина М. Ю.* Сценарий отказа от решения проблемы как предмет сетевых обсуждений // Экопсихологические исследования, 2020. Т. 6. С. 218–222.
10. *Суворова М. И., Кобозева М. В., Толдова С. Ю., Соколова Е. Г.* Извлечение сценарной информации из текстов. Ч. 1: Постановка задачи и обзор методов // Искусственный интеллект и принятие решений, 2020. № 1. С. 17–26.
11. *Мишланов В. А., Чуганская А. А., Смирнов И. В., Суворова М. И., Курузов И. А.* Разработка методов анализа сценариев поведения (на материале инструктивных интернет-текстов) // Медиалингвистика, 2020. Т. 7. № 1. С. 16–28.
12. *Chambers N., Jurafsky D.* Unsupervised learning of narrative event chains // 46th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics Proceedings. — Columbus, OH, USA: Association for Computational Linguistics, 2008. P. 789–797.
13. *Панов А. И.* Формирование образной компоненты знаний когнитивного агента со знаковой картиной мира // Информационные технологии и вычислительные системы, 2018. № 4. С. 84–96.
14. *Киселев Г. А.* Интеллектуальная система планирования поведения коалиции робототехнических агентов с STRL архитектурой // Информационные технологии и вычислительные системы, 2020. № 2. С. 21–37.

Поступила в редакцию 05.02.21

## PERSONAL COGNITIVE ASSISTANT: PLANNING ACTIVITY WITH SCRIPTS

I. V. Smirnov<sup>1,2</sup>, A. I. Panov<sup>1,3</sup>, A. A. Chuganskaya<sup>1</sup>, M. I. Suvorova<sup>1</sup>, G. A. Kiselev<sup>1,2</sup>,  
I. A. Kuruzov<sup>3</sup>, and O. G. Grigoriev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

<sup>3</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation

**Abstract:** The paper presents procedures for a cognitive assistant’s behavior planning based on scripts — generalized schemes of tasks solving. A cognitive assistant is a virtual intelligent agent that has its own worldview and builds a worldview of the user, it helps to solve various common or specific problems. The key component of assistant’s goal-based behavior is scenario — a reusable abstract sequence of actions and situations that are used for synthesis of a concrete plan of actions for a user. The concept of a scenario in psychological and linguistic interpretation as well as the procedure of scenarios extraction from texts are considered. The scenario and the plan of behavior are formalized using the sign-based approach. Methods for synthesizing a plan of behavior are proposed. A test case of a behavior plan synthesis for buying a car is considered.

**Keywords:** cognitive assistant; activity script; behavior planning

**DOI:** 10.14357/19922264220107

## Acknowledgments

The reported study was partially funded by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-29-22027).

## References

1. Smirnov, I. V., A. I. Panov, A. A. Skrynnik, and E. V. Chistova. 2019. Personal’nyy kognitivnyy assistent: kontseptsiya i printsipy raboty [Personal cognitive assistant: Concept and key principals]. *Informatika i ee Primeniya — Inform. Appl.* 13(3):105–113.
2. Osipov, G. S., and A. I. Panov. 2018. Relationships and operations in agent’s sign-based model of the world. *Scientific Technical Information Processing* 45(5):1–14.
3. Osipov, G. S., and A. I. Panov. 2021. Planning rational behavior of cognitive semiotic agents in a dynamic environment. *Scientific Technical Information Processing* 48(6):502–516.
4. Berne, E. 1973. *Games people play: The psychology of human relationships*. New York, NY: Ballantine Books. 192 p.
5. Ross, L., and R. Nisbett. 2011. *The person and the situation: Perspectives of social psychology*. London: McGraw-Hill. 288 p.
6. Leont’ev, A. N. 1975. *Deyatel’nost’. Soznanie. Lichnost’* [Activity, consciousness, and personality]. Moscow: Politizdat. 304 p.
7. Asmolov, A. G. 1974. *Deyatel’nost’ i ustanovka* [Activity and attitude]. Moscow: Izd-vo Moskovskogo un-ta. 150 p.
8. Uznadze, D. N. 1961. *Eksperimental’nye osnovy psikhologii ustanovki* [Experimental foundations of installation theory]. Tbilisi: AN GSSR. 210 p.
9. Kuznetsova, Yu. M., and M. Yu. Penkina. 2020. Stsenariy otkaza ot resheniya problemy kak predmet setevykh obsuzhdeniy [Scenario of failure to solve a problem in network discussions]. *Ekopsikholicheskie issledovaniya* [Ecopsychological Research] 6:218–222.
10. Suvorova, M. I., M. V. Kobozeva, S. Yu. Toldova, and E. G. Sokolova. 2021 (in press). Extraction of script information from texts. Part 1: Statement of the problem and review of methods]. *Scientific Technical Information Processing* 48.
11. Mishlanov, V. A., A. A. Chuganskaya, I. V. Smirnov, M. I. Suvorova, and I. A. Kuruzov. 2020. Razrabotka metodov analiza stsenariyev povedeniya (na materiale instruktivnykh internet-tekstov) [Developing methods for behavior scenario analysis (on the material of instructional texts)]. *Medialingvistika* [Media Linguistics] 7(1):16–28.
12. Chambers, N., and D. Jurafsky. 2008. Unsupervised learning of narrative event chains. *46th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics Proceedings*. Columbus, OH: Association for Computational Linguistics. 789–797.
13. Panov, A. I. 2018. Formirovanie obraznoy komponenty znaniy kognitivnogo agenta so znakovoy kartinoi mira [Formation of an image component of knowledge of the

cognitive agent with a sign-based model of worldview]. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy* [J. Information Technologies Computing Systems] 4:84–96.

14. Kiselev, G. A. 2020. Intellektual'naya sistema planirovaniya povedeniya koalitsii robototekhnicheskikh agentov

s STRL arkhitekturoy [Intelligent behavior planning system for a coalition of robotic agents with STRL architecture]. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy* [J. Information Technologies Computing Systems] 2:21–37.

Received February 5, 2021

## Contributors

**Smirnov Ivan V.** (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics; head of department, Institute of Artificial Intelligence Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 9, 60-letiya Oktyabrya Prosp., Moscow 117312, Russian Federation; associate professor, Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; ivs@isa.ru

**Panov Aleksandr I.** (b. 1987) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics; head of department, Institute of Artificial Intelligence Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 9, 60-letiya Oktyabrya Prosp., Moscow 117312, Russian Federation; deputy head of laboratory, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation; pan@isa.ru

**Chuganskaya Anfisa A.** (b. 1985) — Candidate of Science (PhD) in psychology, researcher, Institute of Artificial Intelligence Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 9, 60-letiya Oktyabrya Prosp., Moscow 117312, Russian Federation; anfisa.makh@gmail.com

**Suvorova Margarita I.** (b. 1991) — researcher, Institute of Artificial Intelligence Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 9, 60-letiya Oktyabrya Prosp., Moscow 117312, Russian Federation; suvorova@isa.ru

**Kiselev Gleb A.** (b. 1992) — researcher, Institute of Artificial Intelligence Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 9, 60-letiya Oktyabrya Prosp., Moscow 117312, Russian Federation; assistant, Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; kiselev@isa.ru

**Kuruzov Ilya A.** (b. 1999) — PhD student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation; kuruzov2014@mail.ru

**Grigoriev Oleg G.** (b. 1957) — Doctor of Science (PhD) in technology, head of Institute of Artificial Intelligence Research Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 9, 60-letiya Oktyabrya Prosp., Moscow 117312, Russian Federation; olegpolikvart@yandex.ru

# РАЗРЕШЕНИЕ КОНФЛИКТОВ В ГИБРИДНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

С. В. Листопад<sup>1</sup>, И. А. Кириков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается алгоритм снижения интенсивности и разрешения конфликтов, возникающих в гибридных интеллектуальных многоагентных системах (ГиИМАС). Предлагаемый алгоритм — составная часть метода управления проблемно- и процессно-ориентированными конфликтами в таких системах. Данный метод позволяет идентифицировать ситуации принятия решений, при необходимости стимулировать и впоследствии разрешать с помощью предлагаемого алгоритма конструктивные формы конфликта, а также предотвращать его деструктивные формы. Стимулирование конфликта совместно с гетерогенностью системы по моделируемым агентами знаниям специалистов и используемым методам обеспечивает всестороннее рассмотрение поставленной проблемы. Предлагаемый алгоритм снижения интенсивности и разрешения конфликтов позволяет агентам автоматически согласовать свои позиции и выработать единое коллективное решение, чтобы избавить пользователя от необходимости ручного анализа и выбора решения из массива альтернатив, предлагаемых отдельными агентами.

**Ключевые слова:** конфликт; гибридная интеллектуальная многоагентная система; коллектив специалистов; разрешение конфликта

**DOI:** 10.14357/19922264220108

## 1 Введение

На сегодняшний день быстрое и точное решение проблем, возникающих при управлении сложными социально-экономическими системами, стало одним из важнейших элементов конкурентоспособности компании [1]. При этом последствия принимаемых решений в условиях неопределенности, риска и динамической среды не могут быть точно спрогнозированы. Поэтому все большую актуальность приобретает разработка и применение интеллектуальных систем поддержки принятия решений, собирающих и анализирующих данные, предоставляющих пользователю альтернативы, релевантные проблемной ситуации, и их оценки. Для построения таких систем в [2] предложен подход на основе ГиИМАС, моделирующих коллективное решение проблем специалистами различных профилей «за круглым столом» путем организации взаимодействия интеллектуальных агентов — относительно автономных программных сущностей, обладающих достаточно развитыми моделями предметной области и целеполагания. Гибридные интеллектуальные многоагентные системы интегрируют подход гибридных интеллектуальных систем А. В. Колесникова [2], обеспечивающих учет неоднородности решаемой проблемы, и аппарат многоагентных систем (МАС) в смысле В. Б. Тара-

сова [3], позволяющий моделировать макроуровневые процессы и явления в коллективах специалистов.

Одна из особенностей ГиИМАС — возможность моделирования проблемно- и процессно-ориентированных конфликтов между агентами, которые, как показано в [4], позволяют всесторонне рассмотреть проблему и адаптировать под нее процессы выработки решения системой. Причины возникновения конфликтов среди агентов системы — противоречия между целями, методами, моделями предметной области, наборами данных, используемыми отдельными агентами при подготовке решений подзадач и согласовании правил взаимодействия для выработки итогового коллективного решения [1]. Если агенты не могут договориться между собой, пользователь сталкивается с дополнительной задачей ручного анализа и выбора решения из массива альтернатив, предлагаемых отдельными агентами, что обесценивает результаты работы ГиИМАС. Таким образом, без автоматического разрешения конфликтов агентов ГиИМАС не может рассматриваться как эффективная система поддержки принятия решений.

Цель настоящей работы — разработка алгоритма снижения интенсивности и разрешения конфликтов между агентами в рамках модели

<sup>1</sup> Калининградский филиал Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, ser-list-post@yandex.ru

<sup>2</sup> Калининградский филиал Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, baltbipiran@mail.ru

ГиИМАС с проблемно- и процессно-ориентированными конфликтами.

## 2 Подходы к разрешению конфликтов в системах распределенного искусственного интеллекта

Вопросы разрешения конфликтов в системах распределенного искусственного интеллекта связаны с преодолением множества проблем, таких как выбор агентом стратегии поведения, оценка интересов и прогнозирование поведения других агентов, обеспечение справедливости результатов разрешения конфликта, наличие в системе «эгоистичных» агентов, неоднородность и взаимозависимость целевых функций агентов, согласование противоречивых аргументов, повторяющиеся взаимодействия, доверие между агентами и другие [5, 6]. В [7] предложен метод выбора стратегии поведения агента при разрешении конфликтов в МАС в зависимости от типа конфликта (конфликт по целям, планам или убеждениям), степени автономности агента и целевой функции [8]. В [9] рассматриваются вопросы разрешения конфликтов, связанных с совместным использованием ресурсов и несовместимостью целей агентов, путем выбора одной из шести стратегий в зависимости от загруженности сети обмена сообщениями: арбитраж, самомодификация (независимость), централизация, переговоры, соглашение о приоритете и взаимное согласование. В [10] представлены четыре базовые упрощенные стратегии разрешения конфликтов в МАС: переговоры, арбитраж, самомодификация и голосование. Выбор стратегий зависит от числа агентов, количества требуемых сообщений, расчетного процессорного времени, расчетного времени поиска и принятия решения, а также ожидаемого среднего удовлетворения от принятого решения. Авторы [11] предложили метод выбора стратегии разрешения конфликтов (ConfRSSM) с помощью многоагентного моделирования. В рамках данного метода релевантность стратегий (принуждение, подчинение, делегирование, переговоры, консенсус) текущей конфликтной ситуации оценивается на основе степени уверенности агентов в своих «мнениях» и интенсивности конфликта.

Анализ [5–11] позволяет выделить следующие основные стратегии разрешения конфликтов в системах распределенного искусственного интеллекта:

- переговоры, обеспечивающие обмен знаниями и информацией о целях между двумя или более агентами для достижения взаимоприемлемого

соглашения по убеждениям, планам действий или целям в рамках совместной работы над поставленными проблемами [1]. Работы в области организации переговорного процесса агентов охватывают вопросы его формализации (создание моделей предметной области и предпочтений, необходимых для ведения переговоров, разработка протоколов, регулирующих взаимодействие между агентами), а также разработки моделей интеллектуальных переговорных агентов, построенных, например, на основе стратегии торгов, модели оппонентов или стратегии принятия [6]. Реализация стратегии переговоров возможна, если все взаимодействующие агенты — интеллектуальные, т. е. обладают развитыми моделями предметной области и подсистемами целеполагания, что позволяет им принимать решения для достижения своих целей;

- делегирование, т. е. привлечение для разрешения конфликта агентов третьей стороны, которая не имеет возможности напрямую изменять поведение агентов [11]. В рамках стратегий данного класса выделяются два подкласса: арбитраж и посредничество. В первом случае решение арбитра обязательно для принятия и исполнения конфликтующими агентами. В случае посредничества решения третьей стороны принимаются и выполняются с согласия конфликтующих сторон. В рамках данной стратегии предполагается, что привлекаемый для разрешения конфликта агент имеет более развитую базу знаний и больше возможностей для поиска решений по сравнению с конфликтующими агентами [12, 13]. Стратегия привлечения третьей стороны обеспечивает быстрое принятие решения и минимальное число сообщений между агентами. Эта стратегия наиболее актуальна, когда агент не способен взаимодействовать с другими агентами;
- голосование, когда каждый из агентов с помощью своих рассуждений генерирует решение-кандидат, после чего агенты голосуют по предложенным решениям в соответствии со своими целевыми функциями, чтобы максимизировать общесистемный показатель удовлетворенности [14];
- самомодификация, которая предполагает, что агент, обнаруживший конфликты с другими агентами, меняет свое поведение вместо того, чтобы взаимодействовать с ними для выработки взаимовыгодного решения. Достоинства данной стратегии — простота и высокая скорость разрешения конфликтов [10];

- подчинение, которое может применяться, когда агент добровольно идет на уступки другому агенту с более высоким статусом, репутацией, опытом или уверенностью в предложенном решении [11]. В реальных коллективах такое поведение соответствует конформизму;
- игнорирование, т.е. отказ от усилий по разрешению конфликта, если его интенсивность низкая, а конфликтующие стороны обладают равным статусом, репутацией и опытом, а также низкой уверенностью в предлагаемых ими решениях [11];
- принуждение, когда агент с более высоким статусом, репутацией, опытом или уверенностью в предложенном решении принуждает другого агента отказаться от своего решения, что помогает снизить сложность принятия итогового решения за счет исключения некоторых вариантов в рамках некомпенсаторной стратегии [14].

### 3 Модель гибридных интеллектуальных многоагентных систем с управлением конфликтами

Детально модель ГиИМАС, моделирующей проблемно- и процессно-ориентированные конфликты, представлена в [4]. Рассмотрим основные ее элементы, необходимые для описания алгоритма снижения интенсивности и разрешения конфликтов. Формально ГиИМАС определяется выражением [4]:

$$\text{himas} = \langle \text{AG}^*, \text{env}, \text{INT}, \text{ORG}, \text{MLP} \rangle, \quad (1)$$

где  $\text{AG}^* = \{ag_1, \dots, ag_n, ag^{\text{dm}}, ag^{\text{fc}}\}$  — множество агентов, включающее  $n$  агентов-специалистов (АС)  $ag_i, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ , агента  $ag^{\text{dm}}$ , принимающего решения (АПР), и агента-фасилитатора (АФ)  $ag^{\text{fc}}$ , обеспечивающего управление конфликтами в системе;  $\text{env}$  — концептуальная модель внешней среды системы;  $\text{INT}$  — множество элементов структурирования взаимодействий агентов [4];  $\text{ORG}$  — множество архитектур ГиИМАС;  $\text{MLP} = \{\text{cnfm}, \text{gdid}\}$  — множество концептуальных моделей макроуровневых процессов в ГиИМАС, содержащее модель  $\text{cnfm}$  процесса управления конфликтами агентов [15] и модель  $\text{gdid}$  идентификации взаимозависимости целей агентов [15].

Агент  $ag_{id} \in \text{AG}^*$  из формулы (1) описывается выражением

$$ag_{id} = \langle id_{id}^{\text{ag}}, gl_{id}^{\text{ag}}, \text{ACT}_{id}^{\text{ag}} \rangle,$$

где  $id_{id}^{\text{ag}}$  — идентификатор агента;  $gl_{id}^{\text{ag}}$  — нечеткая цель агента [15];  $\text{ACT}_{id}^{\text{ag}}$  — множество действий агента.

Модель процесса управления конфликтами агентов описывается выражением:

$$\begin{aligned} \text{cnfm} = \\ = \langle \text{CNF}, \text{cnfcl}, \text{ACT}^{\text{afcm}}, \text{ACT}^{\text{agcs}}, \text{ACT}^{\text{agcr}} \rangle, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\text{CNF}$  — матрица конфликтов (3) между парами агентов;  $\text{cnfcl}$  — это функция-классификатор конфликтов [4], необходимая для формирования матрицы  $\text{CNF}$ ;  $\text{ACT}^{\text{afcm}} = \{\text{act}^{\text{cnfm}}, \text{act}^{\text{cnfi}}, \text{act}^{\text{cnfs}}, \text{act}^{\text{cnfr}}\}$  — множество функций АФ по управлению конфликтами в ГиИМАС, содержащее функцию «управление конфликтом»  $\text{act}^{\text{cnfm}}$ , обеспечивающую идентификацию  $\text{act}^{\text{cnfi}}$  конфликтов с помощью классификатора  $\text{cnfcl}$  и инициализацию функции стимуляции  $\text{act}^{\text{cnfs}}$  или разрешения  $\text{act}^{\text{cnfr}}$  конфликтов;  $\text{ACT}^{\text{agcs}}$  — множество действий АС, выполняемых при стимулировании противоречий АФ;  $\text{ACT}^{\text{agcr}} = \left( \{\text{act}_{ig}^{\text{agcr}}, \text{act}_{sm}^{\text{agcr}}, \text{act}_{\text{vot}}^{\text{agcr}}, \text{act}_{\text{del}}^{\text{agcr}}, \text{act}_{\text{neg}}^{\text{agcr}}\}, \prec \right)$  — упорядоченное множество допустимых действий (стратегий) АС по разрешению противоречий, содержащее стратегию переговоров  $\text{act}_{\text{neg}}^{\text{agcr}}$ , делегирования  $\text{act}_{\text{del}}^{\text{agcr}}$ , голосования  $\text{act}_{\text{vot}}^{\text{agcr}}$ , самомодификации  $\text{act}_{sm}^{\text{agcr}}$  и игнорирования  $\text{act}_{ig}^{\text{agcr}}$ . Отношение предпочтения  $\prec^{\text{prf}}$  задано следующим образом:  $\text{act}_{ig}^{\text{agcr}} \prec^{\text{prf}} \text{act}_{sm}^{\text{agcr}} \prec^{\text{prf}} \text{act}_{\text{vot}}^{\text{agcr}} \prec^{\text{prf}} \text{act}_{\text{del}}^{\text{agcr}} \prec^{\text{prf}} \text{act}_{\text{neg}}^{\text{agcr}}$ . Стратегии подчинения и принуждения не моделируются в ГиИМАС, так как предполагают наличие иерархии АС и способствуют возникновению таких отрицательных эффектов, как группинк и конформизм.

Конфликт между агентами, т.е. элемент матрицы  $\text{CNF}$  из выражения (2), представляет собой следующий кортеж:

$$\begin{aligned} \text{cnf}_{ij} \text{cnft} = \\ = \langle ag_i, ag_j, \text{cnfm}, \text{cnft}, \text{ACT}_i^{\text{agcr}}, \text{ACT}_j^{\text{agcr}} \rangle, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $ag_i$  и  $ag_j$  — это агенты-субъекты конфликта,  $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ ;  $\text{cnfm}$  — напряженность конфликта в виде скалярной величины  $\text{cnfm} \in [0, 1]$ , вычисляемая классификатором конфликтов  $\text{cnfcl}$  в соответствии с мерой напряженности конфликта [4];  $\text{cnft}$  — символьная переменная «тип конфликта», определенная на множестве  $\text{CNFT} = \{\text{cnft}_{\text{prb}} = \text{«проблемно-ориентированный»}, \text{cnft}_{\text{prc}} = \text{«процессно-ориентированный»}\}$ ;  $\text{ACT}_i^{\text{agcr}}$  и  $\text{ACT}_j^{\text{agcr}}$  — множество допустимых действий агентов  $ag_i$  и  $ag_j$  соответственно



по разрешению противоречий,  $ACT_i^{agcr} \subseteq ACT_i^{ag}$ ,  $ACT_j^{agcr} \subseteq ACT_j^{ag}$ ,  $ACT_i^{agcr}, ACT_j^{agcr} \subseteq ACT^{agcr}$ .

Функция «управление конфликтом»  $act^{cnfm}$  АФ подробно описана в [4]. Она состоит в первоначальном определении показателя взаимозависимости целей агентов, запуска функции «идентификация конфликтов»  $act^{cnfi}$  при получении очередного сообщения-решения от АС и в зависимости от ее результатов вызова функции стимуляции  $act^{cnfs}$  или разрешения  $act^{cnfr}$  конфликтов. В случае если одна из двух последних функций устанавливает флаг необходимости завершения работы, инициализируется процесс завершения работы ГиИМАС. Поскольку работа посвящена вопросам снижения интенсивности и разрешения конфликтов в ГиИМАС, рассмотрим функцию  $act^{cnfr}$  подробнее.

#### 4 Снижение интенсивности и разрешение конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах

Для снижения интенсивности и разрешения конфликтов в ГиИМАС предлагается алгоритм, представленный на рисунке. Он обеспечивает подбор и смену стратегий, рассмотренных в разд. 2,

для каждой пары конфликтующих агентов с учетом характеристик конфликта между ними.

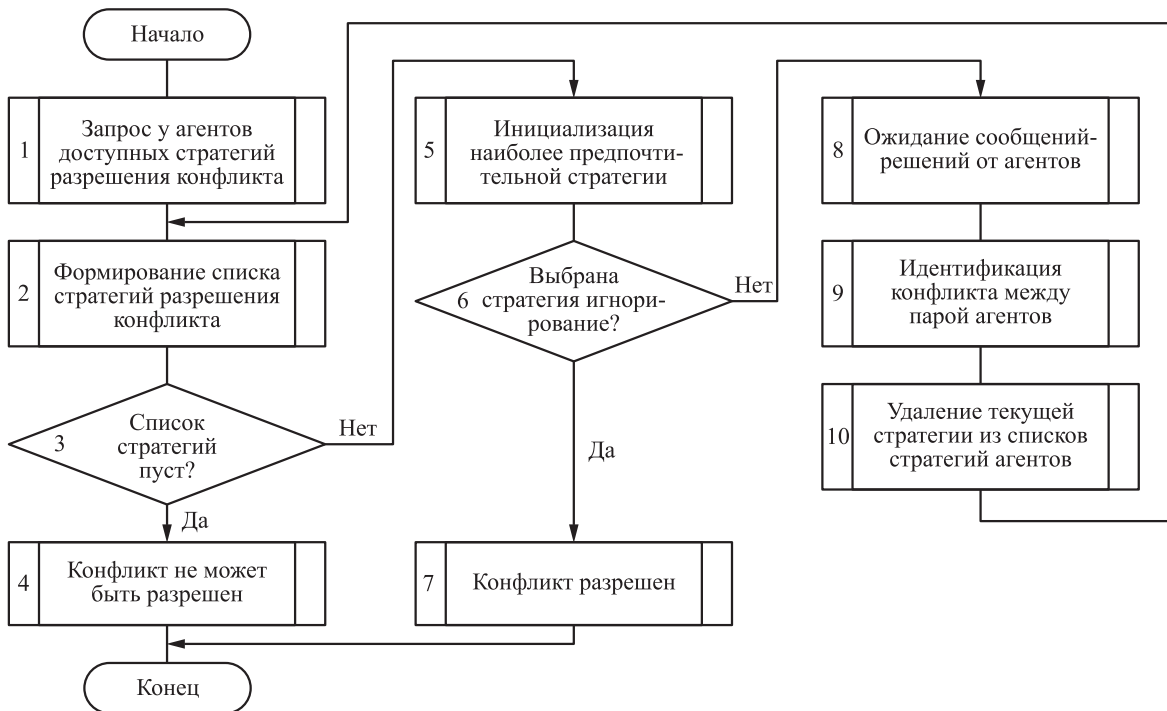
Алгоритм снижения интенсивности и разрешения конфликтов агентов начинается с запроса у конфликтующих агентов  $ag_i$  и  $ag_j$  множеств реализуемых ими стратегий разрешения противоречий  $ACT_i^{agcr}$  и  $ACT_j^{agcr}$ . Агент-фасилитатор создает локальные копии этих множеств  $ACT_i^{agcr*} = ACT_i^{agcr}$  и  $ACT_j^{agcr*} = ACT_j^{agcr}$ . В блоке 2 выполняется формирование списка (упорядоченного множества) стратегий для разрешения конфликта между парой агентов  $ag_i$  и  $ag_j$  по правилу:

$$ACT_{ijc}^{agcr} = ACT_i^{agcr*} \cap ACT_j^{agcr*} \cap ACT_{cnf}^{agcr}, \quad (4)$$

где

$$ACT_{cnf}^{agcr} = \begin{cases} \{act_{neg}^{agcr}, act_{del}^{agcr}\}, & \text{если } cnfin > cnfin^{htr}; \\ ACT^{agcr}, & \text{если } cnfin^{ltr} < cnfin < cnfin^{htr} \\ & \text{и } cnft = cnft_{prb}; \\ ACT^{agcr} \setminus \{act_{ig}^{agcr}\}, & \text{если} \\ & cnfin^{ltr} < cnfin < cnfin^{htr} \text{ и } cnft = cnft_{prc}; \\ \{act_{ig}^{agcr}\}, & \text{если } cnfin < cnfin^{ltr}. \end{cases}$$

Здесь  $cnfin^{ltr}$  и  $cnfin^{htr}$  — нижний и верхний пороги интенсивности конфликта, которые первоначаль-



Алгоритм снижения интенсивности и разрешения конфликтов в ГиИМАС

но имеют следующие значения:  $cnfn^{ltr} = 0,005$  и  $cnfn^{htr} = 0,5$  — и должны быть уточнены в ходе тестирования системы. Конфликт с интенсивностью  $cnfn < cnfn^{ltr}$  считается незначительным, а с интенсивностью  $cnfn > cnfn^{htr}$  — сильным.

Если список  $ACT_{ijc}^{agcr}$  стратегий для разрешения конфликта, сформированный по правилу (4), пуст, то конфликт не может быть разрешен, и функция завершает свою работу. В противном случае инициируется разрешение конфликтов по наиболее предпочтительной стратегии в соответствии с отношением  $\prec_{prf}$ . Если выбрана стратегия «игнорирование», то конфликт считается разрешенным, и функция завершает работу. В противном случае АФ ожидает сообщений-решений от АС, которые они выработают после применения соответствующей стратегии. Получив такие сообщения, АФ вновь идентифицирует конфликт между парой агентов  $ag_i$  и  $ag_j$ , оценивая его интенсивность и тип, с помощью функции  $act^{cni}$ . Выполняется смена стратегии разрешения конфликта, для чего из копий множеств  $ACT_i^{agcr*}$  и  $ACT_j^{agcr*}$  удаляется текущая стратегия и происходит переход к блоку 2.

Таким образом, предлагаемый алгоритм дает возможность снизить интенсивность сильных и умеренных конфликтов, которые не позволяют агентам ГиИМАС эффективно взаимодействовать при решении поставленной проблемы. В то же время незначительные конфликты могут быть проигнорированы из-за того, что временные затраты на их окончательное разрешение превышают затраты, связанные с нарушениями взаимодействия агентов из-за этих конфликтов. Наличие такого алгоритма в арсенале АФ позволяет ему динамически стимулировать возникновение противоречий между АС, чтобы всесторонне рассмотреть поставленную проблему и сгенерировать нестандартные решения, не «опасаясь», что АС впоследствии не смогут согласовать свои позиции и выработать совместные рекомендации для пользователя.

## 5 Заключение

В работе показана необходимость механизма автоматического разрешения конфликтов между агентами ГиИМАС. Рассмотрены существующие подходы к разрешению конфликтов в системах распределенного искусственного интеллекта. Представлена модель ГиИМАС с проблемно- и процессно-ориентированными конфликтами, имитирующая процесс коллективного решения проблем на основе анализа их напряженности. Предложен алгоритм снижения интенсивности и разре-

шения конфликтов между агентами ГиИМАС с использованием стратегий, традиционных для систем распределенного искусственного интеллекта. Снижение интенсивности и разрешение конфликтов, возникших между агентами ГиИМАС на первых стадиях рассмотрения поставленной проблемы, позволяет выработать согласованную позицию с учетом различных точек зрения и интересов специалистов, моделируемых агентами системы, повышая таким образом релевантность системы реальному коллективу специалистов.

## Литература

1. Hernes M., Sobieska-Karpińska J. A comparative analysis of conflicts resolving methods in multiagent decision support systems // *Cognition Creativity Support Systems*, 2013. Vol. 153. P. 23–32.
2. Колесников А. В., Кириков И. А., Листонад С. В. Гибридные интеллектуальные системы с самоорганизацией: координация, согласованность, спор. — М.: ИПИ РАН, 2014. 189 с.
3. Тарасов В. Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. 352 с.
4. Листонад С. В., Кириков И. А. Метод идентификации конфликтов агентов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // *Системы и средства информатики*, 2020. Т. 30. № 1. С. 56–65. doi: 10.14357/08696527200105.
5. Baarslag T., Kaisers M., Gerding E. H., Jonker C. M., Gratch J. Computers that negotiate on our behalf: Major challenges for self-sufficient, self-directed, and interdependent negotiating agents // *Autonomous agents and multiagent systems* / Eds. G. Sukthankar, J. A. Rodriguez-Aguilar. — Lecture notes in computer science ser.: Lecture notes in artificial intelligence subser. — Cham, Switzerland: Springer, 2017. Vol. 10643. P. 143–163.
6. Aydoĝan R., Baarslag T., Gerding E. Artificial intelligence techniques for conflict resolution // *Group Decis. Negot.*, 2021. Vol. 30. P. 879–883.
7. Liu T. H., Goel A., Martin C. E., Barber K. S. Classification and representation of conflict in multi-agent systems. — Austin, TX, USA: The University of Texas at Austin, 1998. Technical Report of the Laboratory for Intelligent Processes and Systems TR98-UT-LIPS-AGENTS-01. 13 p. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.35.3694&rep=rep1&type=pdf>.
8. Basheer G. S., Ahmad M. S., Tang A. Y. C. A framework for conflict resolution in multi-agent systems // *Computational collective intelligence: Technologies and applications* / Eds. C. Bădică, N. T. Nguyen, M. Brezovan. — Lecture notes in computer science ser.: Lecture notes in artificial intelligence subser. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. Vol. 8083. P. 195–204.

9. Adler M. R., Davis A. B., Weihmayer R., Worrest R. W. Conflict-resolution strategies for nonhierarchical distributed agents // Distributed artificial intelligence II. — London: Pitman Publishing, 1989. P. 139–161.
10. Barber K. S., Liu T. H., Han D. C. Strategic decision-making for conflict resolution in dynamic organized multi-agent systems // CERA J., 2000. Special Issue. 18 p. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.144.6881&rep=rep1&type=pdf>.
11. Tang A., Basheer G. A. Conflict Resolution Strategy Selection Method (ConfRSSM) in multi-agent systems // Int. J. Advanced Computer Science Applications, 2017. Vol. 8. P. 398–404.
12. Ioannidis Y. E., Sellis T. K. Conflict resolution of rules assigning values to virtual attributes // Conference (International) on the Management of Data Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 1989. P. 205–214.
13. Ephrati E., Rosenschein J. S. The Clarke tax as a consensus mechanism among automated agents // AAAI Proceedings, 1991. Vol. 91. P. 173–178.
14. Helge G. Decision-making strategies and self-regulated learning: Fostering decision-making competence in education for sustainable development: PhD Thesis. — Göttingen: der Georg-August-Universität Göttingen, 2011. 206 p.
15. Лустонад С. В., Куриков И. А. Стимуляция конфликтов агентов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Системы и средства информатики, 2021. Т. 31. № 2. С. 47–58. doi: 10.14357/08696527210205.

Поступила в редакцию 10.01.22

## CONFLICT RESOLUTION IN HYBRID INTELLIGENT MULTIAGENT SYSTEMS

S. V. Listopad and I. A. Kirikov

Kaliningrad Branch of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 5 Gostinaya Str., Kaliningrad 236000, Russian Federation

**Abstract:** The paper discusses an algorithm for reducing the intensity and resolving conflicts that arise in hybrid intelligent multiagent systems. The proposed algorithm is an integral part of the method for managing problem- and process-oriented conflicts in such systems. This method makes it possible to identify decision-making situations, stimulate, if necessary, and subsequently resolve constructive forms of conflict, as well as prevent its destructive forms using the proposed algorithm. Stimulation of the conflict together with the heterogeneity of the system according to the knowledge of specialists simulated by agents and the methods used by them provides an all-sided consideration of the problem posed. The proposed algorithm for reducing the intensity and resolving conflicts allows agents to reconcile automatically their positions on solving the problem and work out a single collective solution in order to save the user from the need for manual analysis and choosing a solution from the array of alternatives proposed by individual agents.

**Keywords:** conflict; hybrid intelligent multiagent system; team of specialists; conflict resolution

**DOI:** 10.14357/19922264220108

### References

1. Hernes, M., and J. Sobieska-Karpińska. 2013. A comparative analysis of conflicts resolving methods in multiagent decision support systems. *Cognition Creativity Support Systems* 153:23–32.
2. Kolesnikov, A. V., I. A. Kirikov, and S. V. Listopad. 2014. *Gibridnye intellektual'nye sistemy s samoorganizatsiyey: koordinatsiya, soglasovannost', spor* [Hybrid intelligent systems with self-organization: Coordination, consistency, and dispute]. Moscow: IPI RAN. 189 p.
3. Tarasov, V. B. 2002. *Ot mnogoagentnykh sistem k intellektual'nym organizatsiyam: filozofiya, psikhologiya, informatika* [From multiagent systems to intelligent organizations: Philosophy, psychology, and informatics]. Moscow: Editorial URSS. 352 p.
4. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2020. Metod identifikatsii konfliktov agentov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Agent conflict identification method in hybrid intelligent multiagent systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 30(1):56–65. doi: 10.14357/08696527200105.
5. Baarslag, T., M. Kaisers, E. H. Gerding, C. M. Jonker, and J. Gratch. 2017. Computers that negotiate on our behalf: Major challenges for self-sufficient, self-directed, and interdependent negotiating agents. *Autonomous agents and multiagent systems*. Eds. G. Sukthankar and J. A. Rodriguez-Aguilar. Lecture notes in computer science ser.: Lecture notes in artificial intelligence subser. Cham, Switzerland: Springer. 10643:143–163.
6. Aydoğan, R., T. Baarslag, and E. Gerding. 2021. Artificial intelligence techniques for conflict resolution. *Group Decis. Negot.* 30:879–883.
7. Liu, T. H., A. Goel, C. E. Martin, and K. S. Barber. 1998. Classification and representation of conflict in

- multi-agent systems. Austin, TX, USA: The University of Texas at Austin, 1998. Technical Report of the Laboratory for Intelligent Processes and Systems TR98-UT-LIPS-AGENTS-01. 13 p. Available at: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.35.3694&rep=rep1&type=pdf> (accessed January 17, 2022).
8. Basheer, G. S., M. S. Ahmad, and A. Y. C. Tang. 2013. A framework for conflict resolution in multi-agent systems. *Computational Collective Intelligence. Technologies and applications*. Eds. C. Bădică, N. T. Nguyen, and M. Brezovan. Lecture notes in computer science ser.: Lecture notes in artificial intelligence subser. Berlin, Heidelberg: Springer. 8083:195–204.
  9. Adler, M. R., A. B. Davis, R. Weihmayer, and R. W. Worrest. 1989. Conflict-resolution strategies for nonhierarchical distributed agents. *Distributed artificial intelligence II*. London: Pitman Publishing. 139–161.
  10. Barber, K. S., T. H. Liu, and D. C. Han. 2000. Strategic decision-making for conflict resolution in dynamic organized multi-agent systems. *CERA J. Special Issue*. 18 p. Available at: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.144.6881&rep=rep1&type=pdf> (accessed January 17, 2022).
  11. Tang, A., and G. Basheer. 2017. A Conflict Resolution Strategy Selection Method (ConFRSSM) in multi-agent systems. *Int. J. Advanced Computer Science Applications* 8:398–404.
  12. Ioannidis, Y. E., and T. K. Sellis. 1989. Conflict resolution of rules assigning values to virtual attributes. *Conference (International) on the Management of Data Proceedings*. New York, NY: ACM. 205–214.
  13. Ephrati, E., and J. S. Rosenschein. 1991. The Clarke tax as a consensus mechanism among automated agents. *AAAI Proceedings* 91:173–178.
  14. Helge, G. 2011. Decision-making strategies and self-regulated learning: Fostering decision-making competence in education for sustainable development. Göttingen Göttingen: der Georg-August-Universität Göttingen. PhD Thesis. 206 p.
  15. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2021. Stimulyatsiya konfliktov agentov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Stimulation of agent conflicts in hybrid intelligent multiagent systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(2):47–58. doi: 10.14357/08696527210205.

Received January 10, 2022

## Contributors

**Listopad Sergey V.** (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Kaliningrad Branch of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 5 Gostinaya Str., Kaliningrad 236000, Russian Federation; ser-list-post@yandex.ru

**Kirikov Igor A.** (b. 1955) — Candidate of Sciences (PhD) in technology, director, Kaliningrad Branch of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 5 Gostinaya Str., Kaliningrad 236000, Russian Federation; baltbipiran@mail.ru

# СРАВНЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ИНДЕКСОВ ВРЕМЕН ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ $M/G/1^*$

И. В. Пешкова<sup>1</sup>

**Аннотация:** Доказывается теорема, согласно которой если исходные стационарные последовательности стохастически упорядочены и существуют предельные распределения для максимумов, а также упорядочены нормализующие последовательности, то их экстремальные индексы также упорядочены. Этот результат применен для сравнения экстремальных индексов стационарных времен ожидания в двух системах обслуживания типа  $M/G/1$ , в которых входные потоки совпадают, а времена обслуживания стохастически упорядочены. Рассмотрены три примера систем обслуживания: с экспоненциальным распределением, распределением Парето и распределением Вейбулла времени обслуживания. Для этих распределений получены соотношения между параметрами, гарантирующие стохастическую упорядоченность распределений и нормализующих последовательностей.

**Ключевые слова:** распределение экстремальных значений; экстремальный индекс; система обслуживания; стохастическая упорядоченность

**DOI:** 10.14357/19922264220109

## 1 Введение

Теория экстремальных значений моделирует возникновение редких событий, таких как большие (малые) значения данного процесса в течение некоторого периода времени [1–3]. В финансовом контексте экстремальные события проявляются всякий раз, когда происходит серьезное падение фондового рынка. В кредитном страховании, портфельном инвестировании, мониторинге катастрофических экологических событий, прикладных проблемах обработки сигналов и производительности сетей связи крайне важно оценивать риск возникновения экстремальных событий. Один из эффективных подходов к принятию решений — моделирование событий, связанных с экстремальными значениями случайных процессов.

Как показывают результаты наблюдений, часто экстремумы группируются во времени, т. е. образуют кластеры [4]. Такая кластеризация в теории экстремальных значений характеризуется с помощью так называемого *экстремального индекса* [5]. Экстремальный индекс служит важным показателем, который определяет предельное распределение экстремальных значений строго стационарных случайных последовательностей [1].

Проблема изучения экстремальных значений характеристик производительности систем массового обслуживания неоднократно рассматривалась в соответствующих работах (см., в частности, [6–9]). Например, алгоритм вычисления

экстремального индекса стационарного времени ожидания стационарной системы  $G/G/1$  с распределением, принадлежащим области притяжения распределения Гумбеля, приведен в статье [10].

Главная идея данного исследования состоит в использовании свойства *стохастической упорядоченности* времен обслуживания двух систем обслуживания типа  $M/G/1$  для сравнения экстремальных индексов стационарных времен ожидания в этих системах.

В некоторых частных случаях данная проблема рассматривалась в предшествующих работах автора [11, 12]. Например, в работе [11] исследовалась система  $M/G/1$  с Парето-распределением времени обслуживания, а в работе [12] рассмотрена система  $M/G/1$  с распределением Вейбулла с параметром формы  $0 < \beta < 1$ . Основной результат работы [12] заключен в утверждении 1 (в разд. 2), которое обобщает предшествующие результаты автора.

В разд. 2 настоящей статьи приводятся основные сведения из теории экстремальных значений. Кроме того, в этом разделе доказана теорема 1, которая утверждает, что если исходные стационарные последовательности стохастически упорядочены, т. е.  $X_n \leq_{st} Y_n$  (для всех  $n \geq 1$ ), и соответствующие *нормализующие последовательности* также упорядочены, то экстремальные индексы этих последовательностей удовлетворяют неравенству  $\theta_X \geq \theta_Y$ . Этот результат был анонсирован в работах [11, 12]. В разд. 2 также приведены условия для параметров

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 21-71-10135).

<sup>1</sup> Петрозаводский государственный университет, iaminova@petrsu.ru

экспоненциального распределения, а также распределений Парето и Вейбулла, при которых выполнено указанное неравенство для экстремальных индексов двух стационарных последовательностей. В разд. 3 сформулировано утверждение 1, которое основано на применении теоремы 1 для сравнения экстремальных индексов стационарных времен ожидания в случае односерверных систем обслуживания. Далее в этом разделе приведены примеры сравнения систем обслуживания с временами обслуживания, имеющими экспоненциальное распределение, распределение Парето и распределение Вейбулла соответственно.

## 2 Сравнение экстремальных индексов двух стохастически упорядоченных строго стационарных последовательностей

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.)  $\{X_n, n \geq 1\}$ , заданных общей функцией распределения (ф.р.)  $F$ , и обозначим  $M_n$  максимум первых  $n$  из этих величин, т. е.

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Очевидно, функция распределения  $M_n$  имеет следующий вид:

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x), \quad n \geq 1.$$

Известно [1], что если для некоторых последовательностей констант  $b_n, a_n > 0, n \geq 1$ , и некоторой невырожденной ф.р.  $G$  выполняется следующее асимптотическое выражение:

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

то говорят, что ф.р.  $F$  относится к области притяжения ф.р.  $G$ .

Распределения  $G$ , удовлетворяющие соотношению (1), называются *распределениями экстремального типа* и имеют следующую обобщенную форму [2]:

$$\mathbb{P}(X \leq x) =: H(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \eta \frac{x - \nu}{\sigma}\right)^{-1/\eta}\right) & \eta \neq 0; \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \nu}{\sigma}\right)\right) & \eta = 0, \end{cases}$$

где  $1 + \eta(x - \nu)/\sigma > 0$ . Заметим, что если  $\eta > 0$ , то  $H$  — это распределение Фреше, если  $\eta < 0$ , то  $H$  — это обратное распределение Вейбулла, и если  $\eta = 0$ , то  $H$  — это распределение Гумбеля.

Пусть  $0 \leq \tau \leq \infty$  и предположим, что существует такая последовательность вещественных чисел  $\{u_n, n \geq 1\}$ , что

$$n\bar{F}(u_n) \rightarrow \tau \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где  $\bar{F} := 1 - F$  — хвост ф.р.  $F$ . Тогда [1]

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau} \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (3)$$

и, обратно, условие (3) (для некоторого  $0 \leq \tau \leq \infty$ ) влечет выполнение (2).

В случае, когда выполнено соотношение (1), сходимость (3) сохраняется для членов семейства линейных нормализующих последовательностей

$$u_n(x) = a_n x + b_n, \quad n \geq 1,$$

где  $x$  принимает все возможные вещественные значения. В этом случае (3) преобразуется в

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n(x)) \rightarrow \tau(x),$$

где вид  $\tau(x)$  зависит от типа предельного распределения, а именно: распределения Гумбеля  $\tau(x) = e^{-x}$ , распределения Фреше  $\tau(x) = x^{-\eta}$  и обратного распределения Вейбулла  $\tau(x) = (-x)^\eta$ .

Приведем примеры линейных нормализующих последовательностей  $\{u_n(x)\}$  для некоторых распределений. Рассмотрим экспоненциальное распределение с ф.р.  $\bar{F}(x) = e^{-\mu x}$  и нормализующей последовательностью

$$u_n(x) = \frac{1}{\mu}(x + \log n). \quad (4)$$

Тогда можно проверить, что максимум  $M_n$  при больших  $n$  сходится к распределению Гумбеля. Распределение Парето вида

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x_0 + x}\right)^\xi, \quad \xi > 0, \quad x_0 > 0, \quad x \geq 0, \quad (5)$$

относится к области притяжения распределения Фреше, при этом нормализующая последовательность имеет следующий вид:

$$u_n(x) = x_0 n^{1/\xi} x - x_0. \quad (6)$$

Распределение Вейбулла, заданное ф.р. вида

$$F(x) = 1 - e^{-x^\beta}, \quad \beta > 0, \quad x \geq 0, \quad (7)$$

принадлежит области притяжения распределения Гумбеля. При этом нормализующая последовательность имеет вид:

$$u_n(x) = \frac{x(\log n)^{1/\beta-1}}{\beta} + (\log n)^{1/\beta}.$$

В случае строго стационарной последовательности  $\{X_n\}$  для получения асимптотического распределения максимума требуются некоторые дополнительные условия на перемешивание с.в. (см., например, теорему 3.7.1 в [1]), а именно: если для некоторого  $\tau > 0$  определена последовательность  $\{u_n(\tau)\}$  и имеет место сходимость  $n\bar{F}(u_n(\tau)) \rightarrow \tau$ , то соотношение (3) принимает следующий вид:

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \rightarrow e^{-\theta\tau} \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где параметр  $\theta \in [0, 1]$  называется экстремальным индексом последовательности  $\{X_n\}$ . При этом если  $\{\hat{X}_n\}$  есть последовательность н.о.р. с.в. (называемая сопровождающей последовательностью) с тем же (общим) маргинальным распределением  $F$ , что и у исходной последовательности  $\{X_n\}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\hat{M}_n \leq u_n(\tau)) = e^{-\tau},$$

где  $\hat{M}_n = \max(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$ . Таким образом, максимум  $M_n$  исходной последовательности  $\{X_n\}$  и максимум  $\hat{M}_n$  сопровождающей последовательности независимых с.в.  $\{\hat{X}_n\}$  имеют предельное распределение одного и того же типа с теми же нормализующими последовательностями констант  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ , но различаются параметром показателя экспоненты  $\theta > 0$  в формуле (8). Заметим, что если  $\mathbb{P}(M_n \leq u_n(\tau))$  сходится хотя бы для одного значения  $\tau > 0$ , то (8) выполнено при всех  $\tau > 0$  для некоторого фиксированного  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Предел (8) и сходимость  $n\bar{F}(u_n) \rightarrow \tau$  позволяют получить следующее соотношение для вычисления экстремального индекса  $\theta$ :

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{P}(M_n \leq u_n)}{n \log F(u_n)}. \quad (9)$$

Следующая теорема позволяет сравнить экстремальные индексы двух строго стационарных стохастически упорядоченных последовательностей  $\{X_n\}$  и  $\{Y_n\}$ , заданных (маргинальными) ф.р.  $F_X$  и  $F_Y$  соответственно. Обозначим максимумы первых  $n$  значений последовательностей через

$$M_n^X = \max(X_1, \dots, X_n); \quad M_n^Y = \max(Y_1, \dots, Y_n).$$

Будем говорить, что с.в.  $X$  стохастически меньше, чем с.в.  $Y$ , и писать  $X \leq_{st} Y$ , если хвосты ф.р. связаны неравенством [13]

$$\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x) \text{ для любого } x \in (-\infty, \infty). \quad (10)$$

Для случайных последовательностей  $\{X_n\}$  и  $\{Y_n\}$  свойство стохастической упорядоченности  $X_n \leq_{st} Y_n$  также определяется соотношением (10), поскольку они заданы маргинальными ф.р.  $F_X$  и  $F_Y$ .

**Теорема 1.** Пусть строго стационарная последовательность  $\{X_n\}$  задана (общим) распределением  $F_X$ , а строго стационарная последовательность  $\{Y_n\}$  задана распределением  $F_Y$ . Пусть существуют такие нормализующие последовательности  $\{u_n(x) = a_n x + b_n\}$  и  $\{u'_n(x) = a'_n x + b'_n\}$ , что  $a_n, a'_n > 0, n \geq 1, u_n(x), u'_n(x) \rightarrow \infty$  для каждого  $x$  при  $n \rightarrow \infty$  и

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{P}(M_n^X \leq u_n(x)) &\rightarrow H_X(x); \\ \mathbb{P}(M_n^Y \leq u'_n(x)) &\rightarrow H_Y(x), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} n\bar{F}_X(u_n(x)) &\rightarrow \tau(x), \quad n\bar{F}_Y(u'_n(x)) \rightarrow \tau'(x), \\ &n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_n(x) \geq u'_n(x) \text{ для всех } x, n \geq 1. \quad (13)$$

Пусть также последовательности стохастически упорядочены, т. е.

$$\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x) \text{ для всех } x. \quad (14)$$

Тогда экстремальные индексы  $\theta_X$  и  $\theta_Y$  последовательностей соответственно  $\{X_n\}$  и  $\{Y_n\}$  упорядочены следующим образом:

$$\theta_X \geq \theta_Y. \quad (15)$$

**Доказательство.** Напомним, что

$$\mathbb{P}(M_n^X \leq x) = F_X^n(x); \quad \mathbb{P}(M_n^Y \leq x) = F_Y^n(x).$$

Из соотношения (14) следует, что  $F_Y^n(x) \leq F_X^n(x)$  для любого  $x$  и каждого  $n$ . Обозначим

$$q_n(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_Y(u'_n(x))}{\bar{F}_X(u_n(x))}.$$

Тогда из условия (13) вытекает, что  $q_n(x) \geq 1$  и

$$F_Y^n(u'_n(x)) \leq F_X^n(u_n(x)), \quad x \geq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p_n(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(M_n^X \leq u_n(x))}{\mathbb{P}(M_n^Y \leq u'_n(x))} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_X^n(u_n(x))}{F_Y^n(u'_n(x))} = \frac{H_X(x)}{H_Y(x)} \geq 1. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\overline{F}_X(u_n(x)) \rightarrow 0$ , поскольку  $u_n(x) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . То же самое верно в отношении  $\overline{F}_Y(u'_n(x))$ . Используя свойство натурального логарифма  $\log(1-x) \sim -x$  при  $x \rightarrow 0$ , вычислим отношение экстремальных индексов в соответствии с соотношением (9):

$$\begin{aligned} \frac{\theta_X}{\theta_Y} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(M_n^X \leq u_n(x))}{n \log F_X(u_n(x))} \frac{n \log F_Y(u'_n(x))}{\mathbb{P}(M_n^Y \leq u'_n(x))} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_X^n(u_n(x))}{-\overline{F}_X(u_n(x))} \frac{-\overline{F}_Y(u'_n(x))}{F_Y^n(u'_n(x))} = \\ &= q_n(x)p_n(x) \geq 1 \text{ для всех } x \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (15) доказано.  $\square$

Заметим, что для выполнения условия  $u_n(x) \geq u'_n(x)$  достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$x \geq \frac{b'_n - b_n}{a_n - a'_n} := g_n \text{ для всех } n \geq 1. \quad (16)$$

Также отметим, что неравенство (16) выполнено для всех  $x \geq 0$ , если  $\sup_n g_n \leq 0$ .

**Примеры.** 1. Предположим, что  $\{X_n\}$  и  $\{Y_n\}$  имеют экспоненциальное распределение с параметрами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. В этом случае, если  $\mu_1 \geq \mu_2$ , то  $X_n \leq_{st} Y_n$ . Используя соотношение (4), легко найти, что

$$g_n = -\log n \leq 0, \quad n \geq 1.$$

2. Теперь предположим, что последовательно-сти имеют распределение Парето вида (5) с параметрами  $\xi_1, x_0^1$  и  $\xi_2, x_0^2$  соответственно. Если  $\xi_1 \geq \xi_2$  и  $x_0^2 > x_0^1 \geq 1$ , то  $X_n \leq_{st} Y_n$  и неравенство (16) для нормализующих последовательностей вида (6) выполняется. В этом случае из теоремы 1 вытекает требуемое неравенство (15).

3. Аналогично можно сравнить экстремальные индексы двух последовательностей с.в. с распределением Вейбулла (7) с параметрами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно. Например, для случая  $1 > \beta_1 \geq \beta_2 > 0$  свойство упорядоченности  $X_n \leq_{st} Y_n$  выполнено и формула (16) принимает вид:

$$g_n = \frac{\log n((\log n)^{1/\beta_2 - 1/\beta_1} - 1)}{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1 (\log n)^{1/\beta_2 - 1/\beta_1})} \leq 0 \text{ для } n \geq 3.$$

Следовательно, также выполнено неравенство (15) для экстремальных индексов.

### 3 Сравнение экстремальных индексов стационарных времен ожидания систем обслуживания $M/G/1$

В этом разделе покажем, как теорему 1 можно применить для сравнения экстремальных индексов стационарных времен ожидания односерверных систем обслуживания  $M/G/1$ . В частности, продемонстрируем это на примере двух систем обслуживания с одинаковым входным пуассоновским потоком заявок и временами обслуживания, имеющими либо экспоненциальное распределение с параметрами  $\mu_1 \geq \mu_2$ , либо распределение Парето с параметрами  $\xi_1 \geq \xi_2$  и  $x_0^2 > x_0^1 \geq 1$ , либо распределение Вейбулла с параметрами, удовлетворяющими неравенствам  $1 > \beta_1 \geq \beta_2 > 0$ .

Рассмотрим две системы обслуживания  $M/G/1$ :  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma^{(2)}$ . (Будем обозначать индексом  $i$  величины, относящиеся к  $i$ -й системе.) В обеих системах дисциплина обслуживания — первым пришел, первым обслужен. Обозначим  $S^{(i)}$  — типичное время обслуживания и  $T^{(i)}$  — типичные интервалы между приходами заявок,  $\mathbb{E}T^{(i)} = 1/\lambda, i = 1, 2$ .

Теперь сравним в системах  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma^{(2)}$  экстремальные индексы стационарных времен ожидания. Пусть  $\nu_n^{(i)}$  — число заявок в системе,  $Q_n^{(i)}$  — размер очереди и  $W_n^{(i)}$  — время ожидания в очереди в момент прихода в систему  $\Sigma^{(i)}$  заявки с номером  $n, i = 1, 2$ . Обозначим (в случае их существования) пределы по распределению

$$Q_n^{(i)} \Rightarrow Q^{(i)}, \quad \nu_n^{(i)} \Rightarrow \nu^{(i)}, \quad W_n^{(i)} \Rightarrow W^{(i)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

Эти пределы существуют, в частности, если времена между приходами заявок  $T^{(i)}, i = 1, 2$ , являются *нерешетчатыми* и  $\rho_i = \lambda_i \mathbb{E}S^{(i)} < 1, i = 1, 2$  [9]. Обозначим максимумы

$$\begin{aligned} W_n^{(1)*} &= \max(W_1^{(1)}, \dots, W_n^{(1)}), \\ W_n^{(2)*} &= \max(W_1^{(2)}, \dots, W_n^{(2)}), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

**Утверждение 1.** *Предположим, что для систем  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma^{(2)}$  коэффициенты загрузки  $\rho_i < 1, i = 1, 2$ , и выполнены следующие стохастические соотношения:*

$$\nu_1^{(1)} = \nu_1^{(2)} = 0; \quad T^{(1)} =_{st} T^{(2)}; \quad S^{(1)} \leq_{st} S^{(2)}. \quad (17)$$

*Тогда если существуют такие нормализующие последовательности  $\{u_n(x) = a_n x + b_n\}$  и  $\{u'_n(x) = a'_n x + b'_n\}$ , что  $a_n, a'_n > 0, n \geq 1$ , для каждого  $x$*



$u_n(x), u'_n(x) \rightarrow \infty$  и выполнены соотношения (11)–(13) для максимумов стационарных времен ожидания  $W_n^{(1)*}$  и  $W_n^{(2)*}$ , то

$$\theta_{W^{(1)}} \geq \theta_{W^{(2)}}, \quad (18)$$

где  $\theta_{W^{(i)}}$  — экстремальные индексы  $W_n^{(i)*}$ ,  $i = 1, 2$ .

Поясним коротко схему доказательства утверждения 1. Согласно [14], соотношения (17) гарантируют, что

$$Q_n^{(1)} \leq_{st} Q_n^{(2)}, \quad W_n^{(1)} \leq_{st} W_n^{(2)}, \quad n \geq 1.$$

Следовательно, условие (14) теоремы 1 выполнено, что влечет истинность (15) для экстремальных индексов стационарных времен ожидания рассматриваемых систем.

Рассмотрим практические примеры использования утверждения 1. Пусть времена обслуживания имеют экспоненциальное распределение с параметрами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. В этом случае выражение для экстремального индекса стационарного времени ожидания известно в явном виде [10]:

$$\theta_{W^{(i)}} = (1 - \rho_i)^2, \quad i = 1, 2.$$

Легко показать, что предельным распределением максимумов  $W_n^{(1)*}$  является распределение Гумбеля. Если  $\mu_1 \geq \mu_2$ , то времена обслуживания, а следовательно, и стационарные времена ожидания стохастически упорядочены,  $W^{(1)} \geq_{st} W^{(2)}$ . Поскольку  $\rho_1 \leq \rho_2$ , то экстремальные индексы удовлетворяют неравенству (18).

Теперь предположим, что времена обслуживания имеют распределение Парето вида (5) с параметрами  $\xi_1, x_0^1$  и  $\xi_2, x_0^2$  соответственно. Если  $\xi_1 \geq \xi_2$  и  $x_0^2 > x_0^1 \geq 1$ , то времена обслуживания, а следовательно, и стационарные времена ожидания стохастически упорядочены. В работе [11] показано, что распределение хвоста стационарного времени ожидания имеет следующий вид:

$$\mathbb{P}(W^{(i)} > x) \sim \frac{\lambda x_0^i}{\xi_i - 1 - \lambda x_0^i} \left( \frac{x_0^i}{x_0^i + x} \right)^{\xi_i - 1}, \quad i = 1, 2,$$

нормализующие последовательности  $u_n^i(x) = x_0^i n^{1/(\xi_i - 1)} x - x_0^i$  гарантируют, что при  $n \rightarrow \infty$

$$n\mathbb{P}(W^{(i)} > u_n^i(x)) \rightarrow \frac{\lambda x_0^i}{\xi_i - 1 - \lambda x_0^i} x^{-\xi_i + 1}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, асимптотическое распределение максимума стационарного времени ожидания  $W_n^{(i)*}$  имеет распределение Фреше с параметром  $\xi_i - 1$  и, более того, при  $\xi_1 \geq \xi_2$  и  $x_0^2 > x_0^1 \geq 1$  выполнено неравенство для экстремальных индексов (18).

Теперь рассмотрим две системы, в которых времена обслуживания имеют распределение Вейбулла с параметрами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно. Пусть  $1 > \beta_1 \geq \beta_2 > 0$ . В работе [12] показано, что распределение максимума стационарного времени ожидания сходится к распределению типа Гумбеля:

$$\mathbb{P}(W_n^{(i)*} \leq u_n^i(x)) \rightarrow \exp - \frac{\lambda}{\beta_i - \lambda \Gamma(1/\beta_i) \beta_i} e^{-x} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Здесь  $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy$  — гамма-функция, а нормализующая последовательность имеет следующий вид:

$$u_n^i(x) = a_n^i x + b_n^i = \frac{x(\log n)^{1/\beta_i - 1}}{\beta_i} + (\log n)^{1/\beta_i}.$$

При этом соотношения между параметрами  $1 > \beta_1 \geq \beta_2 > 0$  гарантируют стохастическую упорядоченность времен обслуживания, а следовательно, и стационарных времен ожидания, а также упорядоченность нормализующих последовательностей для  $n \geq 3$ , вследствие чего экстремальные индексы стационарных времен ожидания удовлетворяют неравенству (18).

## 4 Заключение

В работе показано, что если исходные стационарные последовательности стохастически упорядочены и существуют предельные распределения для максимумов этих последовательностей, а также упорядочены соответствующие нормализующие последовательности, то экстремальные индексы исходных стационарных последовательностей упорядочены. Этот результат используется для сравнения экстремальных индексов стационарных времен ожидания в двух системах обслуживания  $M/G/1$ , в которых входные потоки совпадают, а времена обслуживания стохастически упорядочены. Рассмотрены примеры систем обслуживания, в которых параметры времен обслуживания подобраны так, что времена обслуживания стохастически упорядочены, нормализующие последовательности их максимумов также упорядочены, а следовательно, упорядочены стационарные времена ожидания и их экстремальные индексы.

## Литература

1. Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzén H. Extremes and related properties of random sequences and processes. — New York, NY, USA: Springer, 1983. 336 p.

2. Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. Modelling extremal events for insurance and finance. Applications of mathematics. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. 660 p.
3. de Haan L., Ferreira A. Extreme value theory: An introduction. — New York, NY, USA: Springer Science + Business Media LLC, 2006. 491 p.
4. Bertail P., Clemencon S., Tressou J. Extreme values statistics for Markov chains via the (pseudo-) regenerative method // *Extremes*, 2009. Vol. 12. Iss. 4. P. 327–360. doi: 10.1007/s10687-009-0081-y.
5. Resnick S. Extreme values, regular variation and point processes. — New York, NY, USA: Springer, 1987. 320 p.
6. Iglehart D. L. Extreme values in GI/G/1 queue // *Ann. Math. Stat.*, 1972. Vol. 3. Iss. 2. P. 627–635. doi: 10.1214/aoms/1177692642.
7. Rootzen H. Maxima and exceedances of stationary Markov chains // *Adv. Appl. Probab.*, 1988. Vol. 20. Iss. 2. P. 371–390. doi: 10.2307/1427395.
8. Asmussen S. Extreme value theory for queues via cycle maxima // *Extremes*, 1998. Vol. 1. Iss. 2. P. 137–168. doi: 10.1023/A:1009970005784.
9. Asmussen S. Applied probability and queues. Stochastic modelling and applied probability. — New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2003. 438 p.
10. Hooghiemstra G., Meester L. E. Computing the extremal index of special Markov chains and queues // *Stoch. Proc. Appl.*, 1996. Vol. 65. Iss. 2. P. 171–185. doi: 10.1016/S0304-4149(96)00111-1.
11. Peshkova I., Morozov E., Maltseva M. On regenerative estimation of extremal index in queueing systems // *Distributed computer and communication networks: Control, computation, communications* / Eds. V. M. Vishnevskiy, K. E. Samouylov, D. V. Kozyrev. — Lecture notes in computer science ser. — Cham, Switzerland: Springer, 2021. Vol. 13144. P. 251–264. doi: 10.1007/978-3-030-92507-9\_21.
12. Peshkova I., Morozov E., Maltseva M. On comparison of waiting time extremal indexes in queueing systems with Weibull service times // *Comm. Com. Inf. Sc.*, 2022 (in press).
13. Ross S., Shanthikumar J., Zhu Z. On increasing-failure-rate random variables // *J. Appl. Probab.*, 2005. Vol. 42. P. 797–809. doi: 10.1239/jap/1127322028.
14. Whitt W. Comparing counting processes and queues // *Adv. Appl. Probab.*, 1981. Vol. 13. P. 207–220. doi: 10.2307/1426475.

Поступила в редакцию 09.01.22

---

## THE COMPARISON OF WAITING TIME EXTREMAL INDEXES IN $M/G/1$ QUEUEING SYSTEMS

I. V. Peshkova

Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Russian Federation

**Abstract:** The theorem which states that if the initial stationary sequences are stochastically ordered, there are limiting distributions for maxima and the normalizing sequences are ordered, then their extreme indexes are also ordered is proved. This result is applied to compare the extreme indexes of stationary waiting times in two  $M/G/1$  systems with the same input flows and stochastically ordered service times. Three examples of queueing systems with exponential distribution, Pareto distribution, and Weibull distribution of service times are considered. For these distributions, the relations between the parameters guaranteeing the stochastic ordering of the distributions and the normalizing sequences are obtained.

**Keywords:** extreme value distributions; extremal index; queueing system; stochastic ordering

**DOI:** 10.14357/19922264220109

### Acknowledgments

The research has been prepared with the support of the Russian Science Foundation according to the research project No. 21-71-10135.

### References

1. Leadbetter, M. R., G. Lindgren, and H. Rootzen. 1983. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. New York, NY: Springer. 336 p.
2. Embrechts, P., C. Kluppelberg, and T. Mikosch. 1997. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Berlin, Heidelberg: Springer. 660 p.
3. de Haan, L., and A. Ferreira. 2006. *Extreme value theory: An introduction*. New York, NY: Springer Science + Business Media LLC. 491 p.
4. Bertail, P., S. Clemencon, and J. Tressou. 2009. Extreme values statistics for Markov chains via the (pseudo-) regenerative method. *Extremes* 12(4):327–360. doi: 10.1007/s10687-009-0081-y.

5. Resnick, S. 1987. *Extreme values, regular variation and point processes*. New York, NY: Springer. 320 p.
6. Iglehart, D. L. 1972. Extreme values in GI/G/1 queue. *Ann. Math. Stat.* 3(2):627–635. doi: 10.1214/aoms/1177692642.
7. Rootzen, H. 1988. Maxima and exceedances of stationary Markov chains. *Adv. Appl. Probab.* 20(2):371–390. doi: 10.2307/1427395.
8. Asmussen, S. 1998. Extreme value theory for queues via cycle maxima. *Extremes* 1(2):137–168. doi: 10.1023/A:1009970005784.
9. Asmussen, S. 2003. *Applied probability and queues*. New York, NY: Springer-Verlag. 438 p.
10. Hooghiemstra, G., and L. E. Meester. 1996. Computing the extremal index of special Markov chains and queues. *Stoch. Proc. Appl.* 65(2):171–185. doi: 10.1016/S0304-4149(96)00111-1.
11. Peshkova, I., E. Morozov, and M. Maltseva. 2021. On regenerative estimation of extremal index in queueing systems. *Distributed computer and communication networks*. Eds. V.M. Vishnevskiy, K. E. Samouylov, and D.V. Kozyrev. Lecture notes in computer science ser. Springer. 13144:251–264. doi: 10.1007/978-3-030-92507-9\_21.
12. Peshkova, I., E. Morozov, and M. Maltseva. 2022 (in press). On comparison of waiting time extremal indexes in queueing systems with Weibull service times. *Comm. Com. Inf. Sc.*
13. Ross, S., J. Shanthikumar, and Z. Zhu. 2005. On increasing–failure–rate random variables. *J. Appl. Probab.* 42:797–809. doi: 10.1239/jap/1127322028.
14. Whitt, W. 1981. Comparing counting processes and queues. *Adv. Appl. Probab.* 13:207–220. doi: 10.2307/1426475.

*Received January 9, 2022*

## Contributors

**Peshkova Irina V.** (b. 1975) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Russian Federation; iaminova@petsu.ru

# УПРОЩЕННЫЙ ЯЗЫК ЗРИТЕЛЬНЫХ ОБРАЗОВ

Ш. Б. Шихиев<sup>1</sup>, Ф. Ш. Шихиев<sup>2</sup>

**Аннотация:** Реализация модели естественного языка (ЕЯ) как информационной системы (ИС) нуждается в определенных сведениях о том, как функционирует сама языковая способность человека в его физиологии и в какой последовательности должны взаимодействовать две ее автономные составляющие: грамматика и семантика как программные обеспечения (ПО) языкового явления в цифровой технике. Изучение этой задачи следует начинать с реализации языка зрительных образов, так как в этом случае экран монитора можно использовать в качестве «органа зрения» носителя языка (компьютера), что позволяет вести параллельную обработку одной и той же графической информации в двух формах: в форме текста (синтаксический анализ) и в форме рисунка (семантический анализ). Глубина мыслительного процесса зависит от способности ИС трансформировать информацию из одной формы (текстовой) в другую (графическую), и наоборот.

**Ключевые слова:** естественный язык; синтаксис; семантика; словарь; зрительный образ; семантическая сеть; синтаксическая сеть; трансформация; алгоритм; память

DOI: 10.14357/19922264220110

## 1 Введение

Статья завершает цикл работ, представленный в [1,2]. В [1] можно ознакомиться с приемами кодирования морфологических функций, словоформ и словосочетаний. В [2] описаны математические модели морфологии, синтаксиса и семантики компьютерной лингвистики. Реализация описанной в [2] модели ЕЯ как ИС нуждается в демонстрации соответствия между службами (элементами) этих систем. Для этого придется подробно описать компьютерную модель ЕЯ хотя бы для некоторой языковой игры, например для языка визуальных объектов.

## 2 Язык

Язык — творение эволюции; в нем проявлена сущность природы вещей: единство *корпускулярных* структур (слов) и *непрерывной* среды силовых полей нейронов, образующих память, в которой хранятся *знания* (значения слов) — образы *внешних явлений* [3]. Таким образом, каждый *элемент языка* (слово и сочетание слов) представляет собой ипостась (единство двух противоположных проявлений субстанции), и потому *элементы языка* имеют свои имена, и значения; поэтому и *языкознание* также представлено двумя частями: *грамматикой*, изучающей семиотику *элементов языка*, и *семантикой*, изучающей значения тех же *элементов языка*.

Символ, именуемый (обозначающий) некоторое *знание*, сам является *знанием* как всякое восприятие, имеющее место в органах чувств. Например, слово «дом» представлено в памяти человека двумя различными *знаниями*: *знанием* о семиотике этого слова из трех букв и *знанием* о строении определенной конструкции и предназначении.

Физиология человека позволяет одновременно воспринимать активность (клеток) как в *органах чувств*, так и в *памяти*. Орган, следящий за активностью этих двух областей организма, называется *сознанием*.

*Информация* генерируется в органах чувств под воздействием внешних сил и в памяти, элементы которой могут активизироваться под воздействием другого *связанного* (ассоциированного) с ним *знания*.

*Память* — универсальное образование живых клеток для хранения информации, представляющей собой материальный (физиологический) *образ* внешнего явления. Под материальным *образом* явления (вещи) будем подразумевать физико-химическое состояние нейроточки, которая была образована под воздействием данного явления (вещи). В памяти, в частности, хранятся материальные образы слов и их значений.

Область, представляющая собой знание в органах чувств и в памяти, назовем *нейроточкой*. Под единством мира слов и мира представлений будем подразумевать *нейронные связи*: (1) знание в органах

<sup>1</sup> Дагестанский государственный университет, sh\_sh.b51@mail.ru

<sup>2</sup> Дагестанский государственный университет, fuad@mail.ru

чувств и его копия в памяти и знания в памяти; (2) знания о вещах; (3) знание о слове и о его значении; (4) если знания о вещах связаны, то связаны и знания о словах, обозначающих их. Структуру из *нейроточек* и *нейронных связей* между ними принято называть *нейронной сетью*.

*Нейронную сеть*, в вершинах (*нейроточках*) которой хранятся знания о словах, назовем *языковой (синтаксической) нейронной сетью* (SinNet), происходящие в ней процессы — *языковым явлением (языковой способностью)*, а его внешнее проявление — *языковой активностью*.

Ниже предлагается *модель языковой способности* в трех формах: *словесной, математической и компьютерной*.

**Словесная модель языка.** *Нейронную сеть*, в вершинах которой хранятся знания о вещах, назовем *семантической сетью* (SemNet). Из перечисленных выше видов связей в памяти следует *изоморфизм языковых сетей*: SemNet и SinNet [4].

Элемент памяти может находиться в *активном состоянии* и являться (*сознаваемым*) элементом сознания. *Сознание* — надстройка над памятью, способная реагировать на активное состояние элемента памяти.

Примитивная *языковая способность человека (мышление)* — это способность обхода вершин *языковой сети* по определенным правилам. От степени активности языковой сети в формировании предложений зависит тип мышления человека.

### 3 Понятие

*Понятие* — именованное знание, т.е. *знание*, к которому прикреплено *слово* (имя знания). Понятие — пара вершин ( $v, w$ ), где  $v$  и  $w$  принадлежат сетям SemNet и SinNet соответственно, а  $v \rightarrow w$  задает *изоморфизм* сетей SemNet и SinNet. Активность одного из элементов пары  $v$  и  $w$  приводит в активное состояние и второй ее элемент.

**Математическая модель языка.** Функционирование языка поддерживают сети:

$$\text{SemNet} = (\text{IntWorld}, R); \quad \text{SinNet} = (\text{IntWord}, Q),$$

где IntWorld — множество *понятий*;  $R$  — *семантические* отношения между *понятиями*, т.е.  $R$  — подмножество прямого произведения  $\text{IntWorld} \times \text{IntWorld}$ ; IntWord — множество *слов* (имен *понятий*);  $Q$  — *синтаксические* отношения между *словами*, т.е.  $Q$  — подмножество прямого произведения  $\text{IntWord} \times \text{IntWord}$ .

Предполагается, что SemNet и SinNet — реальные структуры в памяти человека, *изоморфизм*

$f(\text{IntWord}) \rightarrow \text{IntWorld}$  этих графов, т.е. соответствие между знаниями и их именами, реализован в памяти нейронными связями. Эти две сети образуют ИС, известную как ЕЯ.

Носителю языка для самостоятельного мышления не нужны элементы внешнего мира (ввиду изоморфизма сетей); язык функционирует как явление внутреннего мира человека. Память человека располагает всем тем, что нужно для анализа (распознавания) и синтеза (построения) предложений языка. Человек идентифицирует себя со своим сознанием.

В то же время человек составляет одно целое с внешним миром. Вершины сети SemNet имеют во внешнем мире свои прообразы (вещи) — ExtWorld. Отношения между понятиями в сети SemNet установлены благодаря органам чувств или путем размышлений.

Вершины сети SinNet имеют свои прообразы — мир слов ExtWord во внешнем мире. Поэтому сети SemNet и SinNet — нечто сотворенное благодаря уникальным возможностям физиологии человека. В ходе формирования языка сеть SinNet была дополнена новыми связями для поддержания правил грамматики.

О модели грамматики (морфологии и синтаксиса) можно прочесть в [2, 5]. Для конкретного ЕЯ можно построить сеть SinNet = (Lex, SR), где Lex — лексика данного языка; SR — синтаксические отношения, определенные на лексике Lex [6], так, что элементы SinNet порождают всевозможные выражения на этом языке.

**Компьютерная модель языка.** В небольшой статье трудно описать шаги в реализации систем SemNet и SinNet на компьютере. Ограничимся только привязкой элементов множеств: ExtWorld, IntWorld, IntWord и ExtWord к известным службам компьютера. На рис. 1 показана схема отношений между этими множествами.

В нижней части рис. 1 расположены элементы внешнего мира: ExtWorld и ExtWord. Для пользователя «внешним миром» служит экран монитора, разделенный на две части — в левой части экрана рисуются геометрические фигуры, а в правой

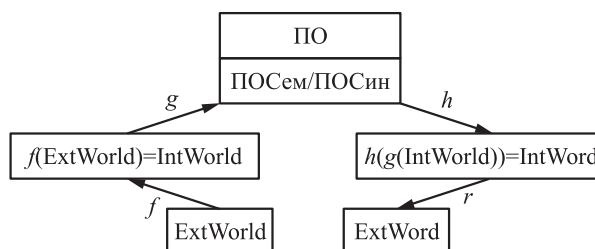


Рис. 1 Отношения между составляющими языка

части экрана отображаются выражения на ЕЯ. Программное обеспечение, состоящее из ПОСем и ПОСин, должно обеспечить функционирование языка зрительных образов: сформировать словесное описание геометрической фигуры из левой части или, наоборот, нарисовать фигуру по ее описанию. На рис. 1 показаны шаги преобразования элементов ExtWorld в элементы ExtWord, и наоборот, т.е. выполняются функции языка. Отображения  $f$ ,  $g$ ,  $h$  и  $r$  реализуются в виде программ. Технология представления графических объектов и слов (строк) в оперативной памяти (ОП) хорошо известна, и они же могут быть отображены на экране монитора.

Задача не нова. Ценность представляет способ ее решения. Здесь предлагается алгоритм решения этой задача, имитирующий те правила, которые заложены в основе языковой способности человека.

Изучать «физиологию языка» экспериментально нереально. А на компьютере можно экспериментировать и оценить жизнеспособность доступных наблюдению фрагментов языкового явления. Возможности компьютера в «зрительном восприятии» и в «усвоении» грамматики ЕЯ — шанс для такого эксперимента.

«Зрительное восприятие» компьютера достигается определением всей терминологии графических объектов (*примитивов*) посредством геометрии, построенной на битах (пикселях), а операции над объектами представлены алгоритмами. Будем считать, что соответствующие программы для распознавания и преобразование фигур уже имеются.

Об «усвоении» грамматики ЕЯ компьютером можно посмотреть в [1, 2]. Каждый носитель языка является мыслителем; суть мышления заключается в построении одного выражения из двух имеющихся. А мышление в области зрительных образов заключается в построении выражения «синий отрезок» из двух слов «синий» и «отрезок», которые были возвращены программой распознавания. И наоборот: программно «угадать», какое отношение имеют слова «синий» и «отрезок» из выражения «синий отрезок» к фигуре с названием «синий отрезок». Здесь поможет *синтаксическая семантика*, которая указывает на явную связь между *синтаксическими отношениями* в словосочетании «синий отрезок» и *семантическими отношениями* между явлениями (элементами геометрии) «синий» и «отрезок».

## 4 Пример

*Синий экран* размера  $1200 \times 800$  пусть представлен в памяти 3 840 000 битами (растровое изображение,

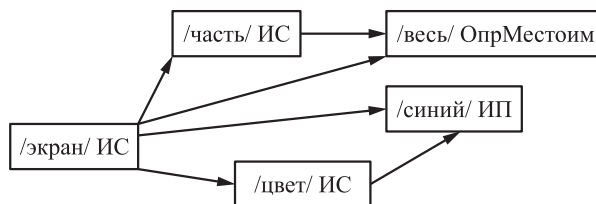


Рис. 2 Фрагмент GSem семантической сети SemNet

глубина цвета — 4). Программа  $g$  из ПОСем устанавливает *синий цвет у части экрана*, состоящей из *всех* его пикселей (в этом ее назначение); возвращает граф GSem из этих пяти выделенных курсивом слов (рис. 2) и передает его программе  $h$ . В вершине графа GSem указан термин и часть речи (ИС — имя существительное; ИП — имя прилагательное).

Граф GSem является подграфом семантической сети SemNet, порожденным пятью вершинами, а сеть SemNet, разумеется, хранится в ОП.

Программа  $h$  из ПОСем предназначена для формирования выражения (русского языка), в котором будет заключена информация, содержащаяся в графе GSem (т.е. результат бессловесного мышления посредством программы  $g$ ).

Работа программы  $h$  описана в [5]; она выделяет в GSem корневые деревья, удовлетворяющие известным условиям. Одно из требований, например, — корнем дерева должна быть в этом примере вершина «экран». Обходу дерева соответствует определенное выражение. Не вдаваясь в подробности, перечислим некоторые выражения, возвращаемые программой  $h$ : *экран весь цвета синего; экран цвета синего; экран синий* и т.д. Программа  $r$  выводит на экран выражения, возвращенные программой  $h$ .

Решение обратной задачи построения фигуры, описанной выражением на ЕЯ, состоит из тех же шагов (решения прямой задачи), но исполняются они в обратном порядке.

Этим примером можно было бы и завершить описание принципа работы имитатора языка зрительных объектов, но будет полезно указать на некоторые нюансы, которые могут встречаться при реализации операции  $hg$ .

Во-первых, следует сказать о хорошо известных «разночтениях» рисунка. Например, вырез белого цвета внутри темной прямоугольной области может восприниматься как темная область, на которую наложен предмет белого цвета.

Реализация одной (или обеих) ситуаций из двух имеющихся зависит от контекста, в котором находится анализатор рисунка. Под *контекстом* подразумевается подграф, который будет выбран из семантической сети после просмотра экрана. И далее

выбирается вариант дерева, оно и есть выражение языка.

Задача словесного описания геометрических фигур усложнится, если они будут в движении, так как описание движения предметов требует наличия системы координат, в которой оно происходит. Только после этого можно строить и оперировать деревьями (в скобочной форме) следующего содержания: **отрезок (верхний, треугольник(синий))** и соответствующим выражением после его левостороннего обхода: «**отрезок верхний треугольника синего**» или «**верхний отрезок синего треугольника**».

Завершим статью описанием пошагового алгоритма (схемы) трансформации в выражение ЕЯ простого рисунка из отрезка красного цвета и ломаной из трех звеньев синего цвета. Алгоритм состоит из нескольких шагов.

**Шаг 1.** Процедура восприятия экрана. На экране выделяются пиксели одного цвета, отличного от белого (цвета экрана). По результатам этого поиска в сети SemNet выделяются вершины *экран*, *отрезок* и *красный* и дуги (*экран*, *отрезок*) и (*отрезок*, *красный*). (Вершина *экран* всегда имеется в SemNet; если вершин *отрезок* и *красный* нет в сети SemNet, то они и две упомянутые дуги добавляются SemNet.)

Далее выделяются пиксели синего цвета; они образуют *ломаную*. В сети SemNet выделяются дуги: (*экран*, *ломаная*), (*ломаная*, *синий*), (*ломаная*, *звено*) и (*звено*, *четыре*).

**Шаг 2.** По семантическому признаку дуги ( $v, w$ ) определяются синтаксические формы ее элементов  $v$  и  $w$ , а следовательно, и словосочетание « $v, w$ ». (Каждой дуге сети SemNet приписан признак; например, признаком дуги (*звено*, *четыре*) служит количество (*звеньев ломаной*) и ей соответствует словосочетание «звеньев четыре» или «четыре звена».)

**Шаг 3.** Вершины и дуги, выделенные в SemNet при просмотре экрана, порождают некоторый подграф GSem = (DSem, USem), которому в сети SinNet соответствует граф GSin = (DSin, USin).

**Шаг 4.** Корневому дереву TSem в GSem соответствует дерево TSin в GSin. Примеры таких деревьев приводятся в [5]. Обход остового дерева TSin представляет собой выражение, описывающее заданный рисунок.

## 5 Заключение

Разработка синтаксических анализаторов давно вошла в практику разработки программ искусственного интеллекта. Разработчики анализаторов часто умалчивают об этапе проектирования программ. Здесь на одном частном примере была продемонстрирована технология функционирования анализатора.

## Литература

1. Мирзабеков Я. М., Шихиев Ш. Б. Дискретный анализ в синтаксическом анализе // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 2. С. 98–104.
2. Шихиев Ш. Б., Шихиев Ф. Ш. Инкапсуляция семантических представлений в элементы грамматики // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 1. С. 121–127.
3. Ауробиндо Шри. Великая психология / Пер. с англ. — Введение в психологическую мысль сер. — М.: АСТ, 2006. 543 с. (Aurobindo Sri. A greater psychology. — An introduction to the psychological thought ser. — Jeremy P. Tarcher., 2001. 426 p.)
4. Харари Ф. Теория графов / Пер. с англ. — М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с. (Harari F. Graph theory. — Reading, MA, USA: Addison-Wesley Publishing Co., 1969. 274 p.)
5. Шихиев Ф. Ш. Формализация и сетевая формулировка задачи синтаксического анализа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — СПб.: СПбГУ, 2006. 171 с.
6. Грамматика русского языка: в 2 т. / Ред. коллегия: акад. В. В. Виноградов, Е. С. Истрина, С. Г. Бархударов. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 1. 719 с.

Поступила в редакцию 06.07.20

## SIMPLIFIED LANGUAGE FOR VISUAL IMAGES

Sh. B. Shihiev and F. Sh. Shihiev

Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Dagestan State University, 43-a Gadzhiev Str., Makhachkala 367000, Republic of Dagestan, Russian Federation

**Abstract:** The implementation of the natural language model as an information system needs certain information about how the language ability of a person functions in his/her physiology and in what sequence its two autonomous components should interact: grammar and semantics as software for the linguistic phenomenon in digital technology. The study of this problem should begin with the implementation of the language of visual images since in this case,

the monitor screen can be used as the “organ of the visual system” of a native speaker (computer) which allows parallel processing of the same graphic information in two forms: in the form of text (syntactic analysis) and in the form of image (semantic analysis). The depth of the thought process depends on the ability of the information system to transform information from one form (text) to another (graphic) and vice versa.

**Keywords:** natural language; syntax; semantics; dictionary; vision; semantic network; syntactic network; transformation; algorithm; memory

**DOI:** 10.14357/19922264220110

## References

1. Mirzabekov, Ya. M., and Sh. B. Shihiev. 2018. Diskretnyy analiz v sintaksicheskoy analize [Discrete analysis in parsing]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(2):98–104.
2. Shihiev, Sh. B., and F. Sh. Shihiev. 2020. Inkapsulyatsiya semanticheskikh predstavleniy v elementy grammatiki [Incapsulation of semantic representations into elements of a grammar]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(1):121–127.
3. Aurobindo, Sri. 2001. *A greater psychology*. An introduction to the psychological thought ser. Jeremy P. Tarcher. 426 p.
4. Harari, F. 1969. *Graph theory*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co. 274 p.
5. Shihiev, F. Sh. 2006. Formalizatsiya i setevaya formulirovka zadachi sintaksicheskogo analiza [Formalization and network interpretation of a parsing task]. St. Petersburg: St. Petersburg State University. PhD Diss. 171 p.
6. Vinogradov, V. V., E. S. Istrina, and S. G. Barkhudarova, eds. 1960. *Grammatika russkogo yazyka* [Russian language grammar]. Moscow: AN SSSR. Vol. 1. 719 p.

Received July 6, 2020

## Contributors

**Shihiev Shukur B.** (b. 1951) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Dagestan State University, 43-a Gadzhiev Str., Makhachkala 367000, Republic of Dagestan, Russian Federation; sh\_sh\_b51@mail.ru

**Shihiev Fuad Sh.** (b. 1980) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Dagestan State University, 43-a Gadzhiev Str., Makhachkala 367000, Republic of Dagestan, Russian Federation; fuad@mail.ru



# ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРОГОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ СКОРОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $G/M/1^*$

Я. М. Агаларов<sup>1</sup>

**Аннотация:** Рассматривается задача оптимизации управления переключением скорости обслуживания в системе массового обслуживания (СМО) типа  $G/M/1$  с целевой функцией, учитывающей плату за обслуживание заявки, штраф за задержку заявки в очереди, штраф за отклонение заявки, штраф за простой прибора обслуживания и затраты на техническое обслуживание системы. В рамках этой задачи рассмотрена аналогичная задача для СМО с ограниченной очередью. Она сформулирована как задача нелинейного программирования, в которой целевой функцией служит доход системы, а допустимым планом (переменной управления) — длина очереди. Доказано свойство унимодальности функции дохода, сформулированы условия существования оптимального порогового управления переключением скорости обслуживания, необходимые и достаточные условия оптимальности управления.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; пороговое управление; доход системы

**DOI:** 10.14357/19922264220111

## 1 Введение

Существуют много реальных систем (экономических, транспортных, информационных и т.д.), для расчета экономической и технической эффективности которых на стадии проектирования в качестве математических моделей используют СМО. С использованием этих моделей, как правило, решают задачи анализа, синтеза и выбора оптимального управления для проектируемой системы (см., например, [1–3]). Исследуемой ниже одной из таких задач посвящен ряд публикаций (см., например, [4–8]), в которых она сформулирована как задача поиска оптимального порогового значения длины очереди или времени пребывания заявки, по достижении которого переключается скорость обслуживания с целью максимизации дохода СМО. В работе [5] изучена система с простейшим потоком, экспоненциальным обслуживанием, произвольным числом симметричных резервных каналов и гистерезисной стратегией. Показано, что оптимальная стратегия включения и отключения резервных каналов является безгистерезисной. Приведены соображения по минимизации целевой функции, учитывающей штрафы за потери и задержки заявок в очереди, путем оптимизации стратегии включения и отключения резервных каналов. В рассмотренной в [6] однолинейной системе входящий поток — простейший, время обслуживания — экспоненциальное с интенсивностью об-

служивания, зависящей от текущего времени пребывания в системе заявки. Получено уравнение для оптимальной интенсивности обслуживания при целевой функции, учитывающей потери и амортизацию. В работе [7] изучена однолинейная СМО с простейшим входным потоком, экспоненциальным обслуживанием и с однотипным резервным прибором, управляемым по текущему времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Проведена оптимизация системы при учете потерь на ожидание и амортизацию. Работа [8] посвящена анализу СМО с бесконечным накопителем, основным и резервным прибором, с экспоненциальным обслуживанием, скачкообразной интенсивностью входного дважды стохастического пуассоновского потока.

Ниже приведены результаты исследования задачи максимизации дохода СМО типа  $G/M/1$  с переключением скорости обслуживания при достижении длиной очереди порогового значения.

## 2 Постановка задачи

Рассматривается СМО типа  $G/M/1$  с одним прибором обслуживания и неограниченной очередью, на которую поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения вероятностей  $A(t)$ . Прибор может работать в одном из двух скоростных режимов, выбираемом в момент поступления заявки в зависимости от числа заявок

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-07-00804).

<sup>1</sup> Федеральний исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, agglar@yandex.ru

в системе ( $i$ ) и не меняющемся до поступления следующей заявки. Первый режим назначается при  $i \geq 0$ , если  $i \leq h_1 - 1$ ,  $h_1 \geq 1$ , а второй — если  $i \geq h_1$ . Время обслуживания заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_1 > 0$  при первом режиме функционирования прибора и с параметром  $\mu_2 \geq \mu_1$  при втором режиме. Величину  $h_1$  будем называть пороговым значением числа заявок в системе.

Заявка обслуживается на приборе в порядке поступления и покидает систему только при завершении обслуживания, освободив одновременно прибор и накопитель, а на освободившийся прибор поступает очередная заявка из накопителя (если такая есть).

Система получает доход, зависящий от следующих параметров:

$C_0 \geq 0$  — плата, получаемая системой, если поступившая заявка обслужена системой (принята в накопитель);

$C_1 \geq 0$  — величина штрафа, который платит система, если поступившая заявка отклонена;

$C_2 \geq 0$  — штраф за единицу времени ожидания заявки в системе;

$C_3 \geq 0$  — штраф за единицу времени простоя единицы пропускной способности прибора;

$C_{1,4} \geq 0$  — затраты за единицу времени технического обслуживания системы при первом режиме работы;

$C_{2,4} \geq C_{1,4}$  — затраты за единицу времени технического обслуживания системы при втором режиме работы.

Под доходом системы будем понимать суммарный доход с учетом всех вышеуказанных составляющих.

$D^{h_1}$  — предельное среднее значение дохода системы в единицу времени при пороге  $h_1$ ;

$g^{h_1}(a)$  — предельное среднее значение суммарного дохода системы, усредненного по числу поступивших заявок при пороге  $h_1$ ;

$q_i^{h_1}$  — средний доход, получаемый системой в состоянии  $i$  при пороге  $h_1$ .

Предельное среднее значение суммарного дохода системы, усредненного по числу поступивших заявок при пороге  $h_1$ , равно

$$g^{h_1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N_{\text{вх}}(T)} \frac{d_n^{h_1}}{N_{\text{вх}}(T)}.$$

Предельное среднее значение дохода системы в единицу времени при пороге  $h_1$  равно

$$\begin{aligned} D^{h_1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N_{\text{вх}}(T)} \frac{d_n^{h_1}}{T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{вх}}(T)}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N_{\text{вх}}(T)} \frac{d_n^{h_1}}{N_{\text{вх}}(T)} = \frac{g^{h_1}}{\bar{v}}, \end{aligned}$$

где  $d_n^{h_1}$  — доход, полученный системой при пороге  $h_1$  за  $n$ -ю поступившую заявку;  $N_{\text{вх}}(T)$  — число поступивших за отрезок времени  $[0, T]$  заявок.

Ставится задача максимизации функции  $D^{h_1}$  по  $h_1 > 0$ , которая эквивалентна задаче: найти оптимальный порог  $h_1^* > 0$  такой, что

$$\max_{h_1 > 0} g^{h_1} = g^{h_1^*}. \quad (1)$$

### 3 Метод решения

Рассмотрим задачу (1) для вспомогательной СМО, отличающейся от описанной выше в разд. 2 только тем, что число мест в накопителе ограничено величиной  $h_2 = h_1 + a$ ,  $h_1 \geq 1$ ,  $a = \text{const} \geq 0$ . В этой системе второй режим включается, если заявка застает в системе  $i$  заявок,  $h_1 \leq i \leq h_2$ , и отключается, если в момент поступления  $i < h_1$ . Заявка, заставляющая систему в состоянии  $h_2$ , теряется.

Отметим, что процесс обслуживания заявок в данной системе описывается цепью Маркова с одним положительным возвратным классом состояний  $\{0, \dots, h_2\}$ , где переходы цепи определяются моментами поступления заявок, а состояние цепи — числом заявок, находящихся в системе в момент поступления.

Введем обозначения:

$\bar{v}$  — первый момент функции распределения  $A(t)$ ,  $0 < \bar{v} < \infty$ ;

$\{\pi_i^{h_1}, 0 \leq i \leq h_2\}$  — стационарное распределение вероятностей цепи при пороге  $h_1$  ( $\pi_i^{h_1}$  — стационарная вероятность того, что цепь находится в состоянии  $i$ );

$g^{h_1}(a)$  — предельное среднее значение суммарного дохода вспомогательной системы.

Из определения вложенной цепи Маркова следует:

$$g^{h_1}(a) = \sum_{i=0}^{h_2} \pi_i^{h_1} q_i^{h_1}. \quad (2)$$

Выпишем выражения для стационарных вероятностей  $\pi_i^{h_1}$ ,  $i = 0, \dots, h_2$ . Для вероятностей переходов  $p_{i,j}^{h_1}$  вложенной цепи Маркова справедлива формула:

$$p_{i,j}^{h_1} = \begin{cases} r_{i,i+1-j}^{h_1}, & 0 \leq i \leq h_2 - 1, 1 \leq j \leq i + 1; \\ r_{i,h_2-j}^{h_1}, & i = h_2, 1 \leq j \leq h_2; \\ 1 - \sum_{m=0}^{h_2-1} r_{i,m}^{h_1}, & i \leq h_2 - 1, j = 0; \\ 1 - \sum_{m=0}^{h_2-1} r_{i,m}^{h_1}, & i = h_2, j = 0. \end{cases}$$

Здесь  $m \geq 0$ ;  $r_{i,m}^{h_1}$  — вероятность того, что в состоянии  $i$  будут обслужены ровно  $m$  заявок:

$$r_{i,m}^{h_1} = \int_0^\infty \frac{(\mu_i^{h_1} t)^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} t} dA(t),$$

где

$$\mu_i^{h_1} = \begin{cases} \mu_1, & 0 \leq i \leq h_1 - 1; \\ \mu_2, & h_2 \leq i \leq h_2. \end{cases}$$

Для рассматриваемой цепи Маркова при пороге  $h_1$  стационарное распределение вероятностей является единственным решением системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \pi_0^{h_1} &= \sum_{i=0}^{h_1} \pi_i^{h_1} p_{i,0}^{h_1}; \\ \pi_j^{h_1} &= \sum_{i=j-1}^{h_2} \pi_i^{h_1} p_{i,j}^{h_1}, \quad 1 \leq j \leq h_2; \\ \sum_{i=0}^{h_2} \pi_i^{h_1} &= 1, \quad \pi_i^{h_1} > 0, \quad 0 \leq i \leq h_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из (3), заменив в каждом уравнения  $\pi_j^{h_1}$  на  $R_j^{h_1} \pi_{h_2}^{h_1}$  и исключив последовательно в каждом уравнении  $R_j^{h_1}$  с наименьшим индексом, получим рекуррентные формулы для вычисления стационарных вероятностей состояний  $\pi_j^{h_1}, 0 \leq j \leq h_2$ :

$$\pi_j^{h_1} = \frac{R_j^{h_1}}{\sum_{i=0}^{h_2} R_i^{h_1}}, \quad 0 \leq j \leq h_2, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} R_{h_2}^{h_1} &= 1; \quad R_{h_2-1}^{h_1} = \frac{1 - r_{h_2,0}^{h_1}}{r_{h_2,0}^{h_1}}; \\ R_{j-1}^{h_1} &= \frac{R_j^{h_1}(1 - r_{j,1}^{h_1})}{r_{j-1,0}^{h_1}} - \\ &= \frac{\sum_{i=j+1}^{h_2-1} R_i^{h_1} r_{j,i+1-j}^{h_1} - R_{h_2}^{h_1} r_{h_2,h_2-j}^{h_1}}{r_{j-1,0}^{h_1}}, \quad h_1 + 1 \leq j \leq h_2 - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{h_1-1}^{h_1} &= \frac{R_{h_1}^{h_1}(1 - r_{h_1,1}^{h_1})}{r_{h_1-1,0}^{h_1}} - \\ &= \frac{\sum_{i=h_1+1}^{h_2-1} R_i^{h_1} r_{i,i+1-j}^{h_1} - R_{h_2}^{h_1} r_{h_2,h_2-h_1}^{h_1}}{r_{h_1-1,0}^{h_1}}; \\ R_{j-1}^{h_1} &= \frac{R_j^{h_1}(1 - r_{j,1}^{h_1})}{r_{j-1,0}^{h_1}} - \\ &= \frac{\sum_{i=j+1}^{h_1-1} R_i^{h_1} r_{i,i+1-j}^{h_1} - \sum_{i=h_1}^{h_2-1} R_i^{h_1} r_{i,i+1-j}^{h_1}}{r_{j-1,0}^{h_1}} - \\ &= \frac{R_{h_2}^{h_1} r_{h_2,h_2-j}^{h_1}}{r_{j-1,0}^{h_1}}, \quad 1 \leq j \leq h_1 - 1. \end{aligned}$$

Докажем несколько лемм.

**Лемма 1.** Среднее значение дохода, получаемого системой при пороге  $h_1$  в состоянии  $i$ , равно

$$q_i^{h_1} = \begin{cases} d_i^{h_1} + C_0, & 0 \leq i \leq h_2 - 1; \\ d_{h_2-1}^{h_1} - C_1, & i = h_2, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} d_i^{h_1} &= \frac{C_2}{\mu_i^{h_1}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i+1} (m-1) m r_{i,m}^{h_1} - i \sum_{m=1}^{i+1} m r_{i,m}^{h_1} - \right. \\ &= \frac{1}{2} i(i+1) \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} \left. - C_3 \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1) r_{i,m}^{h_1} - \right. \\ &= C_4^{h_1}(i) \bar{v}, \quad C_4^{h_1}(i) = \begin{cases} C_{1,4}, & 0 \leq i \leq h_1 - 1; \\ C_{2,4}, & h_1 \leq i \leq h_2 - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Фиксируем состояние  $i$ , и пусть время нахождения системы в состоянии  $i$  равно  $v$ . Найдем выражения для суммарного среднего времени ожидания всех заявок в очереди и среднего времени простоя прибора в состоянии  $i$ , т. е. в интервале времени  $(0, v]$ .

Рассмотрим случайную величину (СВ) вида  $W_m = \sum_{j=1}^m \tau_j$ ,  $m \geq 1$ , где  $\tau_j$  — независимые экспоненциально распределенные СВ с параметром  $\mu(i) > 0$ . Пусть  $B_n$  — событие вида  $(W_n \leq v, W_{n+1} > v)$ ,  $B_0$  — событие  $(W_1 > v)$ . Обратим внимание, что  $B_n, n \geq 0$ , — несовместные события и в совокупности составляют полную группу событий.

Известно (см., например, [6]), что математическое ожидание СВ  $W_n$  при условии выполнения события  $B_m$  равно

$$M \left[ \frac{W_n}{B_m} \right] = \frac{n}{m+1} v, \quad n \leq m.$$

Заметим, что в состоянии  $i$  общее время ожидания  $n$ -й в очереди заявки при  $n \geq 1$  является СВ вида  $W_n$ , а выполнение события  $B_m$  равносильно завершению обслуживания за время  $v$  ровно  $m$  заявок.

Обозначим через  $\overline{W}_{\text{обсл}/m}$  среднее суммарное время ожидания заявок, обслуживание которых завершилось или началось в состоянии  $i$ , при условии  $B_m$ ,  $\overline{W}_{\text{необсл}/m}$  — среднее суммарное время ожидания в очереди заявок, обслуживание которых не началось в состоянии  $i$ , при условии  $B_m$ ,  $\overline{W}_{\text{пр}/m}$  — среднее время простоя прибора в состоянии  $i$  при условии  $B_m$ ,  $k$  — число заявок в системе в состоянии  $i$  с учетом поступившей (т. е.  $k = i + 1$ , если она принимается в накопитель, и  $k = i$ , если она отвергается). Тогда при  $m \leq k - 1$  получим:

$$\overline{W}_{\text{обсл}/m} = \sum_{n=1}^m M \left[ \frac{W_n}{B_m} \right] = \sum_{n=1}^m \frac{n}{m+1} v = \frac{mv}{2}; \quad (6)$$

$$\overline{W}_{\text{необсл}/m} = [k - (m + 1)] v = (k - 1 - m)v. \quad (7)$$

Выполнение события  $B_m$  при  $m \geq k$  означает завершение обслуживания всех заявок в очереди и последующее простаивание прибора до момента выхода системы из состояния  $i$ . Поэтому при  $m \geq k \geq 1$  верно равенство:

$$\begin{aligned} \overline{W}_{\text{обсл}/m} &= \sum_{n=1}^{k-1} M \left[ \frac{W_n}{B_m} \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{n}{m+1} v = \frac{k(k-1)v}{2(m+1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

При  $m \geq k$  и условии  $B_m$  для времени простоя верно соотношение:

$$\begin{aligned} \overline{W}_{\text{пр}/m} &= v - M \left[ \frac{W_k}{B_m} \right] = \\ &= v - \frac{k}{m+1} v = \frac{(m-k+1)v}{m+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим через  $d_i^{h_1}(v)$  величину суммарного дохода системы при пороге  $h_1$  в состоянии  $i$  ( $0 \leq i \leq h_2 - 1$ ) без учета платы за обслуживание и штрафа за отклонение поступившей заявки при условии, что время пребывания в состоянии  $i$  равно  $v$ . Так как вероятность события  $B_m$  равна  $((\mu_i^{h_1} v)^m / m!) e^{-\mu_i^{h_1} v}$ , из формулы полной вероятности и из (6)–(9) получим для  $d_i^{h_1}(v)$  выражение вида:

$$\begin{aligned} d_i^{h_1}(v) &= -C_4^{h_1}(i)v - \\ &- C_2 \sum_{m=0}^i \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} (\overline{W}_{\text{обсл}/m} + \overline{W}_{\text{необсл}/m}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} (C_2 \overline{W}_{\text{обсл}/m} + \\ &+ C_3 \mu_i^{h_1} \overline{W}_{\text{пр}/m}) = -C_4^{h_1}(i)v - \\ &- C_2 \sum_{m=0}^i \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} \left[ \frac{mv}{2} + (i-m)v \right] - \\ &- C_2 \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} \frac{i(i+1)v}{2(m+1)} - \\ &- C_3 \mu_i^{h_1} \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} \frac{(m-i)v}{m+1} = \\ &= -C_4^{h_1}(i)v + \frac{C_2}{2} \sum_{m=0}^i \frac{m (\mu_i^{h_1} v)^m v^{m+1}}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} - \\ &- C_2 i \sum_{m=0}^i \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m v^{m+1}}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} - \\ &- C_2 \frac{i(i+1)}{2} \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu_i^{h_1} v} - \\ &- C_3 \mu_i^{h_1} \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m v^{m+1}}{(m+1)!} (m-i) e^{-\mu_i^{h_1} v}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d_i^{h_1} &= \int_0^{\infty} d_i(v) dA(v) = -C_4^{h_1}(i) \int_0^{\infty} v dA(v) + \\ &+ \frac{C_2}{2\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} m(m-1) \int_0^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m v^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} dA(v) - \\ &- \frac{C_2 i}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} m \int_0^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m v^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} dA(v) - \\ &- \frac{C_2 i(i+1)}{2\mu_i^{h_1}} \sum_{m=i+2}^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m v^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} dA(v) - \\ &- C_3 \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1) \int_0^{\infty} \frac{(\mu_i^{h_1} v)^m v^m}{m!} e^{-\mu_i^{h_1} v} dA(v). \end{aligned}$$

Отсюда и из выражения для  $r_{i,m}^{h_1}$  следует (5) для состояния  $i$ , так как при  $0 \leq i \leq h_2 - 1$  система получает плату  $C_0$  и не платит штраф, а при  $i = h_2$  система не получает плату и сама платит штраф  $C_1$ .

**Лемма 2.** *Справедливы равенства:*

$$d_{i+1}^{h_1+1} = d_i^{h_1} + C_3 \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} - \frac{C_2}{\nu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} mr_{i,m}^{h_1} - \frac{C_2(i+1)}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1}, \quad 0 \leq i \leq h_2 - 1; \quad (10)$$

$$\pi_{i+1}^{h_1+1} = (1 - \pi_0^{h_1+1}) \pi_i^{h_1}, \quad 0 \leq i \leq h_2. \quad (11)$$

**Доказательство.** Сделаем преобразования, из (6) получим (10):

$$\begin{aligned} d_{i+1}^{h_1+1} - d_i^{h_1} &= \frac{C_2}{2\mu_{i+1}^{h_1+1}} \sum_{m=1}^{i+1} m(m-1)r_{i+1,m}^{h_1+1} + \\ &+ \frac{C_2}{2\mu_{i+1}^{h_1+1}} (i+2)(i+1)r_{i+1,i+2}^{h_1+1} - \\ &- \frac{C_2(i+1)}{\mu_{i+1}^{h_1+1}} \sum_{m=1}^{i+1} mr_{i+1,m}^{h_1+1} - \\ &- \frac{C_2}{\mu_{i+1}^{h_1+1}} (i+1)(i+2)r_{i+2,i+2}^{h_1+1} - \\ &- \frac{C_2(i+2)(i+1)}{2\mu_{i+1}^{h_1+1}} \sum_{m=i+3}^{\infty} r_{i+1,m}^{h_1+1} - \\ &- C_3 \sum_{m=i+3}^{\infty} (m-i-2)r_{i+1,m}^{h_1+1} - C_4^{h_1+1}(i+1) - \\ &- \frac{C_2}{2\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} m(m-1)r_{i,m}^{h_1} + \frac{C_2(i+1)}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} mr_{i,m}^{h_1} - \\ &- \frac{C_2}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} mr_{i,m}^{h_1} + \frac{C_2 i(i+1)}{2\mu_i^{h_1}} \sum_{m=i+3}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} + \\ &+ \frac{C_2}{2\mu_i^{h_1}} i(i+1)r_{i,i+2}^{h_1} + C_3 \sum_{m=i+3}^{\infty} (m-i-2)r_{i,m}^{h_1} + \\ &+ C_3 \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} + C_4^{h_1}(i) = -\frac{C_2}{\mu_i^{h_1}} (i+1)r_{i,i+2}^{h_1} - \\ &- \frac{C_2}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} mr_{i,m}^{h_1} - \frac{C_2(i+1)}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=i+3}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} + \\ &+ C_3 \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} = C_3 \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} - \frac{C_2}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} mr_{i,m}^{h_1} - \\ &- \frac{C_2(i+1)}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1}. \end{aligned}$$

Докажем (11). Подставив вместо  $\pi_j^{h_1}$  и  $\pi_{j+1}^{h_1+1}$  соответствующие выражения из (5), получим

$$\pi_j^{h_1} - \pi_{j+1}^{h_1+1} = \frac{R_j^{h_1}}{\sum_{i=0}^{h_1} R_i^{h_1}} - \frac{R_{j+1}^{h_1+1}}{\sum_{i=0}^{h_2+1} R_i^{h_1+1}}. \quad (12)$$

Из (4) следует  $R_j^{h_1} = R_{j+1}^{h_1+1}$ ,  $0 \leq j \leq h_2$ . Тогда (12) приводится к виду:

$$\pi_j^{h_1} - \pi_{j+1}^{h_1+1} = \frac{R_j^{h_1} R_0^{h_1+1}}{\left(\sum_{i=0}^{h_2} R_i^{h_1}\right) \left(\sum_{i=0}^{h_2+1} R_i^{h_1+1}\right)} = \pi_j^{h_1} \pi_0^{h_1+1}.$$

Введем обозначения  $B(h_1, a)$ ,  $F(h_1, a)$  и  $G(h_1, a)$ :

$$\left. \begin{aligned} B(h_1, a) &= \frac{1}{\mu_1} \sum_{i=0}^{h_1-1} \pi_i^{h_1} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1)r_{i,m}^{h_1} + \\ &+ \frac{1}{\mu_2} \sum_{i=h_1}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1)r_{i,m}^{h_1} + \\ &+ \frac{1}{\mu_2} \pi_{h_2}^{h_1} \sum_{m=h_2+1}^{\infty} (m-h_2)r_{h_2,m}^{h_1}; \\ F(h_1, a) &= \frac{1 - \pi_0^{h_1+1}}{\pi_0^{h_1+1}} [\bar{v} - B(h_1, a)]; \\ G(h_1, a) &= C_3 r_{0,0}^{h_1+1} - C_2 F(h_1, a) + q_0^{h_1+1}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$q_0^{h_1+1} = C_0 + C_3 (1 - r_{0,0}^{h_1} - \mu_1 \bar{v}) - C_{1,4} \bar{v}.$$

**Лемма 3.** *Для любого  $h_1 > 0$  справедливо соотношение:*

$$g^{h_1}(a) - g^{h_1+1}(a) = \pi_0^{h_1+1} [g^{h_1}(a) - G(h_1, a)]. \quad (14)$$

**Доказательство.** Из формул (2), (5), (10) и (11) после несложных преобразований находим:

$$\begin{aligned} g^{h_1}(a) - g^{h_1+1}(a) &= \\ &= \sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} q_i^{h_1} + \pi_{h_2}^{h_1} q_{h_2}^{h_1} - \sum_{i=0}^{h_2} \pi_i^{h_1+1} q_i^{h_1+1} - \\ &- \pi_{h_2+1}^{h_1+1} q_{h_2+1}^{h_1+1} = \sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} q_i^{h_1} + \pi_{h_2}^{h_1} q_{h_2}^{h_1} - \\ &- (1 - \pi_0^{h_1+1}) \left( \sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} q_{i+1}^{h_1+1} + \pi_{h_2}^{h_1} q_{h_2+1}^{h_1+1} \right) - \\ &- \pi_0^{h_1+1} q_0^{h_1+1} = \sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} q_i^{h_1} + \pi_{h_2}^{h_1} q_{h_2}^{h_1} - \\ &- (1 - \pi_0^{h_1+1}) \left( \sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} (q_i^{h_1} + d_{i+1}^{h_1+1} - d_i^{h_1}) + \right. \\ &\left. + \pi_{h_2}^{h_1} (q_{h_2}^{h_1} + d_{h_2+1}^{h_1+1} - d_{h_2-1}^{h_1}) \right) - \pi_0^{h_1+1} q_0^{h_1+1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi_0^{h_1+1} \left\{ g^{h_1} - \frac{1 - \pi_0^{h_1+1}}{\pi_0^{h_1+1}} \left[ \sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} (d_{i+1}^{h_1+1} - d_i^{h_1}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \pi_{h_2}^{h_1} (d_{h_2+1}^{h_1+1} - d_{h_2-1}^{h_1}) \right] - q_0^{h_1+1} \right\} = \\
 &= \pi_0^{h_1+1} \left\{ g^{h_1} - \frac{1 - \pi_0^{h_1+1}}{\pi_0^{h_1+1}} \left[ \sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} \left[ C_3 \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{C_2}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=1}^{i+1} m r_{i,m}^{h_1} - \frac{C_2(i+1)}{\mu_i^{h_1}} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \pi_{h_2}^{h_1} \left[ C_3 \sum_{m=h_2+1}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} - \frac{C_2}{\mu_{h_2}^{h_1}} \sum_{m=1}^{h_2} m r_{i,m}^{h_1} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{C_2 h_2}{\mu_{h_2}^{h_1}} \sum_{m=h_2+1}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} \right] \right] - q_0^{h_1+1} \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Из первого равенства в (3) следует

$$\pi_0^{h_1+1} = \sum_{i=0}^{h_2} \pi_i^{h_1+1} \sum_{m=i+1}^{\infty} r_{i,m}^{h_1+1} + \pi_{h_2+1}^{h_1+1} \sum_{m=h_2+1}^{\infty} r_{h_2,m}^{h_1+1}.$$

Отсюда и из (11) имеем:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^{h_2-1} \pi_i^{h_1} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_{i,m}^{h_1} + \pi_{h_2}^{h_1} \sum_{m=h_2+1}^{\infty} r_{h_2,m}^{h_1} = \\
 &= \left[ r_{0,0}^{h_1+1} \frac{1 - \pi_0^{h_1+1}}{\pi_0^{h_1+1}} \right]^{-1}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Заменив в (15)  $(1 - \pi_0^{h_1+1})/\pi_0^{h_1+1}$  на правую часть равенства (16), получим

$$\begin{aligned}
 &g^{h_1}(a) - g^{h_1+1}(a) = \\
 &= \pi_0^{h_1+1} \left\{ g^{h_1}(a) - \left[ C_3 r_{0,0}^{h_1+1} - C_2 \frac{1 - \pi_0^{h_1+1}}{\pi_0^{h_1+1}} \left[ \bar{v} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{i=0}^{h_2-1} \frac{1}{\mu_i^{h_1}} \pi_i^{h_1} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m - i - 1) r_{i,m}^{h_1} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\mu_{h_2}^{h_1}} \pi_{h_2}^{h_1} \sum_{m=h_2+1}^{\infty} (m - h_2) r_{h_2,m}^{h_1} \right] \right] - q_0^{h_1+1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставив в последнее выражение соответствующие обозначения из (13), получим доказательство леммы 3.

**Лемма 4.** *Функция  $G(h_1, a)$  не возрастает по  $h_1 > 0$ .*

**Доказательство.** Покажем, что  $F(h_1, a)$  возрастает по  $h_1$ . Рассмотрим вспомогательную систему с ограниченным накопителем емкости  $h_2 + 1$ , в которой одно из мест накопителя отмечено меткой и заявка, занявшая это место, также отмечается меткой. Предположим, что в этой системе, в отли-

чие от исходной системы, используется следующая дисциплина обслуживания. Поступившая заявка, если в накопителе есть свободное место, в первую очередь занимает немеченое место, а при отсутствии такого занимает меченое место и становится меченой заявкой. Если в момент поступления заявки на приборе находится меченая заявка, то эта заявка возвращается в накопитель на меченое место, освободив прибор, а прибор занимает поступившая заявка. Немеченые заявки обслуживаются в порядке поступления, а меченая заявка занимает прибор только при отсутствии в накопителе немеченых заявок. Предполагается, что в остальном вспомогательная система полностью совпадает с исходной СМО с ограниченным накопителем емкости  $h_2 + 1$ .

Обратим внимание, что процесс обслуживания немеченых заявок во вспомогательной СМО происходит точно так же, как и в исходной СМО с накопителем емкости  $h_2 > 0$ , и если состоянием вложенной цепи вспомогательной СМО считать число немеченых заявок в системе в момент поступления заявки, то стационарные распределения вероятностей состояний для обеих систем совпадут. Обратим также внимание на то, что, несмотря на разный порядок обслуживания в исходной и вспомогательной СМО, если для вложенной цепи вспомогательной СМО состоянием является общее число заявок в момент поступления, то распределение стационарных вероятностей состояний для вспомогательной системы совпадает со стационарными вероятностями исходной с накопителем емкости  $h_2 + 1$ . Это объясняется тем, что в этих системах время обслуживания заявки прибором (так как распределение вероятностей времени обслуживания — экспоненциальное), поведение входного потока и процедура приема заявок в систему не зависят от дисциплины обслуживания в соответствующих системах.

Обратим также внимание на то, что в системе в любой момент времени меченых заявок максимум одна и она может находиться на приборе только при отсутствии в накопителе немеченых заявок. Очевидно, вероятность нахождения в произвольный момент времени на приборе вспомогательной системы меченой заявки является положительной величиной. Тогда во вспомогательной системе событие «в произвольный момент времени в системе немеченых заявок не меньше  $l > 0$ » влечет событие «в произвольный момент времени в системе заявок не меньше  $l > 0$ » и при этом вероятность первого события меньше вероятности второго. Так как вероятность первого события равна

$$Q_l^{h_1} = \sum_{i=l}^{h_2} \pi_i^{h_1},$$

а вероятность второго равна

$$Q_l^{h_1+1} = \sum_{i=l}^{h_2+1} \pi_i^{h_1+1},$$

то выполняется неравенство

$$Q_l^{h_1+1} > Q_l^{h_1}, \quad l > 0.$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=l}^{h_2+1} Q_i^{h_1+1} > \sum_{i=l}^{h_2} Q_i^{h_1},$$

т.е. среднее число заявок в системе в момент поступления новой заявки при пороге  $h_1 + 1$  больше, чем при  $h_1$ . Как следует из (9) и (13),  $B(h_1, a)$  — среднее время простоя прибора. Так как из приведенных выше рассуждений следует, что среднее значение СВ времени обслуживания всех заявок (включая и поступившую) за время нахождения в произвольном состоянии возрастает по  $h_1$ , получаем, что среднее время простоя  $B(h_1, a)$  убывает по  $h_1$ . Так как  $\pi_0^{h_1}$  убывает по  $h_1$  (выше показано, что  $Q_1^{h_1+1} > Q_1^{h_1}$ ), то  $F(h_1, a)$  возрастает по  $h_1$ . Тогда из выражения для  $G(h_1, a)$  в (13) следует доказательство леммы 4.

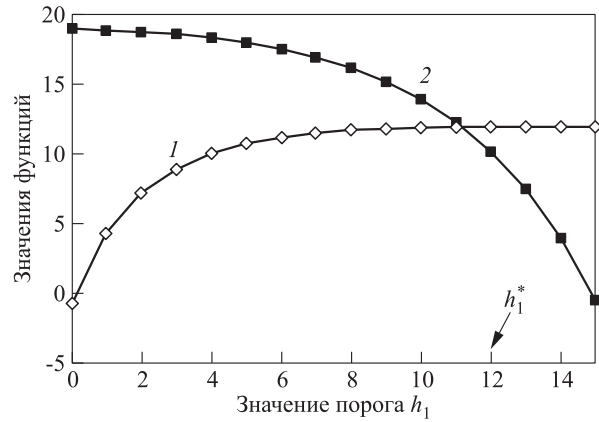
Пусть  $h_1^*$  — решение задачи (1) для вспомогательной системы. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Справедливы утверждения:*

- (1) *существует порог  $h_1^* < \infty$ , если  $\inf_{h_1 > 0} G(h_1, a) < \sup_{h_1 > 0} g^{h_1}(a)$  и  $C_2 > 0$ ;*
- (2)  *$h_1^* = \infty$ , если  $g^1(a) < G(1, a)$  и  $C_2 = 0$ ;*
- (3)  *$h_1^* = 1$ , если  $g^1(a) \geq G(1, a)$ ;*
- (4) *для существования  $0 < h_1^* < \infty$  необходимо и достаточно выполнение условий  $g^{h_1^*-1}(a) < g^{h_1^*}(a)$  и  $g^{h_1^*+1}(a) \geq g^{h_1^*}(a)$ .*

**Доказательство.** Функция  $g^{h_1}(a)$ ,  $h_1 > 0$ , удовлетворяет всем условиям теоремы в работе [9] и поэтому является унимодальной, что доказывает существование решения  $h_1^*$  задачи (1) для вспомогательной системы и утверждение 4 теоремы 1. Утверждение 1 теоремы 1 (существование порога  $h_1^* < \infty$ ) следует из леммы 3 и леммы 4, утверждение 2 следует из леммы 4 и неравенства  $G(h_1, a) > g^{h_1}(a)$  для всех  $h_1 > 0$  при  $C_2 = 0$ . Утверждение 3 доказываемой теоремы вытекает из лемм 3 и 4, так как из леммы 3 следует равенство

$$\begin{aligned} g^{h_1+1}(a) - g^{h_1+2}(a) = \\ = \pi_0^{h_1+2} \left[ \left(1 - \pi_0^{h_1+1}\right) (g^{h_1}(a) - G(h_1 + 1, a)) + \right. \\ \left. + \pi_0^{h_1+1} (G(h_1, a) - G(h_1 + 1, a)) \right], \end{aligned}$$



Зависимости функций  $g^{h_1}(a)/\bar{v}$  (1) и  $G(h_1, a)/\bar{v}$  (2) от порогового значения  $h_1$

а из этого равенства, леммы 4 и неравенства  $g^1(a) \geq G(1, a)$  по индукции следует  $g^{h_1+1}(a) - g^{h_1+2}(a) > 0$  для всех  $h_1 > 0$ , и, следовательно, утверждение 3 теоремы 1 справедливо.

Рассмотрим теперь случай  $a = \infty$  (СМО с неограниченной очередью) при условии  $\mu_2/\bar{v} < 1$  и  $C_2 > 0$  (при  $C_2 = 0$ , очевидно,  $h_1^* = \infty$ , в случае  $\mu_2/\bar{v} \geq 1$ ,  $C_2 > 0$  очередь бесконечна и  $g^{h_1} = -\infty$ ). Так как для любого конечного  $h_1$  последовательности  $g^{h_1}(a)$  и  $G(h_1, a)$  являются сходящимися при  $a \rightarrow \infty$ , то, очевидно, теорема 1 справедлива и для СМО с неограниченной очередью.

На рисунке проиллюстрировано отношение эквивалентности условий  $g^{h_1+1}(a) > g^{h_1}(a)$  и  $g^{h_1}(a) < G(h_1, a)$ , являющееся следствием соотношения (14), и поведение функций  $g^{h_1}(a)$  и  $G(h_1, a)$  при изменении значения порога  $h_1$  для следующих исходных данных:  $A(t) = f_1(1 - e^{-\lambda_1 t}) + f_2(1 - e^{-\lambda_2 t})$ ;  $f_i > 0$ ;  $\lambda_i > 0$ ;  $i = 1, 2$ ;  $f_1 + f_2 = 1$ ;  $f_1 = 0,3$ ;  $f_2 = 0,7$ ;  $\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_2 = 3$ ;  $a = 30$ ;  $C_0 = 10$ ;  $C_1 = 0$ ;  $C_2 = 0,1$ ;  $C_3 = 5$ ;  $C_{1,4} = 10$ ;  $C_{2,4} = 20$ ;  $\mu_1 = 2$ ;  $\mu_2 = 4$ .

## 4 Заключение

Из полученных результатов следуют выводы:

- целевая функция задачи (1) и для вспомогательной, и для основной СМО (при  $\mu_2/\bar{v} < 1$ ) унимодальна по  $h_1$ ;
- при  $C_2 > 0$  существует оптимальная точка переключения скорости обслуживания (конечный оптимальный порог длины очереди);
- при  $C_2 > 0$  для поиска оптимальной точки переключения  $h_1 = h_1^* < \infty$  достаточно найти  $h_1 \geq 1$ , при котором выполняются условия  $g^{h_1-1} < g^{h_1}$  и  $g^{h_1+1} \geq g^{h_1}$ .

Результаты данной работы могут быть использованы для оценки технической и экономической эффективности реальных систем, для которых в качестве моделей используют СМО типа  $G/M/1$  ( $G/M/1/r$ ) с управлением переключением скорости обслуживания.

## Литература

1. *Агаларов Я. М., Ушаков В. Г.* Об унимодальности функции дохода системы массового обслуживания типа  $G/M/s$  с управляемой очередью // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 1. С. 55–61.
2. *Агаларов Я. М., Коновалов М. Г.* Доказательство унимодальности целевой функции в задаче порогового управления нагрузкой на сервер // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 2. С. 2–6.
3. *Агаларов Я. М.* Оптимальное пороговое управление доступом в системе  $M/M/s$  с неоднородными приборами и общим накопителем // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 57–64.
4. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1971. 537 с. (*Karlin S.* A first course in stochastic processes. — New York, NY, USA: Academic Press, 1968. 502 p.)
5. *Горцев А. М.* Система массового обслуживания с произвольным числом резервных каналов и гистерезисным управлением включением и выключением резервных каналов // Автоматика и телемеханика, 1977. № 10. С. 30–37.
6. *Зиновьева Л. И., Терпугов А. Ф.* Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания, зависящей от времени ожидания // Автоматика и телемеханика, 1981. № 1. С. 27–30.
7. *Самочернова Е. С., Петров Л. И.* Оптимизация системы массового обслуживания с однотипным резервным прибором // Известия Томского политехнического университета, 2010. Т. 317. № 5. С. 28–31.
8. *Крылова Д. С., Головкин Н. И., Жук Т. А.* Анализ СМО с резервным прибором и скачкообразной интенсивностью входного потока // Вестник ВГУ. Сер. Физика, математика, 2017. № 4. С. 109–123.
9. *Агаларов Я. М.* Признак унимодальности целочисленной функции одной переменной // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2019. Т. 26. Вып. 1. С. 65–66.

Поступила в редакцию 08.11.21

## OPTIMIZATION OF THE THRESHOLD SERVICE SPEED CONTROL IN THE $G/M/1$ QUEUE

Ya. M. Agalarov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** Consideration is given to the problem of optimal service speed switching in a  $G/M/1$  queuing system with an objective function which takes into account the fee for customer’s service, the penalty for customer’s delay in the queue, the penalty for customer’s rejection, the penalty for server being idle, and the maintenance costs. The case of finite capacity queue is also considered. The nonlinear optimization problem is formulated and solved in which the objective function is the system’s revenue and the control variable is the queue length. The author proves that the objective function is unimodal and formulates the conditions for the existence of an optimal threshold service speed switching and necessary and sufficient conditions for the optimal control.

**Keywords:** queuing system; threshold control; system costs

**DOI:** 10.14357/19922264220111

## Acknowledgments

The reported study was partly funded by RFBR, project number 20-07-00804.

## References

1. Agalarov, Ya. M., and V. G. Ushakov. 2019. Ob unimodal’nosti funktsii dokhoda sistemy massovogo obsluzhivaniya tipa  $G/M/s$  s upravlyaemoy ochered’yu [On the unimodality of the income function of a type  $G/M/s$  queuing system with controlled queue]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 13(1):55–61.
2. Agalarov, Ya. M., and M. G. Kononov. 2019. Dokazatel’sтво unimodal’nosti tselevoy funktsii v zadache porogovogo upravleniya nagruzkoy na server [Proof of the



- unimodality of the objective function in  $M/M/N$  queue with threshold-based congestion control]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 13(2):2–6.
3. Agalarov, Ya. M. 2021. Optimal'noe porogovoe upravlenie dostupom v sisteme  $M/M/s$  s neodnorodnymi priborami i obshchim nakopitelem [Optimal threshold-based admission control in the  $M/M/s$  system with heterogeneous servers and a common queue]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):57–64.
  4. Karlin, S. 1968. *A first course in stochastic processes*. New York, NY: Academic Press. 502 p.
  5. Gortsev, A. M. 1977. Sistema massovogo obsluzhivaniya s proizvol'nym chislom rezervnykh kanalov i gisterezisnym upravleniem vklucheniem i vyklyucheniem rezervnykh kanalov [A queueing system with an arbitrary number of stand-by channels and hysteresis control of their connection and disconnection]. *Automat. Rem. Contr.* 10:30–37.
  6. Zinov'eva, L. I., and A. F. Terpugov. 1981. Odnolineynaya sistema massovogo obsluzhivaniya s peremennoy intensivnost'yu, zavisyashchey ot vremeni ozhidaniya [A single flow service system whose throughput depends on the queueing time]. *Automat. Rem. Contr.* 1:27–30.
  7. Samochernova, E. S., and L. I. Petrov. 2010. Optimizatsiya sistemy massovogo obsluzhivaniya s odnotipnym rezervnym priborom [Optimization of the queueing system with the same type of backup device]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University* 317(5):28–31.
  8. Krylova, D. S., N. I. Golovko, and T. A. Zhuk. 2017. Analiz SMO s rezervnym priborom i skachkoobraznoy intensivnost'yu vkhodnogo potoka [Analysis of the queueing system with backup server and abrupt intensity of the input stream]. *Vestnik VGU. Ser. Fizika, matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics] 4:109–123.
  9. Agalarov, Ya. M. 2019. Priznak unimodal'nosti tselochislennoy funktsii odnoy peremennoy [A sign of unimodality of an integer function of one variable]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Surveys Applied and Industrial Mathematics] 26(1):65–66.

*Received November 8, 2021*

## Contributor

**Agalarov Yaver M.** (b. 1952) — Candidate of Science (PhD) in technology, associate professor, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; agglar@yandex.ru

# О ПОИСКЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ЧАСТЫХ И МИНИМАЛЬНЫХ НЕЧАСТЫХ НАБОРОВ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Н. А. Драгунов<sup>1</sup>, Е. В. Дюкова<sup>2</sup>

**Аннотация:** Исследованы актуальные вопросы снижения временных затрат, возникающие при логическом анализе данных с элементами из декартова произведения конечных частично упорядоченных множеств. Для задачи поиска по базе транзакций максимальных частых и минимальных нечастых наборов произведения частичных порядков предложен оригинальный метод, основанный на решении сложной дискретной задачи, называемой дуализацией над произведением частичных порядков. Метод представляет собой синтез двух других известных методов, один из которых достаточно очевиден, а другой использует идею инкрементального перечисления искомого наборов и поэтому представляет в основном теоретический интерес. Проведено экспериментальное исследование предложенного подхода к решению рассматриваемой задачи в случае произведения конечных цепей, выявлены условия его эффективности и для проводимого анализа данных показана целесообразность применения асимптотически оптимальных алгоритмов дуализации над произведением частичных порядков.

**Ключевые слова:** максимальные частые наборы; минимальные нечастые наборы; дуализация над произведением частичных порядков; асимптотически оптимальный алгоритм дуализации

**DOI:** 10.14357/19922264220112

## 1 Введение

Рассматриваемая задача анализа данных занимает важное место в области информационного поиска и в случае бинарных данных ставится следующим образом [1].

Дано некоторое множество элементов  $V$ . Подмножества  $X \subseteq V$  называются наборами. Пусть  $D$  — база данных, содержащая некоторые, не обязательно различные, наборы. Наборы, содержащиеся в  $D$ , называются транзакциями. Под частотой набора  $\nu(X)$  понимается доля транзакций в  $D$ , содержащих  $X$ . Если  $\nu(X) \geq s$ ,  $s \in [0, 1]$ , то набор  $X$  называется  $s$ -частым, иначе он называется  $s$ -нечастым. Если набор частый и он не содержится ни в каком другом частом наборе, то такой набор называется максимальным частым. Если набор нечастый и при этом он не содержит в себе никакого другого нечастого набора, то такой набор называется минимальным нечастым. Требуется найти все максимальные частые и минимальные нечастые наборы при заданном  $s$ .

Рассматриваемая задача имеет много важных приложений, одним из которых является нахождение ассоциативных правил в базах данных. В случае бинарных данных ассоциативное правило — это упорядоченная пара  $(X, Y)$  непересекающихся подмножеств множества  $V$ , обозначаемая  $X \Rightarrow Y$ . Поддержкой правила  $X \Rightarrow Y$  называется частота

набора  $Z = X \cup Y$ . Достоверностью правила  $X \Rightarrow Y$  называется доля транзакций, содержащих  $Y$ , среди всех транзакций, содержащих  $X$ . Требуется найти все ассоциативные правила, удовлетворяющие заданным минимальной поддержке  $s \in [0, 1]$  и минимальной достоверности  $c \in [0, 1]$ . Впервые задача нахождения ассоциативных правил была поставлена в [2], где она формулировалась как задача анализа потребительской корзины.

В случае небинарных данных каждый элемент из  $V$  имеет некоторое множество числовых значений и вместо наборов элементов рассматриваются наборы их значений.

Поиск ассоциативных правил осуществляется в два этапа. На первом этапе находят частые наборы, на втором этапе из найденных частых наборов формируются ассоциативные правила. При формировании правил на втором этапе фактически возникает задача поиска  $t$ -нечастых наборов, где  $t > s/c$ .

С ростом размерности современных баз данных находить все частые и нечастые наборы становится неэффективно как по времени, так и по памяти в силу экспоненциального роста числа таких наборов. Одно из решений данной проблемы заключается в поиске только максимальных частых наборов и только минимальных нечастых наборов, что позволяет компактно хранить информацию о всех частых и нечастых наборах соответственно.

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, nikitadragunovjob@gmail.com

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, edjukova@mail.ru

В [3] рассмотрена задача поиска множеств максимальных частых наборов  $X_{\max}$  и минимальных нечастых наборов  $Y_{\min}$  в данных, представленных в виде декартова произведения частично упорядоченных множеств. Показано, что в этом случае при построении требуемых наборов возникают соответственно задача поиска максимальных независимых элементов частичных порядков и задача поиска минимальных независимых элементов частичных порядков. Каждая из этих задач называется дуализацией над произведением частичных порядков [4]. Обе задачи относятся к одним из центральных труднорешаемых перечислительных задач дискретной математики.

Существует достаточно очевидный способ поиска максимальных частых и минимальных нечастых наборов произведения частичных порядков, основанный на последовательном построении указанных множеств. Одно из множеств ищется, например, алгоритмом Arigi [5], второе множество получается путем дуализации первого. В настоящей работе показано, что метод эффективен только в случае, когда число частых наборов существенно меньше или, наоборот, существенно больше числа нечастых наборов. В [3] предложена идея совместного перечисления  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$  с использованием инкрементального алгоритма дуализации из [6], которая автором экспериментально не исследована.

Основной результат настоящей работы — разработка нового подхода к решению поставленной задачи, который является синтезом последовательного и совместного подходов.

Экспериментальные исследования, проведенные в настоящей работе для случая произведения цепей, свидетельствуют о том, что предложенный последовательно-совместный метод наиболее эффективен в случае, когда мощность множества частых наборов примерно равна мощности множества нечастых наборов.

## 2 Постановка задачи поиска максимальных частых и минимальных нечастых наборов произведения частичных порядков

Пусть  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_n$  — декартово произведение частично упорядоченных множеств. Элементы  $\mathcal{P}$  называются наборами. На множестве  $\mathcal{P}$  определяется отношение частичного порядка  $\preceq$  следующим образом: если  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{P}$  и  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{P}$ , то  $p \preceq q$  в  $\mathcal{P} \Leftrightarrow p_1 \preceq q_1$  в  $\mathcal{P}_1, \dots, p_n \preceq q_n$  в  $\mathcal{P}_n$ .

Пусть  $\mathcal{D}(\mathcal{P})$  — некоторая совокупность наборов из  $\mathcal{P}$ , называемая базой данных. Наборы, находящиеся в базе данных  $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ , необязательно попарно различны и называются транзакциями.

Введем обозначения:  $|\mathcal{D}(\mathcal{P})|$  — число транзакций в  $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ ;  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(p)$  — число транзакций в  $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ , следующих за  $p \in \mathcal{P}$ ;  $s \in [0, 1]$ .

**Определение 1.** Набор  $p \in \mathcal{P}$  называется  $s$ -частым, если  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(p)/|\mathcal{D}(\mathcal{P})| \geq s$ . Иначе набор  $p$  называется  $s$ -нечастым.

**Определение 2.** Набор  $p \in \mathcal{P}$  называется максимальным  $s$ -частым, если он  $s$ -частый и никакой следующий за ним набор  $z$ ,  $z \neq p$ , не является  $s$ -частым.

**Определение 3.** Набор  $p \in \mathcal{P}$  называется минимальным  $s$ -нечастым, если он  $s$ -нечастый и никакой предшествующий ему набор  $z$ ,  $z \neq p$ , не является  $s$ -нечастым.

Далее вместо  $s$ -частый ( $s$ -нечастый) набор будем писать частый (нечастый) набор. Множество всех максимальных частых наборов будем обозначать как  $X_{\max}$ , а множество всех минимальных нечастых наборов как  $Y_{\min}$ .

Пусть  $R \subset \mathcal{P}$ ,  $R^+ = \{x \in \mathcal{P} \mid \exists a \in R, a \preceq x\}$ ,  $R^- = \{x \in \mathcal{P} \mid \exists a \in R, x \preceq a\}$ .

**Определение 4.** Множество  $I(R^+)$ , состоящее из всех максимальных элементов множества  $\mathcal{P} \setminus R^+$ , называется максимальным независимым от  $R$ .

**Определение 5.** Множество  $I(R^-)$ , состоящее из всех минимальных элементов множества  $\mathcal{P} \setminus R^-$ , называется минимальным независимым от  $R$ .

Каждая из задач построения  $I(R^+)$  и  $I(R^-)$  при заданном множестве  $R$  называется задачей дуализации над произведением частичных порядков.

**Утверждение 1.** Если  $X \subset X_{\max}$ , а  $y \in I(X^-)$  — нечастый набор, то  $y$  — минимальный нечастый набор.

**Доказательство.** Пусть  $y \notin I(X_{\max}^-)$ . Так как  $y$  — нечастый набор, то в  $\mathcal{P} \setminus X_{\max}^-$  найдется минимальный нечастый набор  $x$  такой, что  $x \neq y$  и  $x \preceq y$ . Из того, что  $\mathcal{P} \setminus X_{\max}^- \subseteq \mathcal{P} \setminus X^-$ , следует, что  $x \in \mathcal{P} \setminus X^-$ , что противоречит условию  $y \in I(X^-)$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $X \subseteq X_{\max}$ ,  $Y \subseteq Y_{\min}$ . Тогда  $I(X^-) = Y$  в том и только в том случае, когда  $X = X_{\max}$  и  $Y = Y_{\min}$ .

**Доказательство.** Пусть  $X \subset X_{\max}$ ,  $x \in X_{\max} \setminus X$ . Так как множество  $X_{\max}$  — антицепь, то  $x \notin X^-$ . Следовательно,  $x \in \mathcal{P} \setminus X^-$ . Но тогда существует элемент  $q \in I(X^-) : q \preceq x$ , который является частым. Однако во множестве  $Y$  частых наборов нет; следовательно,  $I(X^-) \neq Y$ . Если же  $X = X_{\max}$ , то  $I(X^-) = Y_{\min}$ . Таким образом,  $I(X^-) = Y$  тогда и только тогда, когда  $X = X_{\max}$  и  $Y = Y_{\min}$ .

### 3 Методы построения множеств $X_{\max}$ и $Y_{\min}$

#### 3.1 Последовательное перечисление $X_{\max}$ и $Y_{\min}$

Достаточно очевиден поиск  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$  при заданной  $\mathcal{D}(\mathcal{P})$  путем последовательного построения множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$ . Данный поиск осуществляется в два этапа. На первом этапе находятся все максимальные частые наборы  $X_{\max}$ , например алгоритмом *Argioi* [5]. На втором этапе используется свойство двойственности  $I(X_{\max}^-) = Y_{\min}$ . Минимальные нечастые наборы  $Y_{\min}$  находятся путем дуализации найденного на первом этапе множества  $X_{\max}$ . Аналогично можно сначала искать  $Y_{\min}$  алгоритмом *Argioi*, а затем искать  $X_{\max}$  путем дуализации  $Y_{\min}$ .

Очевидно, что данный подход будет проявлять себя наилучшим образом в случаях, когда алгоритм *Argioi* или его модификации могут найти одно из искомым множеств существенно быстрее, чем другое множество, например когда мощность  $X_{\max}$  существенно меньше (больше) мощности  $Y_{\min}$ .

#### 3.2 Совместное перечисление $X_{\max}$ и $Y_{\min}$

В [3] предложена идея совместного перечисления множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$ . На первом шаге рассматривается некоторый случайный набор  $q \in \mathcal{P}$ . Если  $q$  — частый набор, то ищется максимальный частый набор, следующий за  $q$ , который пополняет множество  $X \subseteq X_{\max}$ . Если  $q$  — нечастый набор, то ищется минимальный нечастый набор, предшествующий  $q$ , который пополняет множество  $Y \subseteq Y_{\min}$ . Пусть на шаге  $i$  ( $i \geq 1$ ) построены множества  $X \subseteq X_{\max}$  и  $Y \subseteq Y_{\min}$ . Если  $X \neq \emptyset$ ,  $Y = \emptyset$ , то ищется набор  $q$  такой, что  $q \not\subseteq x, \forall x \in X$ . Если  $X = \emptyset$ ,  $Y \neq \emptyset$ , то ищется набор  $q$  такой, что  $q \not\subseteq y, \forall y \in Y$ . Если же и  $X \neq \emptyset$ , и  $Y \neq \emptyset$ , то ищется набор  $q$  такой, что  $q \not\subseteq x, \forall x \in X, q \not\subseteq y, \forall y \in Y$ . Затем, аналогично первому шагу, находится максимальный частый или минимальный нечастый набор. Однако в [3] идея совместного перечисления искомым множеств экспериментально не исследована и не предложены конкретные указания по возможной ее реализации.

Алгоритм, основанный на совместном перечислении множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$ , реализован в настоящей работе. Алгоритм строит две последовательности:  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_{\max}$ ,  $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_{\min}$ . На первом шаге  $X_1 = \{x\}$ ,  $Y_1 = \{y\}$ , где  $x$  и  $y$  ищутся алгоритмом *Argioi*. На шаге  $i + 1$  ( $i \geq 1$ ) строится либо  $I(X_i^-)$ , либо  $I(Y_i^+)$ . Пусть на шаге

$i + 1$  ( $i \geq 1$ ) построено множество  $I(X_i^-)$ . Согласно утверждениям 1 и 2, множество  $I(X_i^-)$  либо не содержит частых наборов и совпадает с множеством  $Y_{\min}$  (в этом случае  $X_i = X_{\max}$  и алгоритм заканчивает работу), либо  $I(X_i^-)$  содержит как частые, так и нечастые наборы. Каждый нечастый набор из  $I(X_i^-)$  является минимальным нечастым и пополняет множество  $Y_i$ , формируя в результате множество  $Y_{i+1}$ . Для каждого частого набора находится один содержащий его максимальный частый набор путем последовательного увеличения текущего частого набора в лексикографическом порядке, который пополняет множество  $X_i$ , формируя в результате множество  $X_{i+1}$ .

В экспериментальной части работы (см. разд. 4) рассмотрен случай произведения цепей. Задача дуализации решается с помощью асимптотически оптимального алгоритма дуализации цепей *RUNC-M+* [7]. Асимптотически оптимальные алгоритмы дуализации являются лидерами по скорости счета [8].

Очевидно, что время работы совместного алгоритма в основном зависит от числа минимальных нечастых и максимальных частых наборов. На каждой новой итерации происходит дуализация все больших по мощности множеств  $X$  или  $Y$ . Если число итераций становится достаточно большим, то скорость работы совместного перечисления существенно снижается, что делает его практически неприменимым для задач большой размерности.

#### 3.3 Последовательно-совместное перечисление $X_{\max}$ и $Y_{\min}$

Предлагается следующий итеративный метод, который синтезирует идеи последовательного и совместного методов, описанных выше. Положим  $X_0 = \emptyset$ . Строится одна последовательность  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_{\max}$ . На первом шаге  $X_1 = \{x\}$ , где  $x$  ищется алгоритмом *Argioi*. На шаге  $i + 1$  ( $i \geq 1$ ) решается задача дуализации множества  $X_i \setminus X_{i-1}$ .

Пусть множество  $D$  есть результат дуализации  $X_i \setminus X_{i-1}$ . Согласно утверждению 1, множество  $D$  содержит частые наборы. Для каждого частого набора из  $D$  находится один содержащий его максимальный частый набор путем последовательного увеличения текущего частого набора в лексикографическом порядке. Все найденные максимальные частые наборы, которых нет в множестве  $X_i$ , добавляются к  $X_i$ , и таким образом формируется  $X_{i+1}$ . Если же все найденные частые наборы уже содержатся в  $X_i$ , то решается задача дуализации множества  $X_i$ . Если в  $I(X_i^-)$  нет частых наборов,

то  $I(X_i^-) = Y_{\min}$ ,  $X_i = X_{\max}$  и алгоритм завершает работу. Иначе для каждого частого набора из  $I(X_i^-)$  находится один содержащий его максимальный частый набор, который пополняет множество  $X_i$ , формируя в результате множество  $X_{i+1}$ .

## 4 Экспериментальное исследование

Рассматривался случай данных, представленных в виде произведения цепей мощности 5. Для таких данных проводился поиск максимальных частых и минимальных нечастых наборов следующими методами: алгоритмом Apriori, модифицированным для случая цепей; последовательным методом; совместным методом; последовательно-совместным методом.

Все методы реализованы на языке Python 3. Задача дуализации решалась алгоритмом дуализации цепей RUNC-M+ [7]. Эксперименты проведены на случайных базах данных различной размерности. Можно выделить два следующих случая соотношения мощностей множеств всех частых и нечастых наборов.

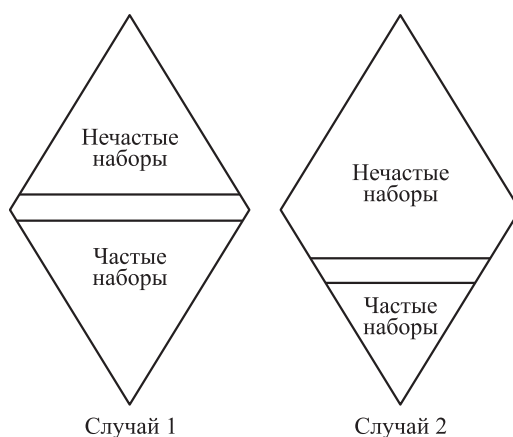
**Случай 1:** мощность множества частых наборов примерно равна мощности множества нечастых наборов.

**Случай 2:** мощность множества частых наборов существенно меньше (больше) мощности множества нечастых наборов.

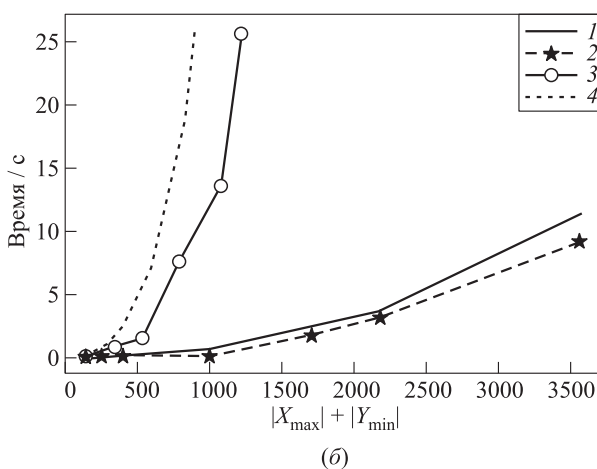
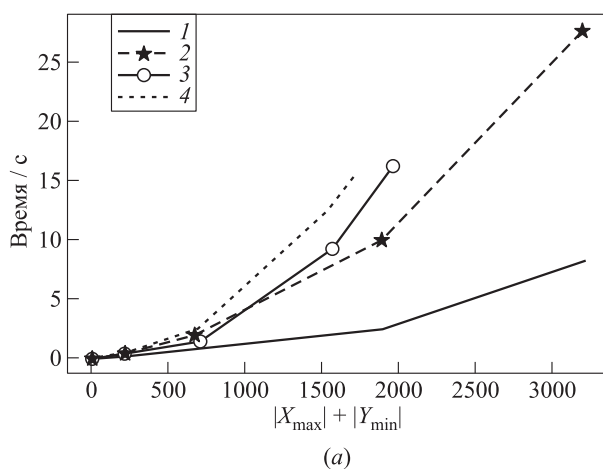
Описанные случаи схематично изображены на рис. 1.

Графики зависимости времени работы тестируемых методов от мощности множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$  приведены на рис. 2.

Нетрудно видеть, что в случае 1 лучше работает последовательно-совместный алгоритм: множества частых и нечастых наборов имеют примерно одинаковую мощность, поэтому быстрее будет обрабатывать их последовательно-совместным методом. В случае 2 быстрее работает последовательный алгоритм: быстрее найти множество максимальных частых наборов, обработав множество частых наборов, и дуализировать результат. Время поиска множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$  совместным методом и модифицированным алгоритмом Apriori растет существенно быстрее времени поиска последовательно-совместным методом в обоих случаях.



**Рис. 1** Два случая соотношения мощностей множеств частых и нечастых наборов



**Рис. 2** Зависимость времени работы алгоритмов от суммы мощностей множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$  для случая 1 (а) и 2 (б): 1 — последовательно-совместный; 2 — последовательный; 3 — совместный; 4 — Apriori

## 5 Заключение

Рассмотрена задача поиска максимальных частых и минимальных нечастых наборов в данных, представленных в виде декартова произведения частичных порядков. Актуальны вопросы снижения временных затрат, возникающих при реализации методов нахождения искомым наборов. Разработан новый подход к построению множества максимальных частых наборов  $X_{\max}$  и множества минимальных нечастых наборов  $Y_{\min}$ , представляющий собой синтез двух ранее известных подходов: последовательного и совместного (первый достаточно очевиден, идея второго предложена в [3]). Сложность последовательного, совместного и предлагаемого последовательно-совместного поиска обусловлена, в том числе, необходимостью рассматривать в процессе поиска труднорешаемую перечислительную задачу дискретной математики, называемую дуализацией над произведением частичных порядков.

Для случая, когда данные представлены в виде произведения конечных цепей, приведены результаты экспериментального сравнения названных подходов, а также независимого способа построения множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$ , не требующего решения задачи дуализации. Эксперименты проводились на модельных задачах с применением асимптотически оптимального алгоритма дуализации над произведением конечных цепей RUNC-M+ [7]. Результаты исследования свидетельствуют о том, что последовательно-совместный метод наиболее эффективен (требует меньших временных затрат по сравнению с другими рассмотренными методами) в случае, когда мощность множества частых наборов примерно равна мощности множества нечастых наборов. Иначе выигрывает последовательный по-

иск. Наихудшие показатели у независимого перечисления множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$  с использованием в качестве базового алгоритма Apriori [5], точнее его модификации на тестируемый случай. Таким образом, показана целесообразность применения алгоритмов дуализации для построения множеств  $X_{\max}$  и  $Y_{\min}$ .

## Литература

1. Aggarwal C. Frequent pattern mining. — Heidelberg: Springer, 2014. 467 p.
2. Agrawal R., Imielinski T., Swami A. Mining association rules between sets of items in large databases // SIGMOD Conference (International) on Management of Data Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 1993. P. 207–216.
3. Elbassioni K. On finding minimal infrequent elements in multi-dimensional data defined over partially ordered sets // arXiv.org, 2014. 30 p. arXiv:1411.2275 [cs.DB].
4. Elbassioni K. Algorithms for dualization over products of partially ordered sets // SIAM J. Discrete Math., 2009. Vol. 23. Iss. 1. P. 487–510.
5. Agrawal R., Srikant R. Fast algorithms for mining association rules in large databases // 20th Conference (International) on Very Large Data Bases Proceedings. — San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publ. Inc., 1994. P. 487–499.
6. Хачиян Л. Г. Избранные труды. — М.: МЦНМО, 2009. 520 с.
7. Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Прокофьев П. А. О дуализации над произведением частичных порядков // Машинное обучение и анализ данных, 2017. Т. 3. № 4. С. 239–249.
8. Дюкова Е. В., Прокофьев П. А. Об асимптотически оптимальных алгоритмах дуализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. Т. 55. № 5. С. 895–910.

Поступила в редакцию 15.01.21

---



---

## FINDING MAXIMAL FREQUENT AND MINIMAL INFREQUENT SETS IN PARTIALLY ORDERED DATA

N. A. Dragunov and E. V. Djukova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** Relevant issues of time costs reducing in the logical analysis of data with elements from the Cartesian product of finite partially ordered sets are investigated. An original method based on solving a complex discrete problem called dualization over the product of partial orders is proposed for the problem of finding maximal frequent and minimal infrequent sets in the transaction database. The proposed method is a synthesis of two other known methods, one of which is quite obvious and the other uses the idea of an incremental enumeration of target

sets and is, therefore, mainly of theoretical interest. An experimental study of the considered approaches in the case of the product of finite chains is carried out and conditions for their effectiveness are revealed. The expediency of applying asymptotically optimal dualization algorithms over the product of partial orders is shown.

**Keywords:** maximal frequent sets; minimal infrequent sets; dualization over the product of partial orders; asymptotically optimal dualization algorithm

**DOI:** 10.14357/19922264220112

## References

1. Aggarwal, C. 2014. *Frequent pattern mining*. Heidelberg: Springer. 467 p.
2. Agrawal, R., T. Imielinski, and A. Swami. 1993. Mining association rules between sets of items in large databases. *SIGMOD Conference (International) on Management of Data Proceedings*. New York, NY: ACM. 207–216.
3. Elbassioni, K. 2014. On finding minimal infrequent elements in multidimensional data defined over partially ordered sets. arXiv.org. 30 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1411.2275.pdf> (accessed January 25, 2022).
4. Elbassioni, K. 2009. Algorithms for dualization over products of partially ordered sets. *SIAM J. Discrete Math.* 23(1):487–510.
5. Agrawal, R., and R. Srikant. 1994. Fast algorithms for mining association rules in large databases. *20th Conference (International) on Very Large Data Bases Proceedings*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publ. Inc. 487–499.
6. Khachiyan, L. G. 2009. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow: MCCME. 520 p.
7. Djukova, E. V., G. O. Maslyakov, and P. A. Prokofyev. 2017. O dualizatsii nad proizvedeniem chastichnykh poryadkov [On dualization over the product of partial orders]. *Mashinnoe obuchenie i analiz dannykh* [J. Machine Learning Data Analysis] 3(4):239–249.
8. Djukova, E. V., and P. A. Prokofyev. 2015. Asymptotically optimal dualization algorithms. *Comp. Math. Math. Phys.* 55(5):891–905.

*Received January 15, 2021*

## Contributors

**Dragunov Nikita A.** (b. 1997) — PhD student, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; nikitadragunovjob@gmail.com

**Djukova Elena V.** (b. 1945) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; edjukova@mail.ru

# ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ\*

К. К. Абгарян<sup>1</sup>, Е. С. Гаврилов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Создание новых композиционных материалов (КМ) с прогнозируемыми свойствами и разработка способов их конструирования на сегодня стали одними из актуальных и важнейших задач, связанных с модернизацией промышленного производства в нашей стране. Для их решения активно развиваются технологии многомасштабного компьютерного моделирования. Они стали связующим звеном между фундаментальной физикой (химией) и инженерным материаловедением. В работе представлен программный комплекс по моделированию структурных свойств КМ, позволяющий решать ряд задач данного класса. Он ориентирован на высокопроизводительные вычисления. В основе комплекса лежит оригинальная многомасштабная технология, которая позволяет оперативно проводить многовариантный анализ различных классов КМ и проводить исследования по проектированию новых с прогнозируемыми свойствами. Разработанные подходы в сочетании с экспериментальными данными могут быть использованы для лучшего понимания физических основ изменения свойств в зависимости от структуры и, как следствие, для удешевления и ускорения поиска новых КМ с заданными свойствами.

**Ключевые слова:** многомасштабное моделирование; композиционные материалы; интеграционная платформа; программный комплекс; распределенная система

**DOI:** 10.14357/19922264220113

## 1 Введение

Создание новых КМ с прогнозируемыми свойствами и разработка способов их конструирования на сегодня стали одними из актуальных и важнейших задач по модернизации промышленного производства в нашей стране. Особенно важны такие материалы в областях, где соотношение между прочностью и массой конструкции определяет ее эффективность. На сегодня процессы создания КМ непосредственно связаны с этапом моделирования, включая применение наиболее эффективных методов многомасштабного компьютерного моделирования и анализа данных.

Для решения данного класса задач разработан программный комплекс по моделированию структурных свойств КМ. Он ориентирован на высокопроизводительные вычисления. В основе комплекса лежит оригинальная многомасштабная технология, представленная в [1, 2], которая позволяет оперативно проводить многовариантный анализ различных классов КМ. На базе разработанной технологии была создана распределенная информационная система для проведения многоуровневых исследований в области моделирования КМ.

Согласно разработанным подходам в зависимости от типа моделируемого КМ строится многомасштабная композиция и ее схематическое представление. На ее основе в программной среде формируется сценарий расчета структурных характеристик и отдельных свойств рассматриваемого материала. Созданный программный комплекс позволяет автоматизировать унифицируемые этапы моделирования и помогает сформировать на основе анализа полученных результатов более глубокое понимание физических процессов. Комплекс построен с применением современных программных средств и решений и не уступает международному уровню научно-технических разработок в области информационной поддержки для многомасштабного моделирования новых материалов.

Разработка такого средства информационной поддержки позволяет обеспечить формирование информации для многопараметрического анализа структуры и физических свойств различных классов существующих КМ, рассмотреть большое число вариантов в направлении поиска новых материалов и, таким образом, ускорить и удешевить процесс подбора параметров получения материалов. Ис-

\* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2020-799).

<sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, kristal83@mail.ru

<sup>2</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), eugavrilov@gmail.com



пользование данного комплекса позволяет за ограниченное время строить гибридные модели для обоснованного выбора КМ с заданными свойствами для авиационно-космической и других областей промышленности.

В связи с тем что традиционные материалы (преимущественно металлы) не в полной мере отвечают высоким физико-механическим, технологическим и эксплуатационными свойствам, развитие производства современных надежных и экономичных конструкций в машиностроении основано на применении новых КМ. Под композиционными понимаются материалы, состоящие из двух или более физически различных компонент (фаз), возможные комбинации которых приводят к появлению уникальных свойств, отличных от тех, которыми обладала каждая из них отдельно. На сегодня для развития авиационно-космической отрасли, включая самолетостроение, вертолетостроение, ракетостроение, требуется постоянное увеличение доли полимерных КМ с набором заданных свойств. Современные летательные аппараты обладают сложной конструкцией, состоящей из металлов и неметаллических материалов. Применяются детали из алюминиевых и стальных сплавов, коррозионноустойчивых сталей, титановых сплавов и полимерных КМ (стекло-, угле-, органопластики и др.). Для снижения веса и продления срока службы летательных аппаратов при производстве деталей все шире применяют полимерные КМ.

Сегодня наиболее востребованные CAE- (Computer-Aided Engineering) системы, такие как ABAQUS (<https://simulia.com>), ANSYS (<https://Ansys.com>), LMS Engineering innovation (<https://trademarks.justia.com>), Femap (<https://www.cad-is.ru/femap>), MSC Software (<http://www.mssoftware.ru>) включают в себя базы данных со свойствами материалов. Для КМ можно выбрать тип композита со стандартными свойствами (угле-, стекло-, органопластики на основе эпоксиформальдегидных, кремнийорганических смол, эпоксидные боропластики и т.д.). Имеется возможность коррекции данных свойств и внесения материала с новыми свойствами в базу данных. Следует также отметить российские разработки в области моделирования КМ, такие как пакет CAE-Fidesys (<https://cae-fidesys.com>), программный пакет для моделирования полимерных материалов Multicomp (<https://www.kintechlab.com/products>), Российский исследовательский и инженерно-технологический проект N1 Composites (<http://n1composites.com>) и др.

Программные комплексы позволяют задать свойства материалов, из которых состоит КМ, такие как изотропность, ортотропность, анизотроп-

ность. Важная часть проектирования композиционных конструкций — преобразование модели, созданной с применением CAD (Computer-aided design, системы автоматизированного проектирования) в модель, пригодную для CAE-анализа (нетривиальная задача, требующая зачастую создания экспертной системы). Следует отметить, что функционал всех мировых лидеров в CAE-сегменте схож. Так, функционал MSC позволяет встраивать разработанные пользователем модули в программный комплекс (например, можно включить метод имитации процесса производства КМ).

Помимо используемых ведущими CAE-системами модулями существуют коммерческие системы, позволяющие генерировать КМ на микроуровне, а затем проводить численные эксперименты на макроуровне. К таким системам относятся модуль генерации и моделирования механических характеристик КМ GeoDict ([www.math2market.com](http://www.math2market.com)) с различными типами КМ, генерируемыми модулем GeoDict, и программный комплекс COMSOL ([www.comsol.ru](http://www.comsol.ru)).

В современных ведущих CAE-системах учет микроструктуры КМ проводится после гомогенизации свойств материала или определения макромасштабных свойств КМ. При этом, однако, теряются индивидуальные детали микроструктуры КМ [3]. При определении макромасштабных свойств КМ обычно исходят из идеальных условий: оптимального формирования граничной поверхности, идеального распределения (отсутствия взаимодействия частиц между собой) и отсутствия влияния компонента на матрицу.

Однако результаты, которые на сегодня могут быть получены с использованием CAE-систем для воспроизведения характеристик известных структур, зачастую могут расходиться с данными экспериментов — например, когда речь идет о полимерных КМ с нановключениями (нанотрубками). Известно влияние добавления наноразмерных частиц наполнителя на изменение механических свойств КМ. В литературе широко описано изменение коэффициента теплопроводности полимерных матриц в несколько раз при их наполнении нанотрубками, представлены теоретические исследования с аналогичными результатами [1]. Использование CAE-систем не позволяет в полной мере оценить фактор влияния наночастиц на данные свойства. Кроме того, применение CAE-систем в контексте многомасштабного моделирования затруднено жесткими ограничениями пакетных решений. В настоящее время развиваются системы с программным обеспечением для многомасштабного моделирования, такие как Computational Soft Materials (Comsoft) Workbench, позволяющий мо-

делировать КМ с «мягкой» структурой (полимеры, полимерные композиты), программный пакет LAMMPS (<https://www.lammps.org>), используемый для моделирования в рамках классической молекулярной динамики на атомистическом и мезомасштабном уровнях полимерных, металлических, биологических систем и др. Каждый из разрабатываемых программных продуктов обладает своими достоинствами и областями применения. В связи с большим разнообразием типов КМ и все возрастающими требованиями к наборам свойств, которыми они должны обладать, представляется важным создание программных средств, позволяющих оперативно выстраивать системные решения в области многомасштабного моделирования с применением высокопроизводительных вычислений, позволяющих проводить моделирование от атомно-кристаллического до макроуровня. Такие системы позволят генерировать и выполнять в автоматическом режиме сценарии проведения расчетов под конкретную задачу, включать в вычислительную схему расчеты на всех необходимых масштабных уровнях. Для предсказательного моделирования структурных свойств различных классов КМ такой подход позволяет создавать вычислительную среду, в которой задействованы возможности CAE-систем для верхнеуровневого (макро-) моделирования, методы анализа экспериментальных и аналитических данных, а также собственные разработки и пакетные приложения для расчетов на атомно-кристаллическом и наноразмерном уровне.

## 2 Многомасштабная модель для расчета структурных свойств композиционных материалов

В работе [2] представлена общая схема многомасштабной модели для расчета структурных характеристик КМ. Для ее описания используется теоретико-множественный аппарат, изложенный в [1, 2]. На ее основе формируются схемы для расчета разных классов КМ: нанокompозитов на основе полимерной матрицы, КМ с металлической матрицей, полимерных КМ с углеволокном и др.

### Основные уровни моделирования

**Квантово-механический.** Рассматриваются отдельные молекулы. Решается уравнение Шредингера, определяется атомарная структура молекул полимера и наполнителя, строится электронная структура и рассчитывается когезионная энергия, рассчитываются межатомные и межмолекулярные

силы, определяются отдельные физико-химические свойства.

**Молекулярно-динамический.** Изучаются ансамбли из молекул. Решаются уравнения молекулярной динамики с использованием потенциалов межатомного взаимодействия, рассчитываются структурные характеристики матрицы (полимерной, металлической и др.), наполнителя (нанотрубки, волокна и др.), физические свойства.

**Мезоскопический.** Рассматриваются крупнозернистые модели. Используется упрощенное строение молекул. Цель моделирования на мезоуровне — получение распределения частиц наполнителя в матрице (полимерной, металлической и др.) с последующим расчетом инженерных свойств полученных систем.

**Континуальный (макроскопический).** Проводится расчет инженерных свойств (механические свойства, теплопроводность и др.). Задачи решаются с применением механики сплошных сред, гидродинамики, теории упругости. Применяются метод конечных элементов, методы решения краевых задач для моделирования различных процессов.

Рассмотрим пример построения многомасштабной композиции для тестового расчета структурных свойств металлического КМ (МКМ) на основе Ti (титана), армированного волокнами Mo (молибдена). На сегодня Ti и титановые сплавы стали очень привлекательными материалами для перспективных сфер применения благодаря таким свойствам, как низкая плотность, высокие механические свойства и коррозионная стойкость. Использование данных материалов в конструкциях самолетов (реактивный двигатель и фюзеляж) и применение в автомобильной промышленности растут быстрыми темпами. Одним из способов совершенствования титановых сплавов стало их применение в качестве матрицы для КМ, армированных волокнами, например из Mo, которые обладают очень хорошими механическими свойствами ([http://viam-works.ru/ru/articles?art\\_id=1103](http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=1103)).

Задействуем четыре перечисленных выше масштабных уровня (не считая нулевого). Используя обозначения из [1, 2], для построения многомасштабной композиции

$$MK_{0,1,2,3,4}^{(Mo, Ti; 1,1; 1,2; 2,1; 2,2; 3,1; 4,1)} = MK_{0,1,2,3,4}^{(Ti/Mo)}$$

приведем экземпляры базовых моделей-композиций:

$$\begin{aligned} E1_{01}^{Ti} &: \{V_{01}^{Ti}, X_{01}^{Ti}, MA_{01}^{Ti}\}; \\ E1_{01}^{Mo} &: \{V_{01}^{Mo}, X_{01}^{Mo}, MA_{01}^{Mo}\}; \\ MC_{11}^{Ti} &: \{V_{11}^{Ti}, X_{11}^{Ti}, MA_{11}^{Ti}\}; \\ MC_{11}^{Mo} &: \{V_{11}^{Mo}, X_{11}^{Mo}, MA_{11}^{Mo}\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{MC}_{12}^{\text{Ti}} &: \{V_{12}^{\text{Ti}}, X_{12}^{\text{Ti}}, \text{MA}_{12}^{\text{Ti}}\}; \\
 \text{MC}_{12}^{\text{Mo}} &: \{V_{12}^{\text{Mo}}, X_{12}^{\text{Mo}}, \text{MA}_{12}^{\text{Mo}}\}; \\
 \text{MC}_{21}^{\text{Ti}} &: \{V_{21}^{\text{Ti}}, X_{21}^{\text{Ti}}, \text{MA}_{21}^{\text{Ti}}\}; \\
 \text{MC}_{21}^{\text{Mo}} &: \{V_{21}^{\text{Mo}}, X_{21}^{\text{Mo}}, \text{MA}_{21}^{\text{Mo}}\}; \\
 \text{MC}_{22}^{\text{Ti}} &: \{V_{22}^{\text{Ti}}, X_{22}^{\text{Ti}}, \text{MA}_{22}^{\text{Ti}}\}; \\
 \text{MC}_{22}^{\text{Mo}} &: \{V_{22}^{\text{Mo}}, X_{22}^{\text{Mo}}, \text{MA}_{22}^{\text{Mo}}\}; \\
 \text{MC}_{31}^{\text{Ti/Mo}} &: \{V_{31}^{\text{Ti/Mo}}, X_{31}^{\text{Ti/Mo}}, \text{MA}_{31}^{\text{Ti/Mo}}\}; \\
 \text{MC}_{41}^{\text{Ti/Mo}} &: \{V_{41}^{\text{Ti/Mo}}, X_{41}^{\text{Ti/Mo}}, \text{MA}_{41}^{\text{Ti/Mo}}\}.
 \end{aligned}$$

Согласно схематическому представлению (рис. 1) многомасштабная композиция  $\text{МК}_{0,1,2,3,4}^{(\text{Ti/Mo})}$  состоит из связанных между собой экземпляров базовых моделей композиций, размещенных на соответствующих масштабных уровнях. На наноуровне проводится молекулярно-динамическое

моделирование структурных свойств титановой матрицы и молибденовых волокон. На мезоуровне рассматривается распределение частиц в МКМ, на макроуровне проводится расчет механических свойств МКМ.

### 3 Программный комплекс

Программный комплекс, интегрированный с расчетными пакетами и модулями, размещается на высокопроизводительных многоядерных системах, оснащенных мощными графическими процессорами. Это связано с тем, что исполнение вычислительных экспериментов, а также обработка и анализ результатов вычислительных экспериментов ориентированы на распределенные системы сбора, хранения и обработки больших данных. В основе программного комплекса лежит интеграционная платформа для многомасштабного моделирования, которая объединяет информационные потоки на разных масштабных уровнях.

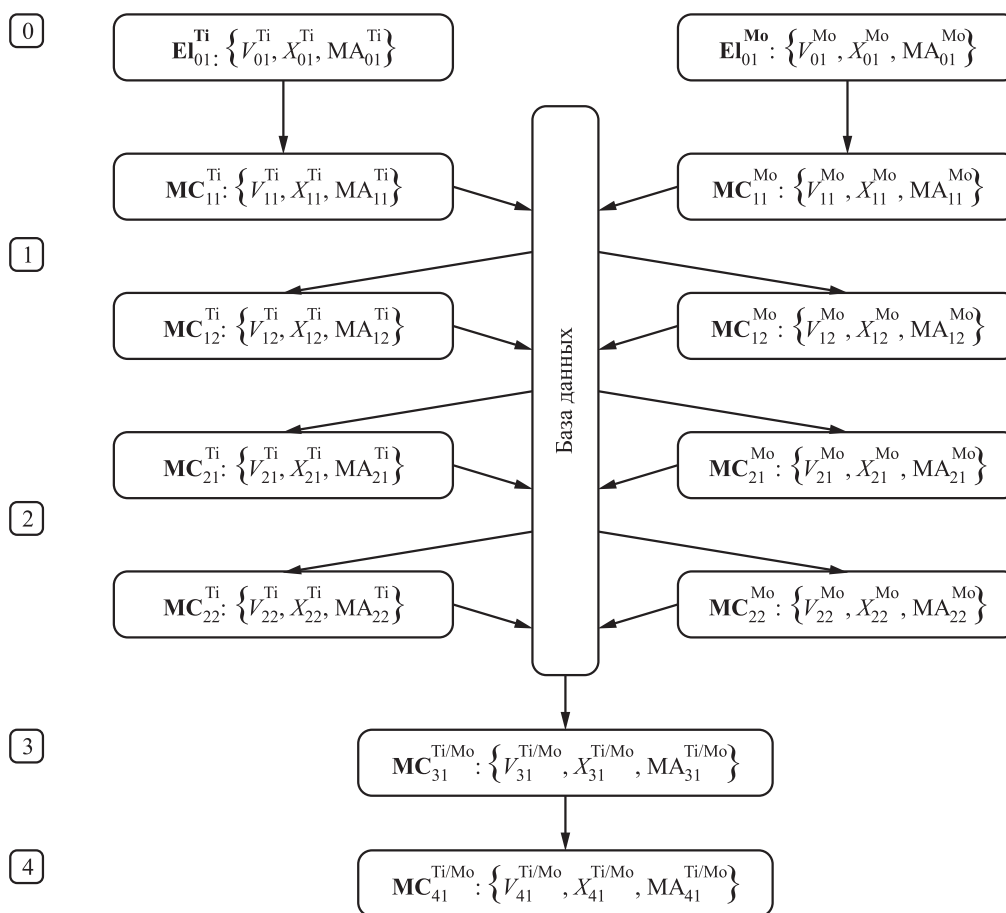


Рис. 1 Схема многомасштабной композиции  $\text{МК}_{0,1,2,3,4}^{(\text{Ti/Mo})}$  для расчета структурных свойств МКМ

При решении конкретной задачи, такой как расчет структурных особенностей, механических или иных свойств КМ, при изучении процессов их деградации и разрушения и др. выделяются конкретные уровни моделирования, которые необходимо задействовать. Первоначально строится многомасштабная композиция — информационный аналог многомасштабной физико-математической модели. Для программной реализации на базе интеграционной платформы [4] из имеющихся программных модулей формируется вычислительный комплекс [5, 6].

Перечислим пользовательские роли в интеграционной платформе многомасштабного моделирования:

- разработчик вычислительных модулей реализует расчетный модуль или осуществляет конфигурирование прикладного пакета;
- системный разработчик создает веб-сервисы для вычислительного модуля и интегрирует его в платформу;
- разработчик расчетных сценариев создает сценарии в среде моделирования;
- ученый-исследователь прикладной области запускает расчетные сценарии с различными параметрами и анализирует результаты.

Как отмечалось в [5, 6], программный комплекс предназначен для создания и исполнения сценариев многомасштабных расчетов для моделирования структурных свойств композитных материалов.

Сценарий — программная реализация многомасштабной композиции — представляет собой алгоритм последовательного выполнения расчетов отдельных физических характеристик материалов, входящих в состав композита, посредством интегрированных с программным комплексом вычислительных модулей. Среда моделирования сценариев позволяет создавать или модифицировать сценарии, учитывая особенности конкретного КМ и требуемые свойства.

Среда исполнения сценариев дает возможность осуществить его запуск с заданными входными параметрами, отслеживать его выполнение в целом и по составным задачам, просматривать входные и выходные данные (результаты расчетов). Интеграционная роль среды исполнения заключается в формировании входных данных для вычислительных модулей в соответствующем формате и единицах измерения, отслеживании работы модулей, получении конечного результата расчета и преобразовании его в формат и единицы измерения, доступные для других модулей сценария. Таким образом, среда исполнения обеспечивает соответствие потока исполнения вычислительных модулей заданному алгоритму в сценарии и целостность потока данных между блоками сценария. Кроме того, среда исполнения предоставляет общие словари для согласования входных-выходных данных вычислительных экспериментов, такие как справочник химических элементов и их свойств, химических формул веществ, используемых в композитных материалах, типы кристаллических систем, типы атомных радиусов, пространственные группы.

### Алгоритм программы

Алгоритм исполнения сценария основан на стандарте BPMN 2.0 и состоит из следующих ключевых элементов (рис. 2).

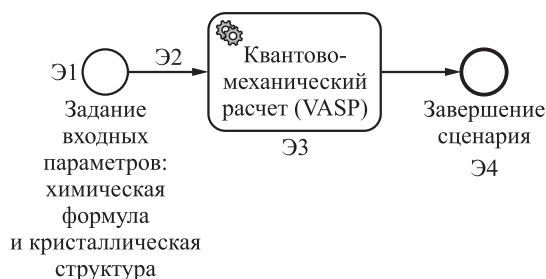


Рис. 2 Пример простого сценария

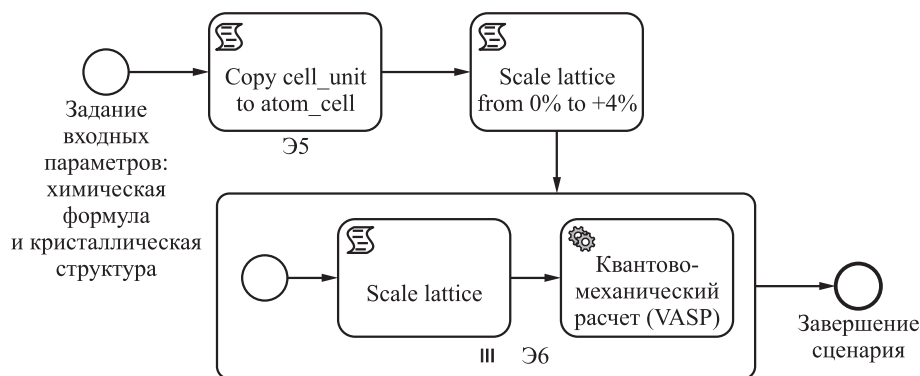


Рис. 3 Пример сценария с циклом

- Э1. Точка начала выполнения сценария. В свойствах этого элемента указывается список кодов физических величин, которые пользователь должен будет ввести перед запуском сценария.
- Э2. Сплошная стрелка определяет строгую последовательность выполнения шагов сценария.
- Э3. Вычислительная задача представляется в BPMN как «внешняя сервисная задача» (External Service Task). В поле topic в настройках

- задачи вводится название очереди задач соответствующего вычислительного модуля. Например, для квантово-механического расчета на пакете VASP вводится «vasp\_topic». Список доступных вычислительных модулей с названиями очередей хранится в базе данных в таблице «Module».
- Э4. Точка завершения выполнения сценария. Если в сценарии существует ветвление, точек завершения может быть несколько.

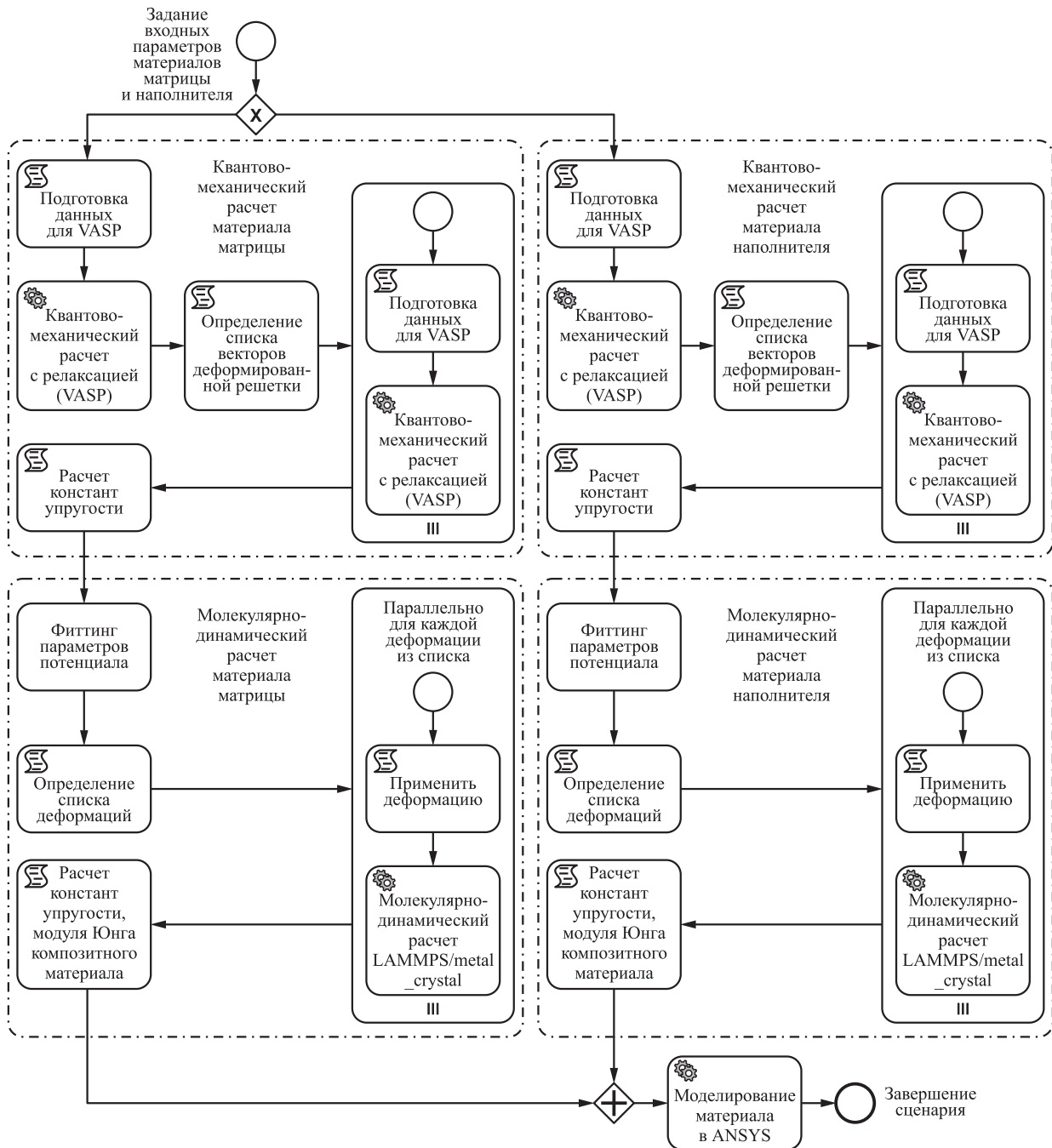


Рис. 4 Сценарий для расчета МКМ

- Э5. Шаг сценария, в рамках которого выполняется скрипт, заданный пользователем. В параметрах задачи может быть указан язык скрипта и сам скрипт. Доступны языки Groovy и Jython (реализация языка Python на Java). Скрипты могут использоваться для изменения входных и выходных параметров, небольших вычислений на основе текущих доступных данных сценария. В примере на рис. 3 в цикле определяется список векторов кристаллической решетки, по которым будет проводиться квантово-механический расчет деформированной решетки.
- Э6. Подпроцесс сценария «цикл с параллельным запуском» (Parallel multi-instance) позволяет параллельно запустить выполнение части сценария

несколько раз. В свойствах подпроцесса требуется указать коллекцию (Collection), по элементам которой будет проводиться итерирование, и название переменной цикла (Element Variable). Весь элемент считается выполненным, когда все параллельно выполняющиеся подпроцессы завершат свою работу. Например, если требуется запустить квантово-механический расчет для некоторого множества деформированных решеток (для определения в дальнейшем констант упругости), предварительно в скрипте перед циклом формируется список деформированных векторов решетки и сохраняется в переменную процесса. Далее для каждой деформации параллельно вызывается

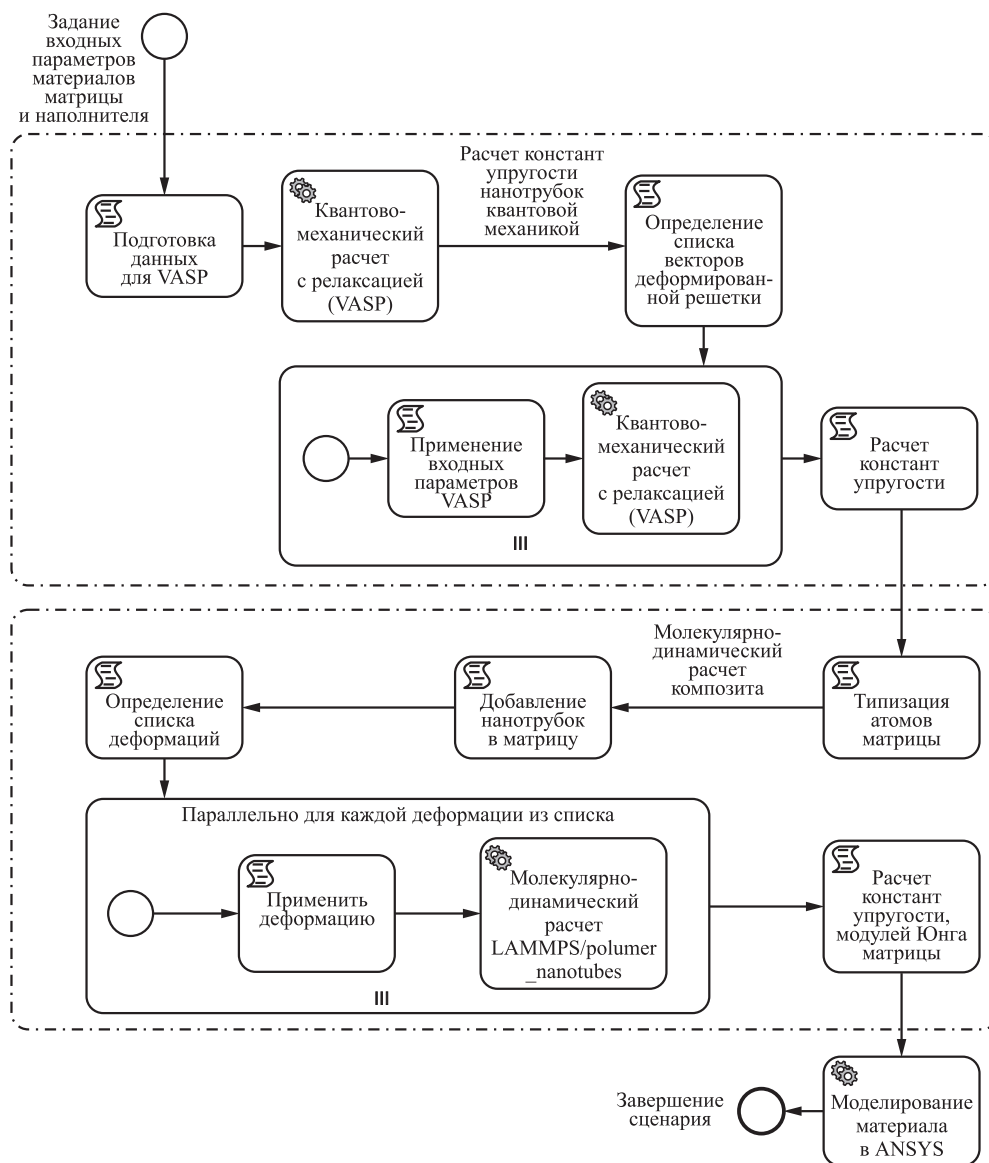


Рис. 5 Сценарий для расчета механических свойств полимерного нанокомпозита

квантово-механический модуль VASP для расчета энергии и объема решетки. Получившаяся таблица с данными может использоваться для расчета констант эластичности, модуля упругости и других свойств материала.

**Пример 3.** Тестовый сценарий для расчета механических свойств КМ с полимерной матрицей (эпоксидная смола) и углеволокном (рис. 6).

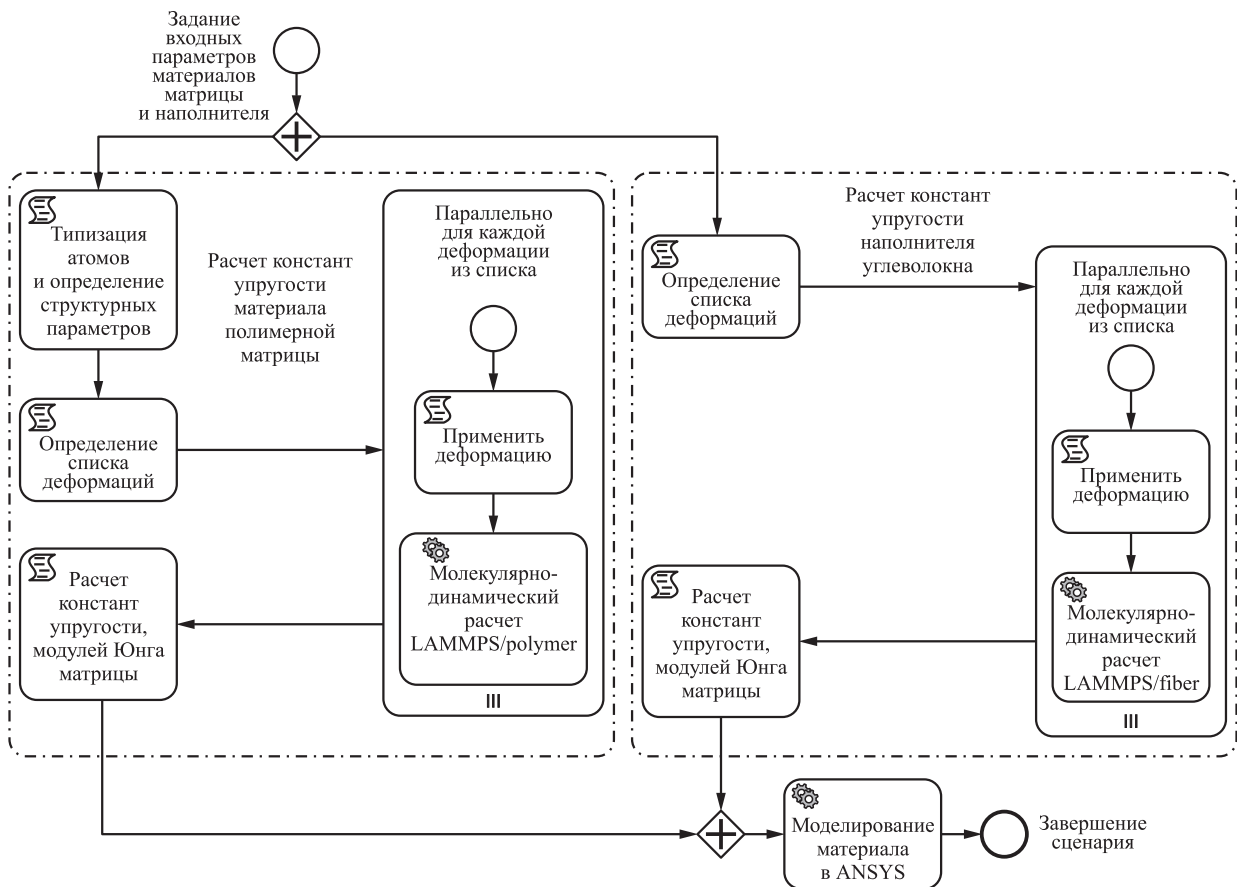
**Примеры тестовых сценариев для расчета структурных характеристик и отдельных свойств различных классов композиционных материалов**

**Пример 1.** Тестовый сценарий для расчета структурных свойств КМ с металлической матрицей (рис. 4).

**Пример 2.** Тестовый сценарий для расчета механических свойств полимерного нанокompозита (полифениленсульфид с углеродными нанотрубками). На следующем этапе проекта планируется расширить сценарий для оценки влияния процентного содержания углеродных нанотрубок на изменение коэффициента теплопроводности полимерного нанокompозита (рис. 5).

**4 Выводы**

В работе представлен программный комплекс для расчета структурных характеристик КМ с требуемыми свойствами. В его основе лежит интеграционная платформа для многомасштабного моделирования, которая объединяет информационные потоки на разных масштабных уровнях. На ее основе формируются схемы для расчета структурных характеристик разных классов КМ: нанокompозитов на основе полимерной матрицы, КМ с металлической матрицей, полимерных КМ с углеволокном и другие. Разработанные подходы позволяют моделировать свойства КМ (механические, тепловые и др.), а также многомасштабные процессы, связанные с усталостным разрушением при случайных повреждениях в ходе эксплуатации, и другие динамические процессы. Программный комплекс состоит из программных модулей и базируется на



**Рис. 6** Сценарий для расчета КМ с полимерной матрицей и наполнителем из углеволокна

типовых сервисах вычислительных модулей, общей интеграционной оболочки и модулей сценариев. Программные решения сертифицированы. В дальнейшем планируется разработать полнофункциональную программную систему с целью решения различных классов обратных задач в области наук о материалах. Разработанные подходы в сочетании с экспериментальными данными могут быть использованы для лучшего понимания физических основ изменения свойств в зависимости от структуры и, как следствие, для удешевления и ускорения поиска новых КМ с заданными свойствами.

## Литература

1. *Абгарян К. К.* Многомасштабное моделирование в задачах структурного материаловедения. — М.: МАКС-Пресс, 2017. 284 с.
2. *Абгарян К. К.* Информационная технология построения многомасштабных моделей в задачах вычисли-

тельного материаловедения // Системы высокой доступности, 2018. Т. 14. № 2. С. 9–15.

3. *Naffakh M., Díez-Pascuala A. M., Marcoa C., Ellisa G.* Morphology and thermal properties of novel poly (phenylene sulfide) hybrid nanocomposites based on single-walled carbon nanotubes and 8 inorganic fullerene-like WS 2 nanoparticles // *J. Mater. Chem.*, 2012. Vol. 22. No. 4. P. 1418–1425.
4. *Абгарян К. К., Гаврилов Е. С.* Распределенная информационная система для расчета структурных свойств композиционных материалов // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 50–58. doi: 10.14357/19922264210407.
5. *Гаврилов Е. С.* Интегрированный интерфейс к модулю сплошноредного взаимодействия. Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ № 2021681058, 2021.
6. *Гаврилов Е. С.* Программные средства для хранения и обмена данными в задачах моделирования композитных материалов. Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ № 2021681762, 2021.

Поступила в редакцию 22.01.22

---

---

## SOFTWARE PACKAGE FOR MULTISCALE MODELING OF STRUCTURAL PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS

K. K. Abgaryan<sup>1</sup> and E. S. Gavrilov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125080, Russian Federation

**Abstract:** Today, creation of new composite materials and methods of their construction with predictable properties is one of the urgent and most important tasks connected with modernization of industrial production in our country. For their solution, technologies of multiscale computer modeling are actively developed. They have become a link between fundamental physics (chemistry) and engineering materials science. The paper presents a software package for modeling structural properties of composite materials which allows solving a number of problems of this class. It is focused on high-performance computations. The complex is based on an original multiscale technology which allows one to promptly conduct multivariate analysis of different classes of composite materials and conduct research on designing the new ones with predictable properties. The developed approaches in combination with experimental data can be used for a better understanding of the physical foundations of the change of properties depending on the structure and, as a consequence, for cheaper and faster search of new composite materials with predetermined properties.

**Keywords:** multiscale modeling; composite materials; integration platform; software package; distributed system

**DOI:** 10.14357/19922264220113

## Acknowledgments

The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 075-15-2020-799).

## References

1. Abgaryan, K. K. 2017. *Mnogomasshtabnoe modelirovanie v zadachakh strukturnogo materialovedeniya* [Multiscale modeling for structural materials science applications]. Moscow: MAKS Press. 284 p.
2. Abgaryan, K. K. 2018. *Informatsionnaya tekhnologiya postroeniya mnogomasshtabnykh modeley v zadachakh vy-*



- chislitel'nogo materialovedeniya [Information technology is the construction of multi-scale models in problems of computational materials science]. *Sistemy vysokoy dostupnosti* [Highly Available Systems] 14(2):9–15.
3. Naffakh, M., A. M. Díez-Pascuala, C. Marcoa, and G. Elisa. 2012. Morphology and thermal properties of novel poly (phenylene sulfide) hybrid nanocomposites based on single-walled carbon nanotubes and 8 inorganic fullerene-like WS<sub>2</sub> nanoparticles. *J. Mater. Chem.* 22(4):1418–1425.
  4. Abgaryan, K. K., and E. S. Gavrilov. 2021. Raspredelenaya informatsionnaya sistema dlya rascheta strukturnykh svoystv kompozitsionnykh materialov [Distributed information system for calculating the structural properties of composite materials]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):50–58. doi: 10.14357/19922264210407.
  5. Gavrilov, E. S. 2021. Integrirovanny interfeys k modulyu splotnosrednogo vzaimodeystviya [Integrated interface to the solid-medium interaction module]. Certificate on official registration of the computer program No. 2021681058.
  6. Gavrilov, E. S. 2021. Programmnye sredstva dlya khra-neniya i obmena dannymi v zadachakh modelirovaniya kompozitnykh materialov [Software tools for data persistence and data flow in composite materials modeling tasks]. Certificate on official registration of the computer program No. 2021681762.

*Received January 22, 2022*

## Contributors

**Abgaryan Karine K.** (b. 1963) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; head of department, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125080, Russian Federation; kristal83@mail.ru

**Gavrilov Evgeny S.** (b. 1982) — scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; senior lecturer, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125080, Russian Federation; eugavrilov@gmail.com

**Абгарян Каринэ Карленовна** (р. 1963) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; заведующая кафедрой Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Аблаев Фарид Мансурович** (р. 1953) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической кибернетики Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета

**Агаларов Явер Мирзабекович** (р. 1952) — кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Андрианов Сергей Николаевич** (1959–2020) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Академии наук Республики Татарстан

**Андрианова Наталия Сергеевна** (р. 1983) — кандидат филологических наук, доцент кафедры теории и практики преподавания иностранных языков Института филологии и межкультурной коммуникации Казанского (Приволжского) федерального университета

**Битюков Юрий Иванович** (р. 1972) — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Босов Алексей Вячеславович** (р. 1969) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Гаврилов Евгений Сергеевич** (р. 1982) — научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра

«Информатика и управление» Российской академии наук; старший преподаватель Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Григорьев Олег Георгиевич** (р. 1957) — доктор технических наук, руководитель Института проблем искусственного интеллекта Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Денискина Галина Юрьевна** (р. 1993) — аспирант факультета «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Драгунов Никита Аркадьевич** (р. 1997) — аспирант Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Дюкова Елена Всеволодовна** (р. 1945) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Кириков Игорь Александрович** (р. 1955) — кандидат технических наук, директор Калининградского филиала Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Киселёв Глеб Андреевич** (р. 1992) — научный сотрудник Института проблем искусственного интеллекта Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ассистент Российского университета дружбы народов

**Ковалёв Сергей Протасович** (р. 1972) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук

**Кочнева Юлия Юрьевна** (р. 1985) — научный сотрудник Академии наук Республики Татарстан

**Курузов Илья Алексеевич** (р. 1999) — аспирант Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)

**Листопад Сергей Викторович** (р. 1984) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Ка-

лининградского филиала Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Малашенко Юрий Евгеньевич** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Панов Александр Игоревич** (р. 1987) — кандидат физико-математических наук, заведующий отделом Института проблем искусственного интеллекта Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; заместитель заведующего лабораторией Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)

**Пешкова Ирина Валерьевна** (р. 1975) — кандидат физико-математических наук, доцент Петрозаводского государственного университета

**Синицын Игорь Николаевич** (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Смирнов Иван Валентинович** (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий отделом Института проблем искусственного ин-

теллекта Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; доцент Российского университета дружбы народов

**Суворова Маргарита Игоревна** (р. 1991) — главный специалист Института проблем искусственного интеллекта Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Торшин Иван Юрьевич** (р. 1972) — кандидат физико-математических наук, кандидат химических наук, старший научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Чуганская Анфиса Анваровна** (р. 1985) — кандидат психологических наук, научный сотрудник Института проблем искусственного интеллекта Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Шихиев Фуад Шукурович** (р. 1980) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информатики Дагестанского государственного университета

**Шихиев Шукур Бабаевич** (р. 1951) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информатики Дагестанского государственного университета



**Академик Юрий Иванович Журавлёв**

**14.01.1935—14.01.2022**

В январе этого года ушел из жизни главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, председатель Редакционного совета журнала «Информатика и её применения» академик Юрий Иванович Журавлёв. В его лице мировая наука потеряла одного из своих ярчайших представителей — выдающегося ученого-исследователя и талантливую ученого-организатора.

Юрий Иванович родился в Воронеже в 1935 г. в семье ученого и врача. Среднее образование получил в школе № 6 г. Фрунзе (ныне Бишкек) Киргизской ССР. В 1952 г. поступил на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. В 1957 г. Юрий Иванович защищает диплом и продолжает обучение в аспирантуре Московского университета на кафедре вычислительной математики (возглавляемой тогда академиком С. Л. Соболевым). После успешной защиты кандидатской диссертации (к.ф.-м.н., 1959 г., научный руководитель — А. А. Ляпунов, оппоненты — чл.-корр. А. А. Марков, к.ф.-м.н. О. Б. Лупанов) и до окончательного переезда в Москву в 1969 г. работал в Институте математики Сибирского отделения АН СССР, занимая в нем последовательно должности младшего научного сотрудника, заведующего отделом, заведующего отделением, заместителя директора по научной работе. В этот период (1954—1966 гг.) им был опубликован цикл работ по решению задач алгебры и математической логики, причем полученные результаты применялись для создания эффективных программ для ЭВМ, конструирования схем и сетей для обработки информации. Наиболее значимый результат этого периода научной работы — обоснование нового направления исследований, общей теории локальных алгоритмов. В ней были окончательно объединены топологические принципы и теория алгоритмов. Эта теория и легла в основу докторской диссертации Юрия Ивановича (д.ф.-м.н., 1965 г.) по еще тогда новой научной специальности «Математическая кибернетика». Оппонировали ему как специалисты по кибернетике — академик В. М. Глушков, член-корреспондент А. А. Ляпунов и О. Б. Лупанов, так и профессор-алгебраист А. Д. Тайманов.

В 1969 г. Юрий Иванович переезжает в Москву и возглавляет в Вычислительном центре АН СССР лабораторию проблем распознавания. Впоследствии он — заместитель директора по научной работе. Научные интересы этого периода связаны с проблемами классификации или распознавания образов. В 1976—1978 гг. Юрий Иванович публикует цикл работ по ставшему вскоре знаменитым алгебраическому подходу к проблеме синтеза корректных алгоритмов. Эти работы определили современное состояние всей проблематики распознавания и многих смежных областей прикладной математики и информатики. В своих основополагающих работах Юрий Иванович показал, что можно в явном виде строить экстремальные по качеству алгоритмы для решения очень широких классов плохо формализованных задач.

Научные заслуги Юрия Ивановича получили широкое признание. В 1966 г. он совместно с О. Б. Лупановым и членом-корреспондентом АН СССР С. В. Яблонским были удостоены звания лауреата Ленинской премии в области науки и техники. В 1984 г. Юрий Иванович был избран членом-корреспондентом АН СССР (по специальности «Информатика»), а в 1992 г. — академиком РАН (по той же специальности).

В 1986 г. за цикл прикладных работ ему и ряду его учеников была присуждена премия Совета Министров СССР. Он являлся членом иностранных академий наук, председателем секции «Прикладная математика и информатика» Отделения математических наук РАН, председателем экспертного совета ВАК России по управлению и информатике, заслуженным профессором нескольких университетов, председателем Российской ассоциации «Распознавание образов и обработка изображений», членом исполкома Международной ассоциации IAPR (распознавание образов и обработка изображений). Был награжден 8-ю орденами и медалями СССР и России.

Юрий Иванович проводил большую научно-литературную работу, являясь, в том числе, главным редактором международных научных журналов и членом редколлегии ряда рецензируемых научных журналов.

Параллельно с активной научной деятельностью Юрий Иванович вел и преподавательскую работу. С 1961 по 1969 г. — в Новосибирском государственном университете на кафедре алгебры и математической логики, которую возглавлял в то время академик А. И. Мальцев. С 1970 г., будучи уже профессором (1967 г.), — в Московском физико-техническом институте на кафедре академика Н. Н. Моисеева. В 1997 г. по предложению ректора МГУ им. М. В. Ломоносова академика В. А. Садовниченко Юрий Иванович организовал на факультете Вычислительной математики и кибернетики новую кафедру «Математические методы прогнозирования», которой и руководил до конца жизни. В 2008 г. ему была присуждена премия Совета Министров РФ в области образования. С 1965 г. Юрий Иванович периодически читал курсы лекций за рубежом, в университетах США, Франции, Финляндии, Швеции, Австрии, Польши, Болгарии, ГДР и других стран. Эта работа в существенной степени обеспечила широкое международное признание советской и российской науки в области дискретной математики и распознавания образов.

Понимая важность вопроса воспитания подрастающего поколения для развития науки в стране, Юрий Иванович вскоре после защиты первой диссертации включился в работу по подготовке научных кадров. Им создана большая научная школа: под руководством Юрия Ивановича защищены более 100 кандидатских диссертаций по всевозможным разделам естествознания (математике, информатике, медицине, технике, экономике, геологии), не один десяток докторов наук. Он воспитал академиков и членов-корреспондентов РАН и академий государств СНГ. С большим вниманием и участием Юрий Иванович относился к развитию научных школ страны в области обработки изображений, распознавания образов и компьютерной оптики.

Для всех коллег и учеников Юрия Ивановича он останется примером замечательного человека, талантливого педагога и выдающегося, преданного служению науке ученого.



---

## Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

---

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или ЛАТЭХ (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны примеров оформления представлены в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>

8. Статья должна содержать следующую информацию на *русском и английском языках*:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) и  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

**Описание статьи из журнала:**

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

**Описание статьи из электронного журнала:**

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

**Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):**

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

**Описание материалов конференций:**

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

**Описание книги (монографии, сборники):**

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

**Описание переводной книги** (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

**Описание неопубликованного документа:**

Laturov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

**Описание интернет-ресурса:**

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

**Описание диссертации или автореферата диссертации:**

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

**Описание ГОСТа:**

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

**Описание патента:**

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

**Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:**

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: [ieep@frccsc.ru](mailto:ieep@frccsc.ru) (Стригина Светлана Николаевна)

<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>



---

## Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

---

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

***Agreement on the transfer of rights to publish:***

*“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.*

*Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).*

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format: (see site)

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) and

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
  - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.  
Important! Keywords must not be sentences;
  - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).
- Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**  
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**  
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**  
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental’noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.
- Conference proceedings:**  
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povysheniya neftegazoidachi” [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]*. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**  
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem [Operation of turbine generators with direct cooling]*. Moscow: Energy Publs. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**  
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.
- State standards and patents:**  
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch’yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.  
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel’nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.  
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets.  
All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author’s name in the “Subject” field;
  - an article and additional materials have to be attached using the “attach” function;
  - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. “Informatics and Applications” journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

**Editorial Board address:**

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia  
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05  
e-mail: [iiep@frccsc.ru](mailto:iiep@frccsc.ru) (to Svetlana Strigina)  
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>